Matemáticas para Administración y Economía

Matemáticas para Administración y Economía

Segunda Edición

Ernest F. Haeussler, Jr. / Richard S. Paul

The Pennsylvania State University

Traductor:

Lic. Alfredo Díaz Mata

Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
México, D.F.

Revisores Técnicos:

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
México, D.F.

Ing. Andrés Rojas Lobato

Universidad de las Américas (UDLA).
Puebla, México.

S.A. de C.V.

Grupo Editorial Iberoamérica

Nebraska 199. Col. Nápoles, 03810 México, D.F. Tel. 523 09 94 Fax. 543 11 73

175687

QA303
.P3
1992
c.2

Versión en español de la obra *Introductory Mathematical Analysis Sixth Edition*
por Ernest F. Haeussler, Jr. y Richard S. Paul.
Edición original en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc.,
Copyright © 1990, en Estados Unidos de América.
ISBN 0-13-501438-7

D.R. © 1992 por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, archivada o transmitida
en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico,
de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro,
sin el previo y expreso permiso por escrito de Grupo Editorial Iberoamérica.

ISBN 968-7270-97-7
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Productor: Enrique Fradera T.
Cubierta: Suzanne Behnke
Fotografía de cubierta: Slide Graphics of New England Inc.

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
Nebraska 199, Col. Nápoles, C.P. 03810 México, D.F.
Tel. 523-0994 Fax. 543-1173
Apdo. 5-192, C.P. 06500
Reg. CNIEM 1382

175687

Prólogo

Esta nueva edición de ***Matemáticas para Administración y Economía*** continúa proporcionando un fundamento matemático apropiado para los estudiantes de Administración, Economía, y Ciencias Sociales y Biológicas. Comienza con los temas previos a la ciencia del Cálculo, como ecuaciones, funciones, matemáticas financieras, geometría analítica, álgebra matricial y programación lineal. Luego presenta los aspectos del Cálculo en una y varias variables. Las demostraciones técnicas, condiciones, etc., se describen en el grado suficiente, sin llegar a la sobreestimación. Se proporcionan a veces razonamientos intuitivos informales destinados a preservar la claridad.

En todo el libro se tiene abundancia y variedad de aplicaciones para los cursos a los que se dirige este texto; los estudiantes perciben continuamente cómo se utilizan las matemáticas que están aprendiendo. Tales aplicaciones son en áreas tan diversas como las ciencias económico-administrativas, las ciencias de la salud (biología, medicina, psicología), ciencia de la Tierra, Ecología, Arqueología, etc. Al final de la obra figura un amplio *Índice de aplicaciones*. Muchas de estas aplicaciones en el mundo real se han tomado de las publicaciones de esos campos y se documentan con referencias. En algunos casos se proporciona el contexto completo a fin de estimular el interés. Sin embargo, este libro es virtualmente autosuficiente en el sentido de que considera que no existe estudio previo de los conceptos sobre los cuales se basan las aplicaciones.

Deseminadas en toda la extensión de la obra se presentan al lector muchas indicaciones acerca de errores que se cometen por lo general, las cuales se especifican como *Advertencias*. Las definiciones se enuncian y presentan con claridad. Los conceptos clave, así como las reglas y las fórmulas importantes, se destacan en recuadro para patentizar su importancia. Casi 800 ejemplos y problemas resueltos se analizan en detalle. Así mis-

mo, se incluye un abundante número de ejercicios (más de 4000). En cada conjunto de ejercicios hay grupos de problemas que se dan en orden creciente de dificultad; en tales grupos los problemas se gradúan desde los de tipo básico de resolución mecánica directa, hasta los de carácter más interesante que provoca el razonamiento profundo. Se incluyen muchos problemas de tipo práctico con datos reales. Así mismo, se ha realizado un esfuerzo considerable para lograr un equilibrio adecuado entre los ejercicios de simple aplicación y los problemas que requieren la integración de los conceptos aprendidos. Cada capítulo (excepto el 1) contiene una sección final titulada *Repaso* y que está compuesta por las subsecciones "Terminología y símbolos", "Resumen" y "Problemas de repaso".

Las *Respuestas a los problemas de número impar* aparecen al final del libro. Para muchos de los problemas de diferenciación de los Capítulos 11 y 12, las respuestas se dan en las formas no simplificada y simplificada. Esto permite que los estudiantes verifiquen fácilmente su trabajo.

En esta edición se han efectuado varios cambios. En algunas secciones el material ha sido reescrito y reorganizado para lograr una mayor claridad. Algunos conjuntos de ejercicios se han revisado. Como temas nuevos se tienen las ecuaciones exponenciales y logarítmicas (Secc. 6.4), el teorema del valor extremo (Secc. 13.2) y el método de Newton para aproximación de la raíz (Secc. 14.2). Se presentan anticipadamente las nociones de intercepción y simetría respecto a los ejes (Cap. 4) para exponer el trazo de gráficas sin el auxilio de la derivada. Se ha ampliado el Cap. 6 (Funciones exponenciales y logarítmicas); incluye ahora el interés compuesto, el decrecimiento radiactivo y una sección sobre ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Se han hecho cambios extensos al Cap. 10 (Límites y continuidad). En particular, la sección sobre continuidad refleja el papel de los límites. El capítulo sobre diferenciación se ha dividido en dos para tener más flexibilidad. Como resultado, las derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales, junto con la diferenciación implícita y las derivadas de orden superior, están en un capítulo por separado. Ha sido reorganizado el Cap. 13 referente al trazo de gráficas. En primer lugar se analiza la graficación de funciones que carecen de asíntotas y se concluye con la investigación de éstas. Además, los valores y puntos extremos se tratan ahora en una sección separada. En Cap. 15 (Integración), los problemas de valor inicial se introducen en una nueva sección.

Una novedad en esta edición es la inclusión de una *Aplicación práctica* al final de cada capítulo. Cada aplicación es un caso interesante, y a veces novedoso, de utilización de los conceptos matemáticos expuestos en el capítulo respectivo. Muchas de las aplicaciones incluyen ejercicios.

Como todos los profesores establecen el plan de su curso de acuerdo con las condiciones de cada grupo y el plan de estudios establecido, no se intentará proponer esbozos de planes. Sin embargo, dependiendo de la preparación de los estudiantes, algunos profesores opten por omitir el Cap. 1 (Repaso de álgebra) o el Cap. 2 (Ecuaciones). Otros podrán excluir las materias de álgebra matricial y programación lineal. Ciertamente que hay otras secciones que pueden ser omitidas a discreción del maestro. Como ayuda para planear un curso, quizá sean útiles algunos comentarios. La Secc. 3.1 introduce algunos términos de administración como ingreso total, costo fijo, costo variable y utilidades. La Secc. 5.2 introduce la noción de las ecuaciones de oferta (o abasto) y demanda, y la Secc. 5.6 analiza el punto de equilibrio. Algunas secciones son optativas y no causarán problemas si son omitidas. Tales son las 9.3, 9.5, 14.2, 16.1, 16.2, 17.4, 17.6, 17.9 y 17.10. La Secc. 8.9 puede omitirse si no se trata la Secc. 8.10.

Los interesados pueden conseguir de la casa editorial el extenso Manual del Profesor, que contiene las respuestas a todos los problemas, y la resolución detallada de un gran número de ellos. Como otras ayudas didácticas también están disponibles un Banco de Exámenes Computadorizado, un Manual de Soluciones para el Estudiante, y la Edición Anotada para Profesores, de este libro de ***Matemáticas para Administración y Economía.***

Los problemas para resolver con ayuda de la calculadora electrónica se indican con .

Expresamos nuestro agradecimiento a los siguientes colegas que aportaron comentarios y sugerencias de gran valor para la evolución de este libro: R. M. Alliston (*Pennsylvania State University*), R. A. Alo (*University of Houston*), M. N. de Arce (*University of Puerto Rico*), G. R. Bates (*Western Illinois University*), D. E. Bennett (*Murray State University*), C. Bernett (*Harper College*), A. Bishop (*Western Illinois University*), S. A. Book (*California State University*), A. Brink ((*St. Cloud State University*), R. Brown (*York University*), R. W. Brown (*University of Alaska*), S. D. Bulman-Fleming (*Wilfrid Laurier University*), D. Calvetti (*National College*), K. S. Chung (*Kapiolani Community College*), D. N. Clark (*University of Georgia*), E. L. Cohen (*University of Ottawa*), J. Dawson (*Pennsylvania State University*), A. Dollings (*Pennsylvania State University*), G. A. Earles (*St. Cloud State University*), B. H. Edwards (*University of Florida*), J. R. Elliott (*Wilfrid Laurier University*), J. Fitzpatrick (*University of Texas at El Paso*), M. J. Flynn (*Rhode Island Junior College*), G. J. Fuentes (*University of Maine*), G. Goff (*Oklahoma State University*), J. Goldman (*DePaul University*), L. Griff (*Pennsylvania State University*), F. H. Hall (*Pennsylvania State University*), V. E. Hanks (*Western Kentucky University*), J. N. Henry (*California State University*), W. U. Hodgson (*West Chester State College*), B. C. Horne, Jr. (*Virginia Polytechnic Institute and State University*), J. Hradnanski (*Pennsylvania State University*), C. Hurd (*Pennsylvania State University*), J. A. Jimenez (*Pennsylvania State University*), W. C. Jones (*Western Kentucky University*), R. M. King (*Gettysburg College*), M. M. Kostreva (*University of Maine*), G. A. Kraus (*Gannon University*), M. R. Latina (*Rhode Island Junior College*), J. F. Longman (*Villanova University*), I. Marshak (*Loyola University of Chicago*), F. B. Mayer (*Mt. San Antonio College*), P. McDougle (*University of Miami*), F. Miles (*California State University*), E. Mohnike (*Mt. San Antonio College*), C. Monk (*University of Richmond*), J. G. Morris (*University of Wisconsin—Madison*), J.C. Moss (*Paducah Community College*), D. Mulling (*Pennsylvania State University*), E. Nelson (*Pennsylvania State University*), S. A. Nett (*Western Illinois University*), R. H. Oehmke (*University of Iowa*), Y.Y. Oh (*Pennsylvania State University*), N. B. Patterson (*Pennsylvania State University*), E. Pemberton (*Wilfrid Laurier University*), M. Perkel (*Wright State University*), D. B. Priest (*Harding College*), J. R. Provencio (*University of Texas*), L. R. Pulsinelli (*Western Kentucky University*), M. Racine (*University of Ottawa*), N. M. Rice (*Queen's University*), A. Santiago (*University of Puerto Rico*), W. H. Seibold, Jr. (*West Chester State College*), J. R. Schaefer (*University of Wisconsin-Milwaukee*), S. Sehgal (*Ohio State University*), S. Singh (*Pennsylvania State University*), E. Smet (*Huron College*), M. Stoll (*University of South Carolina*), B. Toole (*University of Maine*), J. W. Toole (*University of Maine*), D. H. Trahan (*Naval Postgraduate School*), J. P. Tull (*Ohio State University*), L. O. Vauhan, Jr. (*University of Alabama in Birmingham*), L. A. Vercoe (*Pennsylvania State University*), M. Vuilleumier (*Ohio State University*), B. K. Waits (*Ohio State University*), A. Walton (*Virginia Polytechnic Institute and State University*), H. Walum (*Ohio State University*), A. J. Weidner (*Pennsylvania*

State University), L. Weiss (*Pennsylvania State University*), N. A. Weigmann (*California State University*), C. R. B. Wright (*University of Oregon*), C. Wu (*University of Wisconsin—Milwaukee*).

Además, agradecemos en especial a los colegas mencionados a continuación, sus útiles comentarios y sugerencias para el mejoramiento de esta edición: John T. Gresser (*Bowling Green State University*), Raymond C. Heitmann (*The University of Texas at Austin*), Don Mason (*Elmhurst College*), Robert A. Moreland (*Texas Tech University*), Gordon Shilling (*The University of Texas at Arlington*), Laurence Small (*Los Angeles Pierce College*), Edward T. H. Wang (*Wilfrid Laurier University*), y Gloria Woods (*Ohio State University*).

Por último, vaya nuestro sincero reconocimiento a John Morgan, nuestro supervisor editorial, por su paciencia, ayuda experta y entusiasta colaboración.

Ernest F. Haeussler, Jr.
Richard S. Paul

Contenido

Prólogo v

CAPÍTULO 1 **Repaso de álgebra** 1

1.1 Propósito 1
1.2 Conjuntos y números reales 1
1.3 Algunas propiedades de los números reales 3
1.4 Operaciones con números reales 7
1.5 Exponentes y radicales 11
1.6 Operaciones con expresiones algebraicas 17
1.7 Factorización 23
1.8 Fracciones 26

CAPÍTULO 2 **Ecuaciones** 33

2.1 Ecuaciones lineales 33
2.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales 40
2.3 Ecuaciones cuadráticas 43
2.4 Complemento 49
2.5 Repaso 50
Aplicación práctica: *Crecimiento real de una inversión* 52

CAPÍTULO **3 Aplicaciones de las ecuaciones y desigualdades** **55**

3.1 Aplicaciones de las ecuaciones 55
3.2 Desigualdades lineales 62
3.3 Aplicaciones de las desigualdades 68
3.4 Valor absoluto 71
3.5 Repaso 76
Aplicación práctica: *Grabación de calidad en videograbadoras* 78

CAPÍTULO **4 Funciones y gráficas** **81**

4.1 Funciones 81
4.2 Funciones especiales 88
4.3 Combinaciones de funciones 92
4.4 Gráficas en coordenadas rectangulares 97
4.5 Simetría 107
4.6 Repaso 113
Aplicación práctica: *¡Una experiencia en el pago de impuesto!* 117

CAPÍTULO **5 Rectas, parábolas y sistemas** **121**

5.1 Rectas 121
5.2 Aplicaciones y funciones lineales 127
5.3 Funciones cuaráticas 135
5.4 Sistemas de ecuaciones lineales 141
5.5 Sistemas no lineales 151
5.6 Aplicación de los sistemas de ecuaciones 153
5.7 Repaso 163
Aplicación práctica: *¿Un juego de tenis?* 167

CAPÍTULO **6 Funciones exponenciales y logarítmica** **172**

6.1 Funciones exponenciales 172
6.2 Funciones logarítmicas 181
6.3 Propiedades de los logarítmos 188
6.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales 195
6.5 Repaso 201
Aplicación práctica: *Dosificación de medicamentos* 205

CAPÍTULO **7 Matemáticas financieras** **208**

7.1 Interés compuesto 208
7.2 Valor actual (o presente) 212
7.3 Anualidades 217
7.4 Amortización de créditos 227
7.5 Repaso 232
Aplicación práctica: *La regla de los 78* 235

CAPÍTULO **8 Álgebra de matrices** **240**

8.1 Matrices 240
8.2 Adición de matrices y multiplicación por un escalar 247
8.3 Multiplicación de matrices 254
8.4 Método de reducción 264
8.5 Método de reducción (continuación) 273
8.6 Inversas 279
8.7 Determinantes 287
8.9 Inversas utilizando la adjunta 299
8.10 Análisis de insumo-producción (o insumo-producto) 304
8.11 Repaso 309
Aplicación práctica: *Los requisitos de administración de insulina como un proceso lineal* 312

CAPÍTULO **9 Programación lineal** **315**

9.1 Desigualdades lineales con dos variables 315
9.2 Programación lineal 321
9.3 Soluciones óptimas múltiples 330
9.4 El método simplex 332
9.5 Degeneración, soluciones no acotadas, soluciones óptimas múltiples 345
9.6 Variables artificiales 351
9.7 Minimización 363
9.8 El dual 368
9.9 Repaso 376
Aplicación práctica: *Terapias con fármacos y radiación* 379

CAPÍTULO **10 Límites y continuidad** **381**

10.1 Límites 381
10.2 Límites (continuación) 388
10.3 Interés compuesto en forma continua 398
10.4 Continuidad 401
10.5 Aplicación de la continuidad a las desigualdades 408
10.6 Repaso 413
Aplicación práctica: *Déficit de presupuesto* 417

CAPÍTULO **11 Diferenciación (o derivación)** **420**

11.1 La derivada 420
11.2 Reglas para la diferenciación 427
11.3 La derivada como tasa de variación 435
11.4 Diferenciación y continuidad 445
11.5 Reglas del producto y el cociente 447
11.6 La regla de la cadena y de la potencia 455
11.7 Repaso 463

CAPÍTULO **12 Temas adicionales sobre diferenciación** **468**

12.1 Derivadas de funciones logarítmicas 468
12.2 Derivadas de funciones exponenciales 473
12.3 Diferenciación implícita 478
12.4 Diferenciación logarítmica 483
12.5 Derivadas de orden superior (o sucesivas) 486
12.6 Repaso 490

CAPÍTULO **13 Trazo de curvas** **493**

13.1 Extremos relativos o locales 493
13.2 Valores extremos 504
13.3 Concavidad 505
13.4 Prueba de la segunda derivada 513
13.5 Asíntotas 515
13.6 Repaso 525

CAPÍTULO **14 Aplicaciones de la diferenciación** **529**

14.1 Aplicación de máximos y mínimos 529
14.2 El método de Newton 540
14.3 Diferenciales 545
14.4 Elasticidad de demanda 550
14.5 Repaso 555

CAPÍTULO **15 Integración** **558**

15.1 La integral indefinida 558
15.2 Integración con condiciones iniciales 565
15.3 Más fórmulas de integración 563
15.4 Técnicas de integración 578
15.5 Sumatoria 583
15.6 La integral definida 586

15.7 El Teorema fundamental del Cálculo Integral 595
15.8 Área 604
15.9 Área entre curvas 610
15.10 Excedentes de consumidores y fabricantes 617
15.11 Repaso 621
Aplicación práctica: *Precio de un artículo entregado* 626

CAPÍTULO **16 Métodos y aplicaciones de la integración** **629**

16.1 Integración por partes 629
16.2 Integración por fracciones parciales 633
16.3 Integración por medio de tablas 640
16.4 Valor promedio de una función 647
16.5 Integración aproximada 649
16.6 Ecuaciones diferenciales 654
16.7 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciables 663
16.8 Integrales impropias 671
16.9 Repaso 675
Aplicación práctica: *El régimen dietario* 680

CAPÍTULO **17 Cálculo en varias variables** **682**

17.1 Funciones de varias variables 682
17.2 Derivadas parciales 689
17.3 Aplicaciones de las derivadas parciales 696
17.4 Diferenciación parcial implícita 702
17.5 Derivadas parciales de orden superior 705
17.6 Regla de la cadena 708
17.7 Máximos y minimos paa funciones de dos variables 712
17.8 Multiplicadores de Lagrange 722
17.9 Líneas de regresión 729
17.10 Un comentario sobre las funciones homogéneas 737
17.11 Integrales múltiples 738
17.12 Repaso 743
Aplicación práctica: *Análisis de datos para modelar el enfriamiento* 748

APÉNDICE **A Potencias, raíces y recíprocos** **751**

APÉNDICE **B Valores de e^x y e^{-x}** **754**

APÉNDICE **C Logarítmos naturales** **756**

APÉNDICE D **Interés compuesto** 759

APÉNDICE E **Integrales seleccionadas** 774

APÉNDICE F **Áreas bajo la curva normal estándar** 778

Respuestas a problemas de número impar 780

Índice 820

Índice de aplicaciones 830

Matemáticas para Administración y Economía

CAPÍTULO 1

Repaso de álgebra

1.1 Propósito

Este capítulo está diseñado para ofrecer un breve repaso de algunos términos y métodos necesarios en la manipulación matemática. Sin duda, el lector ha estado expuesto a gran parte de este material en ocasiones anteriores. Sin embargo, debido a que estos temas son importantes para manejar las matemáticas que vienen después, es posible que una segunda exposición resulte benéfica. Se debe dedicar a estas secciones el tiempo necesario para repasarlas.

1.2 Conjuntos y números reales

En términos simples, un *conjunto* es un grupo de objetos. Por ejemplo, se puede hablar del conjunto de los números pares entre 5 y 11, que son el 6, el 8 y el 10. A un objeto que se encuentre en un conjunto se le denomina *miembro* o *elemento* de aquél.

Una forma de especificar un conjunto es listando sus miembros, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es {6, 8, 10}, el cual se puede denotar mediante una literal como A. Se dice que un conjunto A es un **subconjunto** de un conjunto B si, y sólo si, todos los elementos de A son también elementos de B. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, etc., forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de los enteros positivos} = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Los tres puntos significan que la lista de elementos no tiene fin, aun cuando se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos, junto con el cero y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \ldots$ forman el conjunto de los **enteros**:

$$\textit{conjunto de los enteros} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que se pueden escribir como una razón (cociente) de dos enteros. Es decir, un número racional es aquel que puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. (El símbolo "$\neq$" se lee "es diferente de".) **No se puede dividir entre cero.** Los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. El entero 2 es racional puesto que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todos los enteros son racionales. Se debe señalar que $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{-4}{-8}$ y 0.5 representan todos el mismo número racional.

Todos los números racionales se pueden representar mediante números decimales *conmensurables* (con un número definido de cifras), tales como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$, o mediante decimales *inconmensurables periódicos* (con un grupo de dígitos que se repiten indefinidamente), tales como $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\ldots$ y $\frac{2}{15} = 0.1333\ldots$. Los números que se representan mediante decimales *inconmensurables no periódicos* se llaman **números irracionales**. Un número irracional no se puede escribir como un entero dividido entre otro entero. Los números π (pi) y $\sqrt{2}$ son irracionales.

Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales**. Estos números pueden representarse mediante puntos en una recta. esto se elige primero un punto de la recta para representar el cero. A este punto se le denomina *origen* (véase la Figura 1.1). Después, se elige una unidad de medida de distancia, a la que se le denomina "distancia unitaria" y se marca en forma sucesiva tanto hacia la izquierda como a la derecha del origen. A cada punto sobre la recta se le asocia una distancia dirigida, o *número con signo*, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones que se encuentran a la derecha del origen se las considera positivas (+), y a las que se están a la izquierda se las considera negativas (−). Por ejemplo, al punto que se encuentra $\frac{1}{2}$ unidad a la derecha del origen le corresponde el número con signo $\frac{1}{2}$, al que se le denomina la **coordenada** de ese punto. De manera similar, la coordenada del punto que se sitúa a 1.5 unidades a la izquierda del origen es −1.5. Se indican las coordenadas de algunos puntos en la Figura 1.1. La punta de flecha indica que la dirección hacia la derecha de la recta se considera positiva.

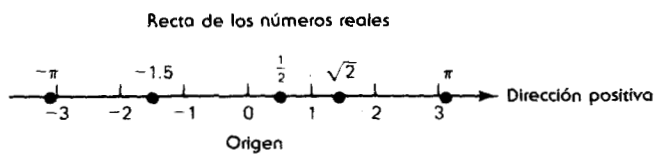


FIGURA 1.1

A cada punto de la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único en la recta. Por esta razón, se dice que existe una *correspondencia de uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. A dicha recta se la llama **eje de coordenadas** o **recta de los números reales**. Se pueden considerar los números reales como puntos en una recta numérica, y viceversa.

EJERCICIOS 1.2

En los Problemas **1-12**, *clasificar el planteamiento como verdadero o falso. Si es falso, diga cuál es la razón.*

1. -7 es un entero.

2. $\frac{1}{6}$ es racional.

3. -3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\frac{4}{2}$ no es un entero positivo.

8. π es un número real.

9. $\frac{0}{6}$ es racional.

10. 0 es un número natural.

11. -3 se encuentra a la derecha de -4 en la recta de los números reales.

12. Todo entero es, o positivo o negativo.

1.3 Algunas propiedades de los números reales

Si a, b y c son números reales, las siguientes son algunas propiedades importantes de los números reales.

1. Propiedad transitiva de la igualdad

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Así, dos números que son iguales a un tercero son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

2. Propiedades conmutativas de la adición

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

Esto significa que se pueden sumar o multiplicar dos números reales en cualquier orden. Por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$ y $7(-4) = (-4)(7)$.

3. Propiedades asociativas de la adición y la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c.$$

Lo anterior significa que en la adición o la multiplicación, los números se pueden agrupar en cualquier orden. Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$. También $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$ y $2x + (x + y) = (2x + x) + y$.

4. Propiedades de los inversos

a. Para cada número real a, existe un número real único, denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

El número $-a$ se denomina **inverso aditivo**, o el **negativo**, de a.

Por ejemplo, puesto que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no es necesariamente un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, puesto que $(-6) + (6) = 0$. Es decir, el negativo de -6 es 6.

b. Para todo número real a, exceptuando el 0, existe un número real único, denotado por a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Al número a^{-1} se le denomina **inverso multiplicativo** de a.

Así, todos los números excepto el 0 tienen un inverso multiplicativo. Se debe recordar que a^{-1} se puede escribir como $\frac{1}{a}$ y también se le denomina *recíproco* de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, dado que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Así, $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, puesto que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. **El recíproco de 0 no está definido.**

5. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{y} \qquad (b + c)a = ba + ca$$

Por ejemplo,

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14,$$
$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20,$$
$$x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x.$$

La propiedad distributiva se puede extender a la forma $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. De hecho, puede ampliarse a sumas que implican cualquier número de términos.

La *sustracción* o *resta* se define formalmente mediante la propiedad del inverso aditivo: $a - b$ significa $a + (-b)$, en donde $-b$ es el inverso aditivo de b. Así $6 - 8$ significa $6 + (-8)$. Por ello, la sustracción se define en términos de la adición.

De manera similar se define la *división* en términos de la multiplicación. Si $b \neq 0$, entonces $a \div b$, o $\frac{a}{b}$, se define como

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}).$$

Puesto que $b^{-1} = \frac{1}{b}$,

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right).$$

Así $\frac{3}{5}$ significa 3 tantos $\frac{1}{5}$, en donde $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5. En ocasiones se llama a $a \div b$ o $\frac{a}{b}$ razón de a a b. Es importante destacar que como el 0 no tiene inverso multiplicativo, **la división entre 0 no está definida.**

Los siguientes ejemplos muestran algunas operaciones que implican las propiedades anteriores:

EJEMPLO 1

a. $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Así, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es igual al resultado de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En uno u otro caso el resultado es 60.

c. Por la definición de la resta, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Sin embargo, mediante la propiedad conmutativa de la adición, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Así, por la propiedad transitiva, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. En forma más concisa, se puede escribir

$$2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2.$$

d.
$$\begin{aligned}(8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(por la definición de sustracción)}\\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(por la propiedad asociativa)}\\ &= 8 + (x - y) && \text{(por la definición de sustracción).}\end{aligned}$$

Así, mediante la propiedad transitiva,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y).$$

e. Mediante la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \quad \text{para} \quad c \neq 0.$$

Pero, por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right).$$

Sin embargo, mediante la definición de división, $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$. En consecuencia,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right).$$

También se puede demostrar que $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b$.

EJEMPLO 2

a. *Demostrar que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

Mediante la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8).$$

Pero, mediante la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{de manera similar,} \quad 3(2y) = 6y.$$

Por tanto $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

b. *Demuéstrese que si* $c \neq 0$, *entonces* $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$.

Mediante la definición de división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a + b}{c} = (a + b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}.$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Por lo que

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Este importante resultado ***no*** significa que $\dfrac{a}{b + c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$, un error muy común.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{2 + 1} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{1}.$$

Para obtener el producto de varios números se requiere considerar sus productos, de dos en dos. Por ejemplo, para evaluar el producto de x, y y z, se podría primero multiplicar x por y, y después multiplicar ese producto por z; o en forma alternativa, podría multiplicarse x por el producto de y y z. La propiedad asociativa de la multiplicación señala que ambos resultados son idénticos sin importar la forma en que se agrupen los números. Por ello no resulta ambiguo escribir xyz. Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de igual manera a la adición.

Un comentario final antes de terminar esta sección. No sólo se debe estar consciente de los aspectos manipulativos de las propiedades de los números reales, sino que también se debe conocer y estar familiarizado con la terminología implicada.

EJERCICIOS 1.3

En los Problemas **1-10**, *clasificar el planteamiento como verdadero o falso.*

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

3. El inverso aditivo de 5 es $\frac{1}{5}$.

4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$.

5. $-x + y = y - x$.

6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$.

7. $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$.

8. $3\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$.

9. $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.

10. $8(9x) = 72x$.

En los Problemas **11-20**, *especificar qué propiedades de los números reales se están utilizando.*

11. $2(x + y) = 2x + 2y$.

12. $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.

13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$.

14. $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

15. $2(x - y) = (x - y)(2)$.

16. $x + (x + y) = (x + x) + y$.

17. $8 - y = 8 + (-y)$.

18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$.

19. $(7 + x)y = 7y + xy$.

20. $(-1)[-3 + 4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$.

En los Problemas **21-26**, *demostrar que los planteamientos son ciertos utilizando las propiedades de los números reales.*

21. $5a(x + 3) = 5ax + 15a$.

22. $(2 - x) + y = 2 + (y - x)$.

23. $(x - y)(2) = 2x - 2y$.

24. $2[27 + (x + y)] = 2[(y + 27) + x]$.

25. $x[(2y + 1) + 3] = 2xy + 4x$.

26. $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

27. Probar que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. [*Sugerencia:* $b + c + d = (b + c) + d$.]

1.4 Operaciones con números reales

Enseguida se listan importantes propiedades de los números reales que deben estudiarse con cuidado. La capacidad de manipular números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero. Se supone que se conoce la adición y la sustracción de números reales.

PROPIEDAD	EJEMPLO
1. $a - b = a + (-b)$.	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5$.
2. $a - (-b) = a + b$.	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9$.
3. $-a = (-1)(a)$.	$-7 = (-1)(7)$.
4. $a(b + c) = ab + ac$.	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54$.
5. $a(b - c) = ab - ac$.	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$.
6. $-(a + b) = -a - b$.	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$.
7. $-(a - b) = -a + b$.	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5$.
8. $-(-a) = a$.	$-(-2) = 2$.
9. $a(0) = (-a)(0) = 0$.	$2(0) = (-2)(0) = 0$.
10. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$.	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7)$.

11. $(-a)(-b) = ab.$ $(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14.$

12. $\dfrac{a}{1} = a.$ $\dfrac{7}{1} = 7, \dfrac{-2}{1} = -2.$

13. $\dfrac{a}{b} = a\left(\dfrac{1}{b}\right).$ $\dfrac{2}{7} = 2\left(\dfrac{1}{7}\right).$

14. $\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}.$ $\dfrac{2}{-7} = -\dfrac{2}{7} = \dfrac{-2}{7}.$

15. $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}.$ $\dfrac{-2}{-7} = \dfrac{2}{7}.$

16. $\dfrac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0.$ $\dfrac{0}{7} = 0.$

17. $\dfrac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$ $\dfrac{2}{2} = 1, \dfrac{-5}{-5} = 1.$

18. $a\left(\dfrac{b}{a}\right) = b.$ $2\left(\dfrac{7}{2}\right) = 7.$

19. $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$ $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1.$

20. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}.$ $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}.$

21. $\dfrac{ab}{c} = \left(\dfrac{a}{c}\right)b = a\left(\dfrac{b}{c}\right).$ $\dfrac{2 \cdot 7}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \dfrac{7}{3}.$

22. $\dfrac{a}{bc} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}\right) = \left(\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{a}{c}\right).$ $\dfrac{2}{3 \cdot 7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{7}.$

23. $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{c}\right) = \dfrac{ac}{bc}$ cuando $c \neq 0.$ $\dfrac{2}{7} = \left(\dfrac{2}{7}\right)\left(\dfrac{5}{5}\right) = \dfrac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}.$

24. $\dfrac{a}{b(-c)} = \dfrac{a}{(-b)(c)} = \dfrac{-a}{bc} = \dfrac{-a}{(-b)(-c)} = -\dfrac{a}{bc}.$ $\dfrac{2}{3(-5)} = \dfrac{2}{(-3)(5)} = \dfrac{-2}{3(5)} = \dfrac{-2}{(-3)(-5)} = -\dfrac{2}{3(5)} = -\dfrac{2}{15}.$

25. $\dfrac{a(-b)}{c} = \dfrac{(-a)b}{c} = \dfrac{ab}{-c} = \dfrac{(-a)(-b)}{-c} = -\dfrac{ab}{c}.$ $\dfrac{2(-3)}{5} = \dfrac{(-2)(3)}{5} = \dfrac{2(3)}{-5} = \dfrac{(-2)(-3)}{-5} = -\dfrac{2(3)}{5} = -\dfrac{6}{5}.$

26. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a + b}{c}.$ $\dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{9} = \dfrac{2 + 3}{9} = \dfrac{5}{9}.$

27. $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$. $\quad \dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{2-3}{9} = \dfrac{-1}{9}$.

28. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$. $\quad \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\cdot 3 + 5\cdot 2}{5\cdot 3} = \dfrac{22}{15}$.

29. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}$. $\quad \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\cdot 3 - 5\cdot 2}{5\cdot 3} = \dfrac{2}{15}$.

30. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$. $\quad \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{7}{5} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{21}$.

31. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = a \div \dfrac{b}{c} = a\cdot\dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$. $\quad \dfrac{\frac{2}{3}}{5} = 2 \div \dfrac{3}{5} = 2\cdot\dfrac{5}{3} = \dfrac{2\cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}$.

32. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$. $\quad \dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{2}{3} \div 5 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3\cdot 5} = \dfrac{2}{15}$.

La Propiedad 23 es, en esencia, el **principio fundamental de las fracciones**, que establece que *multiplicar o dividir tanto el numerador como el denominador de una fracción por el mismo número, exceptuando el* 0 *da como resultado una fracción que es equivalente a (es decir, tiene el mismo valor que) la fracción original.* Por consiguiente,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7\cdot 8}{\frac{1}{8}\cdot 8} = \frac{56}{1} = 56.$$

Mediante las Propiedades 23 y 28 se tiene que

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2\cdot 15 + 5\cdot 4}{5\cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2\cdot 25}{3\cdot 25} = \frac{2}{3}.$$

También puede resolverse este problema convirtiendo $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y utilizando después la Propiedad 25. Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ se pueden escribir con un denominador común igual a $5\cdot 15$: $\dfrac{2}{5} = \dfrac{2\cdot 15}{5\cdot 15}$ y $\dfrac{4}{15} = \dfrac{4\cdot 5}{15\cdot 5}$. Sin embargo, 15 es el *menor* de esos denominadores comunes, y se le denomina *mínimo común denominador* (M.C.D.) de $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$. Por ello,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

De manera similar,

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} - \frac{5\cdot 2}{12\cdot 2} \qquad \text{(M.C.D.} = 24)$$

$$= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{9-10}{24} = -\frac{1}{24}.$$

EJERCICIOS 1.4

Simplificar, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

1. $-2 + (-4)$.
2. $-6 + 2$.
3. $6 + (-4)$.
4. $7 - 2$.
5. $7 - (-4)$.
6. $-7 - (-4)$.
7. $-8 - (-6)$.
8. $(-2)(9)$.
9. $7(-9)$.
10. $(-2)(-12)$.
11. $(-1)6$.
12. $-(-9)$.
13. $-(-6 + x)$.
14. $-7(x)$.
15. $-12(x - y)$.
16. $-[-6 + (-y)]$.
17. $-2 \div 6$.
18. $-2 \div (-4)$.
19. $4 \div (-2)$.
20. $2(-6 + 2)$.
21. $3[-2(3) + 6(2)]$.
22. $(-2)(-4)(-1)$.
23. $(-5)(-5)$.
24. $x(0)$.
25. $3(x - 4)$.
26. $4(5 + x)$.
27. $-(x - 2)$.
28. $0(-x)$.
29. $8\left(\frac{1}{11}\right)$.
30. $\frac{7}{1}$.
31. $\frac{-5x}{7y}$.
32. $\frac{3}{-2x}$.
33. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$.
34. $\frac{x}{y}(2z)$.
35. $(2x)\left(\frac{3}{2x}\right)$.
36. $\frac{-15x}{-3y}$.
37. $\frac{7}{y} \cdot \frac{1}{x}$.
38. $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{y}$.
39. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
40. $\frac{5}{12} + \frac{3}{4}$.
41. $\frac{3}{10} - \frac{7}{15}$.
42. $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$.
43. $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$.
44. $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.
45. $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$.
46. $\frac{\frac{6}{x}}{y}$.
47. $\frac{\frac{x}{6}}{y}$.
48. $\frac{\frac{-7}{2}}{\frac{5}{8}}$.
49. $\frac{7}{0}$.
50. $\frac{0}{7}$.
51. $\frac{0}{0}$.
52. $0 \cdot 0$.

1.5 Exponentes y radicales

El producto $x \cdot x \cdot x$ se abrevia como x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura de n veces x. Al símbolo n de x^n se le denomina *exponente* y a x se le llama *base*. En términos más específicos, si n es un entero positivo se tiene que:

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}$.
2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}}$.
3. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$.
4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

EJEMPLO 1

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

b. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{243}$.

c. $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$.

d. $2^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$.

e. $x^1 = x$.

Si $r^n = x$, en donde n es un entero positivo, entonces r es la raíz n-ésima de x. Por ejemplo, $3^2 = 9$, y así 3 es la raíz segunda (a la que usualmente se denomina *raíz cuadrada*) de 9. Puesto que $(-3)^2 = 9$, -3 es también una raíz cuadrada de 9. De manera similar, -2 es una *raíz cúbica* de -8, puesto que $(-2)^3 = -8$.

Algunos números no tienen raíz n-ésima que sea un número real. Por ejemplo, puesto que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe ningún número real que sea raíz cuadrada de -4.

La **raíz n-ésima principal** de x es aquella raíz n-ésima de x que sea positiva, si x es positiva, y que sea negativa si x es negativa y n es impar. Se le denota por $\sqrt[n]{x}$. Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva,} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Se define que $\sqrt[n]{0} = 0$.

A la expresión $\sqrt[n]{x}$ se le denomina **radical**. Aquí, n es el *índice*, x es el *radicando* y $\sqrt{\ }$ es el *signo de radical*. Con las raíces cuadradas principales normalmente se omite el índice y se escribe sólo $\sqrt{x}$ en vez de $\sqrt[2]{x}$. Por tanto $\sqrt{9} = 3$.

ADVERTENCIA

Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada **principal** de 4 es 2 y no -2. Por consiguiente, $\sqrt{4} = 2$.

Si x es positivo, la expresión $x^{p/q}$, en donde p y q son enteros y q es positiva, se define como $\sqrt[q]{x^p}$. En consecuencia,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}; \qquad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$
$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

Enseguida se presentan las leyes básicas de los exponentes y los radicales.*

* Aunque algunas leyes implican restricciones, no son de importancia para este análisis.

LEY	EJEMPLO
1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256; \quad x^2 \cdot x^3 = x^5$.
2. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$.	$2^0 = 1$.
3. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
4. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.	$\dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8; \quad \dfrac{1}{x^{-5}} = x^5$.
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$.	$\dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16; \quad \dfrac{x^8}{x^{12}} = \dfrac{1}{x^4}$.
6. $\dfrac{x^m}{x^m} = 1$.	$\dfrac{2^4}{2^4} = 1$.
7. $(x^m)^n = x^{mn}$.	$(2^3)^5 = 2^{15}; \quad (x^2)^3 = x^6$.
8. $(xy)^n = x^n y^n$.	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \ \ 4^3 = 8 \cdot 64$.
9. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3}; \quad \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1^5}{3^5} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$.
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$.	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.	$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$.
12. $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$.	$4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.
13. $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$.
14. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$.
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$.
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$.	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$.

EJEMPLO 2

a. Por la Ley 1,

$$x^6x^8 = x^{6+8} = x^{14},$$
$$a^3b^2a^5b = a^3a^5b^2b = a^8b^3,$$
$$x^{11}x^{-5} = x^{11-5} = x^6,$$
$$z^{2/5}z^{3/5} = z^1 = z,$$
$$xx^{1/2} = x^1x^{1/2} = x^{3/2}.$$

b. Por la Ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c. $\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4$ (Leyes 16 y 14)

$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$ (Ley 9).

d. $(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3}$ (Ley 8)

$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2$ (Leyes 16 y 7)

$= (4)^2 a^2 = 16a^2.$

Racionalizar el denominador de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin el radical en su denominador. Se utiliza el principio fundamental de las fracciones.

EJEMPLO 3

Racionalizar los denominadores.

a. $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^{1/2} \cdot 5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

b. $\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2 \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6} \cdot 3^{5/6}x^{1/6}} = \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}.$

Los siguientes ejemplos ilustran diversas aplicaciones de las leyes de los exponentes y los radicales.

EJEMPLO 4

a. *Eliminar los exponentes negativos en* $\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2} \cdot y^3 \cdot \frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2} \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}.$$

Comparando la respuesta con la expresión original, se puede bajar un factor del numerador al denominador, y viceversa, cambiando el signo del exponente.

b. *Simplificar* $\frac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}.$$

c. *Simplificar* $(x^5y^8)^5$.

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}.$$

d. *Simplificar* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$.

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}.$$

e. *Simplificar* $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}.$$

f. *Simplificar* $\dfrac{x^3}{y^2} \div \dfrac{x^6}{y^5}$.

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}.$$

EJEMPLO 5

a. *Eliminar los exponentes negativos en* $x^{-1} + y^{-1}$ *y simplificar.*

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}. \qquad \left(\textit{Nota: } x^{-1} + y^{-1} \neq \frac{1}{x + y}.\right)$$

b. *Simplificar* $x^{3/2} - x^{1/2}$ *utilizando la ley distributiva.*

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x - 1).$$

c. *Eliminar los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$.

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}.$$

d. *Eliminar los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$.

$$(x^{-1} - y^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y - x}{xy}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{xy}{y - x}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{(y - x)^2}.$$

e. *Aplicar la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2z^{6/5})$.

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}.$$

EJEMPLO 6

a. *Simplificar* $\sqrt[4]{48}$.

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\ \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}.$$

b. *Reescribir* $\sqrt{2 + 5x}$ *sin utilizar un signo de radical.*

$$\sqrt{2 + 5x} = (2 + 5x)^{1/2}.$$

c. *Racionalizar el denominador de* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$ *y simplificar.*

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}.$$

d. *Simplificar* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

EJEMPLO 7

a. *Simplificar* $\sqrt[3]{x^6 y^4}$.

$$\sqrt[3]{x^6 y^4} = \sqrt[3]{(x^2)^3 y^3 y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y}$$
$$= x^2 y \sqrt[3]{y}.$$

b. *Simplificar* $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

c. *Simplificar* $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$.

$$\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 10} - \sqrt{25 \cdot 2} + 15\sqrt{2}$$
$$= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$$
$$= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}.$$

d. *Si* x *es un número real, simplificar* $\sqrt{x^2}$.

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \textit{si } x \text{ es positiva,} \\ -x, & \text{si } x \text{ es negativa,} \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por tanto $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

EJERCICIOS 1.5

En los Problemas **1-14**, *simplificar y expresar todas las respuestas en términos de exponentes positivos.*

1. $(2^3)(2^2)$.

2. x^6x^9.

3. w^4w^8.

4. $x^6x^4x^3$.

5. $\dfrac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$.

6. $(x^{12})^4$.

7. $\dfrac{(x^2)^5}{(y^5)^{10}}$.

8. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^5$.

9. $(2x^2y^3)^3$.

10. $\left(\dfrac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$.

11. $\dfrac{x^8}{x^2}$.

12. $\left(\dfrac{2x^2}{4x^4}\right)^3$.

13. $\dfrac{(x^3)^6}{x(x^3)}$.

14. $\dfrac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$.

En los Problemas **15-28**, *evaluar las expresiones.*

15. $\sqrt{25}$.

16. $\sqrt[3]{64}$.

17. $\sqrt[5]{-32}$.

18. $\sqrt{.04}$.

19. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

20. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$.

21. $(100)^{1/2}$.

22. $(64)^{1/3}$.

23. $4^{3/2}$.

24. $(25)^{-3/2}$.

25. $(32)^{-2/5}$.

26. $(0.09)^{-1/2}$.

27. $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{5/4}$.

28. $\left(-\dfrac{27}{64}\right)^{2/3}$.

En los Problemas **29-40**, *simplificar las expresiones.*

29. $\sqrt{32}$.

30. $\sqrt[3]{24}$.

31. $\sqrt[3]{2x^3}$.

32. $\sqrt{4x}$.

33. $\sqrt{16x^4}$.

34. $\sqrt{\sqrt[4]{\dfrac{x}{16}}}$.

35. $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$.

36. $\sqrt{\frac{5}{11}}$.

37. $(9z^4)^{1/2}$.

38. $(16y^8)^{3/4}$.

39. $\left(\dfrac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$.

40. $\left(\dfrac{1000}{a^9}\right)^{-2/3}$.

En los Problemas **41-52**, *escribir las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evitar todos los radicales en la forma final. Por ejemplo,* $y^{-1}\sqrt{x} = \dfrac{x^{1/2}}{y}$.

41. $\dfrac{x^3y^{-2}}{z^2}$.

42. $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$.

43. $2x^{-1}x^{-3}$.

44. $x + y^{-1}$.

45. $(3t)^{-2}$.

46. $(3 - z)^{-4}$.

47. $\sqrt[3]{7s^2}$.

48. $(x^{-2}y^2)^{-2}$.

49. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

50. $\dfrac{x^{-2}y^{-6}z^2}{xy^{-1}}$.

51. $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$.

52. $\left(\sqrt[5]{xy^{-3}}\right)x^{-1}y^{-2}$.

En los Problemas **53-58**, *expresar las formas exponenciales de modo equivalente utilizando radicales.*

53. $(8x - y)^{4/5}$.

54. $(ab^2c^3)^{3/4}$.

55. $x^{-4/5}$.

56. $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$.

57. $2x^{-2/5} - (2x)^{-2/5}$.

58. $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$.

En los Problemas **59-68**, *racionalizar los denominadores.*

59. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

60. $\dfrac{5}{\sqrt{11}}$.

61. $\dfrac{4}{\sqrt{2x}}$.

62. $\dfrac{y}{\sqrt{2y}}$.

63. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$.

64. $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

65. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$.

66. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

67. $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}}$.

68. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.

En los Problemas **69-90**, *simplificar. Expresar todas las respuestas en términos de exponentes positivos. Racionalizar el denominador cuando sea necesario para evitar exponentes fraccionarios en el mismo.*

69. $2x^2y^{-3}x^4$.

70. $\dfrac{2}{x^{3/2}y^{1/3}}$.

71. $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$.

72. $\{[(2x^2)^3]^{-4}\}^{-1}$.

73. $\dfrac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$.

74. $\dfrac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$.

75. $\sqrt[3]{x^2yz^3}\sqrt[3]{xy^2}$.

76. $(\sqrt[5]{2})^{10}$.

77. $3^2(27)^{-4/3}$.

78. $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$.

79. $(2x^{-1}y^2)^2$.

80. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{x}}$.

81. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$.

82. $\sqrt{75k^4}$.

83. $\dfrac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$.

84. $\sqrt{6(6)}$.

85. $\dfrac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\dfrac{x^3}{(x^3)^2}\right]^{-2}$.

86. $\sqrt{(-6)(-6)}$.

87. $-\dfrac{8s^{-2}}{2s^3}$.

88. $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

89. $(2x^2y \div 3y^3z^{-2})^2$.

90. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}x^{-2}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$.

1.6 Operaciones con expresiones algebraicas

Si se combinan números, representados con símbolos, mediante operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces se denomina al resultado una *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1

a. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consta de 3 *términos*: $+5ax^3$, $-2bx$, y $+3$. Algunos de los *factores* del primer término $5ax^3$ son 5, a, x, x^2, x^3, $5ax$, y ax^2. También, $5a$ es el *coeficiente* de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si a y b representan números invariables en todo el análisis, entonces a y b reciben el nombre de *constantes*.

A las expresiones algebraicas que constan exactamente de un término se les denomina *monomios*. A las que tienen exactamente dos términos se les denomina *binomios* y a las que constan exactamente de tres términos se les llama *trinomios*. A las expresiones algebraicas que tienen más de un término se les denomina *polinomios*. Así $2x - 5$ es un binomio; el polinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma*

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes; se tiene que $c_n \neq 0$. A n se le denomina *grado* del polinomio. Por ello, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante diferente de 0 es un polinomio de grado 0; de modo que 5 es un polinomio de grado 0. Se considera que la constante 0 es un polinomio; sin embargo no se le asigna ningún grado.

EJEMPLO 2

Simplificar $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$.

En primer lugar se eliminan los paréntesis. Después, utilizando la propiedad conmutativa de la adición, se agrupan todos los términos semejantes. *Términos semejantes* son aquéllos que sólo difieren en sus coeficientes numéricos. En este caso, $3x^2y$ y $4x^2y$ son semejantes, al igual que lo son $-2x$ y $6x$, y 1 y -3. Así,

$$\begin{aligned}&(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)\\ &= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3\\ &= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3.\end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva

$$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$$

y

$$-2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x.$$

De donde

$$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2.$$

EJEMPLO 3

Simplificar $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

Aquí se aplica la definición de sustracción y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}&(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)\\ &= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3)\end{aligned}$$

* Los tres puntos significan que se supone que los términos intermedios están incluidos en la suma.

$$
\begin{aligned}
&= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3) \\
&= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3 \\
&= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3 \\
&= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3 \\
&= -x^2y - 8x + 4.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 4

Simplificar $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$.

En primer lugar, se eliminan los símbolos de agrupamiento que se encuentran más al interior (paréntesis) utilizando la propiedad distributiva. Después se repite este proceso hasta que se eliminan todos los símbolos de agrupación, combinando términos semejantes cuando sea posible.

$$
\begin{aligned}
&3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\} \\
&= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\} \\
&= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\} \\
&= 3\{24x^2 + 26x - 15\} \\
&= 72x^2 + 78x - 45.
\end{aligned}
$$

La propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, se puede considerar que $ax + c$ es un solo número y después utilizar la propiedad distributiva.

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d.$$

Utilizando de nuevo la propiedad distributiva,

$$
\begin{aligned}
(ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd \\
&= abx^2 + (ad + cb)x + cd.
\end{aligned}
$$

Así $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$. En particular, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$
\begin{aligned}
(2x + 3)(x - 2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2) \\
&= 2x^2 - x - 6.
\end{aligned}
$$

Enseguida se presenta una lista de productos especiales que pueden obtenerse mediante la propiedad distributiva, y que sirven para multiplicar expresiones algebraicas.

Productos especiales (o notables)

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva)
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$
3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd.$
4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio)
5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio)
6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de una suma y una diferencia)
7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio)
8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio)

EJEMPLO 5

a. Por la Regla 2, $(x + 2)(x - 5) = [x + 2][x + (-5)]$

$$= x^2 + (2 - 5)x + 2(-5)$$
$$= x^2 - 3x - 10.$$

b. Por la Regla 3, $(3z + 5)(7z + 4) = 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4$

$$= 21z^2 + 47z + 20.$$

c. Mediante la Regla 5, $(x - 4)^2 = x^2 - 2(4)x + 4^2$

$$= x^2 - 8x + 16.$$

d. Por la Regla 6,

$$(\sqrt{y^2 + 1} + 3)(\sqrt{y^2 + 1} - 3) = (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 3^2$$
$$= (y^2 + 1) - 9$$
$$= y^2 - 8.$$

e. Mediante la Regla 7,

$$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3$$
$$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.$$

EJEMPLO 6

Multiplicar: $(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1)$.

Se considera a $2t - 3$ como un solo número y se aplica dos veces la propiedad distributiva.

$$(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1) = (2t - 3)5t^2 + (2t - 3)3t - (2t - 3)1$$
$$= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3$$
$$= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3.$$

En el Ejemplo 2(b) de la Sección 1.3, se mostró que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. De manera similar, $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Utilizando estos resultados, se puede dividir un polinomio entre un monomio, dividiendo cada término del polinomio entre el monomio.

EJEMPLO 7

a. $\dfrac{x^3 + 3x}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{3x}{x} = x^2 + 3.$

b. $\dfrac{4z^3 - 8z^2 + 3z - 6}{2z} = \dfrac{4z^3}{2z} - \dfrac{8z^2}{2z} + \dfrac{3z}{2z} - \dfrac{6}{2z} = 2z^2 - 4z + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{z}.$

Para dividir un polinomio entre otro, se utiliza lo que se denomina "división no abreviada" cuando el grado del divisor es menor que o igual al grado del dividendo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8

Dividir $2x^3 - 14x - 5$ entre $x - 3$.

Aquí, $2x^3 - 14x - 5$ es el *dividendo* y $x - 3$ es el *divisor*. Para evitar errores, lo mejor es escribir el dividendo como $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$. Obsérvese que las potencias de x se ordenaron en orden decreciente.

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 6x + 4 \leftarrow \text{cociente} \\
x - 3\overline{)2x^3 + 0x^2 - 14x - 5} \\
\underline{2x^3 - 6x^2} \\
6x^2 - 14x \\
\underline{6x^2 - 18x} \\
4x - 5 \\
\underline{4x - 12} \\
7 \leftarrow \text{residuo r.}
\end{array}
$$

Aquí se dividió $2x^3$ (el primer término del dividendo) entre x (el primer término del divisor) y se obtuvo $2x^2$. Después se multiplicó $2x^2$ por $x - 3$ y se obtuvo $2x^3 - 6x^2$. Después de restar esta expresión de $2x^3 + 6x^2$ se obtuvo $6x^2$ y después se "bajó" el término $-14x$. Se continuó este proceso hasta llegar a 7, el *residuo*. Siempre se detiene el procedimiento cuando el residuo es 0 o un polinomio cuyo grado es inferior al grado del divisor. La respuesta se puede escribir de la siguiente manera:

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x - 3}.$$

Esa es, la respuesta tiene la forma

$$\text{coeficiente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Una forma de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

Se debe verificar el resultado del ejemplo utilizando esta fórmula.

EJERCICIOS 1.6

Realizar las operaciones que se indican y simplificar.

1. $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$.

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$.

3. $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$.

4. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

5. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

6. $(3x + 2y - 5) - (8x - 4y + 2)$.

7. $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$.

8. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

9. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

10. $4(2z - w) - 3(w - 2z)$.

11. $3(3x + 2y - 5) - 2(8x - 4y + 2)$.

12. $(2s + t) - 3(s - 6) + 4(1 - t)$.

13. $3(x^2 + y^2) - x(y + 2x) + 2y(x + 3y)$.

14. $2 - [3 + 4(s - 3)]$.

15. $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$.

16. $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$.

17. $-3\{4x(x + 2) - 2[x^2 - (3 - x)]\}$.

18. $-\{-2[2a + 3b - 1] + 4[a - 2b] - a[2(b - 3)]\}$.

19. $(x + 4)(x + 5)$.

20. $(x + 3)(x + 2)$.

21. $(x + 3)(x - 2)$.

22. $(z - 7)(z - 3)$.

23. $(2x + 3)(5x + 2)$.

24. $(y - 4)(2y + 3)$.

25. $(x + 3)^2$.

26. $(2x - 1)^2$.

27. $(x - 5)^2$.

28. $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$.

29. $(\sqrt{2y} + 3)^2$.

30. $(y - 3)(y + 3)$.

31. $(2s - 1)(2s + 1)$.

32. $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$.

33. $(x^2 - 3)(x + 4)$.

34. $(x + 1)(x^2 + x + 3)$.

35. $(x^2 - 1)(2x^2 + 2x - 3)$.

36. $(2x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$.

37. $x\{3(x - 1)(x - 2) + 2[x\{x + 7\}]\}$.

38. $[(2z + 1)(2z - 1)](4z^2 + 1)$.

39. $(x + y + 2)(3x + 2y - 4)$.

40. $(x^2 + x + 1)^2$.

41. $(x + 5)^3$.

42. $(x - 2)^3$.

43. $(2x - 3)^3$.

44. $(x + 2y)^3$.

45. $\dfrac{z^2 - 4z}{z}$.

46. $\dfrac{2x^3 - 7x + 4}{x}$.

47. $\dfrac{6x^5 + 4x^3 - 1}{2x^2}$.

48. $\dfrac{(3x - 4) - (x + 8)}{4x}$.

49. $(x^2 + 3x - 1) \div (x + 3)$.

50. $(x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$.

51. $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) \div (x + 2)$.

52. $(x^4 + 2x^2 + 1) \div (x - 1)$.

53. $t^2 \div (t - 8)$.

54. $(4x^2 + 6x + 1) \div (2x - 1)$.

55. $(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$.

56. $(z^3 + z^2 + z) \div (z^2 - z + 1)$.

1.7 Factorización

Si se multiplican entre sí dos o más expresiones, entonces éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por tanto, si $c = ab$, entonces a y b son factores del producto c. El proceso por el cual se escribe una expresión como producto de sus factores se denomina *factorización*.

A continuación se enuncian las reglas de la factorización, la mayor parte de las cuales se obtiene a partir de los productos notables que se describieron en la Sección 1.6. El segundo miembro de cada identidad es la forma factorizada del primer miembro.

Reglas de factorización

1. $xy + xz = x(y + z)$ (factor común).
2. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.
3. $abx^2 + (ad + cb)x + cd = (ax + c)(bx + d)$.
4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
6. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (diferencia de dos cuadrados).
7. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$ (suma de dos cubos).
8. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ (diferencia de dos cubos).

Cuando se factoriza un polinomio, por lo general se eligen factores que sean también polinomios. Por ejemplo, $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. No se escribe $x - 4$ como $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$.

Siempre se debe factorizar en forma completa. Por ejemplo,

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2).$$

EJEMPLO 1

Factorizar en forma completa las expresiones.

a. $3k^2x^2 + 9k^3x$.

Dado que $3k^2x^2 = (3k^2x)(x)$ y $9k^3x = (3k^2x)(3k)$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3k^2x$. De modo que por la Regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k).$$

Obsérvese que aunque $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$, no se dice que la expresión esté completamente factorizada, pues todavía puede factorizarse $k^2x^2 + 3k^3x$.

b. $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$.

$$8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$$
$$= 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2).$$

c. $3x^2 + 6x + 3$.

$$3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1)$$
$$= 3(x + 1)^2 \qquad \text{(Regla 4).}$$

EJEMPLO 2

Factorizar completamente las expresiones.

a. $x^2 - x - 6$.

Si se factoriza este trinomio en la siguiente forma $x^2 - x - 6 = (x + a)(x + b)$, que es el producto de dos binomios, entonces deben determinarse los valores de a y b. Puesto que $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, entonces

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Igualando los coeficientes correspondientes, entonces

$$a + b = -1 \quad \text{y} \quad ab = -6.$$

Si $a = -3$ y $b = 2$, entonces se satisfacen ambas condiciones y, así,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

b. $x^2 - 7x + 12$.

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

EJEMPLO 3

Enseguida se listan expresiones completamente factorizadas. Los números en paréntesis se refieren a las reglas que se utilizaron.

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (4).

b. $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$ (3).

c. $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$ (1)

$= 3y(2y - 3)(y + 2)$ (3).

d. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ (5).

e. $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$ (1).

f. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (6)

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (6).

g. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$ (2).

h. $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = (ax^2 - ay^2) + (bx^2 - by^2)$

$= a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ (1)

$= (x^2 - y^2)(a + b)$ (1)

$= (x + y)(x - y)(a + b)$ (6).

i. $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ (8).

j. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (7), (8).

Obsérvese en el Ejemplo 3(f) que $x^2 - 1$ es factorizable, pero $x^2 + 1$ no lo es. En el Ejemplo 3(h) se factorizó utilizando el agrupamiento.

EJERCICIOS 1.7

Factorizar completamente las expresiones.

1. $6x + 4$.

2. $6y^2 - 4y$.

3. $10xy + 5xz$.

4. $3x^2y - 9x^3y^3$.

5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$.

6. $6z^2t^3 + 3zst^4 - 12z^2t^3$.

7. $x^2 - 25$.

8. $x^2 + 3x - 4$.

9. $p^2 + 4p + 3$.

10. $s^2 - 6s + 8$.

11. $16x^2 - 9$.

12. $x^2 + 5x - 24$.

13. $z^2 + 6z + 8$.

14. $4t^2 - 9s^2$.

15. $x^2 + 6x + 9$.

16. $y^2 - 15y + 50$.

17. $2x^2 + 12x + 16$.

18. $2x^2 + 7x - 15$.

19. $3x^2 - 3$.

20. $4y^2 - 8y + 3$.

21. $6y^2 + 13y + 2$.

22. $4x^2 - x - 3$.

23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$.

24. $9z^2 + 24z + 16$.

25. $x^{2/3}y - 4x^{8/3}y^3$.

26. $9x^{4/7} - 1$.

27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$.

28. $x^2y^2 - 4xy + 4$.

29. $(4x + 2)^2$.

30. $3s^2(3s - 9s^2)^2$.

31. $x^3y^2 - 10x^2y + 25x$.

32. $(3x^2 + x) + (6x + 2)$.

33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$.

34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$.

35. $(y^{10} + 8y^6 + 16y^2) - (y^8 + 8y^4 + 16)$.

36. $x^3y - xy + z^2x^2 - z^2$.

37. $x^3 + 8$.

38. $x^3 - 1$.

39. $x^6 - 1$.

40. $27 + 8x^3$.

41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$.

42. $(x + 5)^2(x + 1)^3 + (x + 5)^3(x + 1)^2$.

43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$.

44. $(x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x + 5)$.

45. $x^4 - 16$.

46. $81x^4 - y^4$.

47. $y^8 - 1$.

48. $t^4 - 4$.

49. $x^4 + x^2 - 2$.

50. $x^4 - 5x^2 + 4$.

51. $x^5 - 2x^3 + x$.

52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$.

1.8 Fracciones

Utilizando el principio fundamental de las fracciones (Sección 1.4) se pueden simplificar fracciones. Este principio permite multiplicar o dividir tanto el numerador como el denominador de una fracción, entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante equivale a la original. Se supone que las fracciones consideradas tienen denominadores diferentes de cero.

EJEMPLO 1

Simplificar.

a. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$.

En primer lugar, se factorizan completamente tanto el numerador como el denominador

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)}.$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador entre el factor común $x - 3$, se obtiene

$$\frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{1(x + 2)}{1(x - 4)} = \frac{x + 2}{x - 4}.$$

Normalmente, sólo se escribe

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x - 3)}}(x + 2)}{\underset{1}{\cancel{(x - 3)}}(x - 4)} = \frac{x + 2}{x - 4}$$

o bien

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{x + 2}{x - 4}.$$

El proceso que acaba de utilizarse comúnmente se denomina "cancelación".

b. $\dfrac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2}$.

$$\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2} = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{4(2 - x - x^2)} = \frac{2(x - 1)(x + 4)}{4(1 - x)(2 + x)}$$

$$= \frac{2(x - 1)(x + 4)}{2(2)[(-1)(x - 1)](2 + x)}$$

$$= \frac{x + 4}{-2(2 + x)} = -\frac{x + 4}{2(x + 2)}.$$

Si se desea multiplicar $\dfrac{a}{b}$ por $\dfrac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, en donde $c \neq 0$, se tiene que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

EJEMPLO 2

a. $\dfrac{x}{x+2} \cdot \dfrac{x+3}{x-5} = \dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}.$

b. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3} \cdot \dfrac{6x^2-6}{x^2+2x-8} = \dfrac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}$

$$= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}.$$

c. $\dfrac{x}{x+2} \div \dfrac{x+3}{x-5} = \dfrac{x}{x+2} \cdot \dfrac{x-5}{x+3} = \dfrac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}.$

d. $\dfrac{\frac{x-5}{x-3}}{2x} = \dfrac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \dfrac{x-5}{x-3} \cdot \dfrac{1}{2x} = \dfrac{x-5}{2x(x-3)}.$

e. $\dfrac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} = \dfrac{4x}{x^2-1} \cdot \dfrac{x-1}{2x^2+8x} = \dfrac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$

$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}.$$

En ocasiones, el denominador de una fracción tiene dos términos e implica raíces cuadradas, como $2 - \sqrt{3}$ o bien $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Se puede racionalizar el denominador multiplicando por una expresión que haga que el denominador se convierta en la diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.$$

EJEMPLO 3

Racionalizar los denominadores.

a. $$\frac{x}{\sqrt{2}-6} = \frac{x}{\sqrt{2}-6}\cdot\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}.$$

b. $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}.$$

En el Ejemplo 2(c) de la Sección 1.3, se mostró que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Es decir, si se suman dos fracciones que tienen denominador común, entonces el resultado es una fracción cuyo denominador es dicho denominador común. El numerador es la suma de los numeradores de las fracciones originales. De manera similar, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

EJEMPLO 4

a. $$\frac{p^2-5}{p-2}+\frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2} = \frac{p^2+3p-3}{p-2}.$$

b. $$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}-\frac{x^2+2x}{x^2+5x+6}$$

$$= \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)}-\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x-4}{x+3}-\frac{x}{x+3} = \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3}.$$

c. $$\frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4x+8}{x^2-9x+14}$$

$$= \frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4(x-2)}{(x-2)(x-7)}$$

$$= \frac{(x^2+x-5)-(x^2-2)+(-4)}{x-7}$$

$$= \frac{x-7}{x-7} = 1.$$

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores diferentes, se debe utilizar el principio fundamental de las fracciones para expresarlas como fracciones equiva-

lentes con el mismo denominador. Después, se procede a la adición (o a la sustracción), mediante el método antes descrito.

Por ejemplo, para evaluar

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2},$$

se puede convertir la primera fracción en otra equivalente multiplicando el numerador y el denominador por $x - 3$:

$$\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2};$$

Se puede transformar la segunda fracción multiplicando su numerador y su denominador por x^2:

$$\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}.$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador. Por tanto,

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2} = \frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2} + \frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}$$
$$= \frac{3x^2 + 2x - 6}{x^3(x-3)^2}.$$

Se pudieron haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con cualquier denominador común. Sin embargo, se decidió convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x-3)^2$. Este es el **mínimo común denominador** (M.C.D.) de las fracciones $2/[x^3(x-3)]$ y $3/[x(x-3)^2]$.

En general, para encontrar el M.C.D. de dos o más fracciones, primero se factoriza cada denominador en forma completa. *El M.C.D. es el producto de cada uno de los factores distintos que aparecen en los denominadores, cada uno de ellos elevado a la más alta potencia que ocurra en cualquiera de los denominadores.*

EJEMPLO 5

a. *Restar:* $\dfrac{t}{3t+2} - \dfrac{4}{t-1}$.

El M.C.D. es $(3t + 2)(t - 1)$.

$$\frac{t}{3t+2} - \frac{4}{t-1} = \frac{t(t-1)}{(3t+2)(t-1)} - \frac{4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$
$$= \frac{t(t-1) - 4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$
$$= \frac{t^2 - t - 12t - 8}{(3t+2)(t-1)} = \frac{t^2 - 13t - 8}{(3t+2)(t-1)}.$$

b. $\dfrac{4}{q-1} + 3 = \dfrac{4}{q-1} + \dfrac{3(q-1)}{q-1}$

$$= \frac{4 + 3(q-1)}{q-1} = \frac{3q+1}{q-1}.$$

EJEMPLO 6

$$\frac{x-2}{x^2+6x+9}-\frac{x+2}{2(x^2-9)}$$

$$=\frac{x-2}{(x+3)^2}-\frac{x+2}{2(x+3)(x-3)} \qquad [\text{M.C.D.} = 2(x+3)^2(x-3)]$$

$$=\frac{(x-2)(2)(x-3)}{(x+3)^2(2)(x-3)}-\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(x-2)(2)(x-3)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{2(x^2-5x+6)-(x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-10x+12-x^2-5x-6}{2(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-15x+6}{2(x+3)^2(x-3)}.$$

EJEMPLO 7

Simplificar $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$.

Primero combinemos las fracciones en el numerador.

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}}=\frac{-h}{x(x+h)h}=-\frac{1}{x(x+h)}.$$

También se puede simplificar la fracción original multiplicando el numerador y el denominador por el M.C.D. de las fracciones que se encuentran en el numerador (y en el denominador), es decir, $x(x+h)$:

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x(x+h)\left[\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]}{x(x+h)h}$$

$$=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)h}=\frac{-h}{x(x+h)h}=-\frac{1}{x(x+h)}.$$

175687

EJERCICIOS 1.8

En los Problemas **1-6** *simplificar*

1. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

2. $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 2x - 3}$.

3. $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + x - 20}$.

4. $\dfrac{3x^2 - 27x + 24}{2x^3 - 16x^2 + 14x}$.

5. $\dfrac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$.

6. $\dfrac{12x^2 - 19x + 4}{6x^2 - 17x + 12}$.

En los Problemas **7-48**, *ejecutar las operaciones y simplificar cuanto sea posible.*

7. $\dfrac{y^2}{y - 3} \cdot \dfrac{-1}{y + 2}$.

8. $\dfrac{z^2 - 4}{z^2 + 2z} \cdot \dfrac{z^2}{z - 2}$.

9. $\dfrac{2x - 3}{x - 2} \cdot \dfrac{2 - x}{2x + 3}$.

10. $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{y - x}$.

11. $\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x - 8} \div \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$.

12. $\dfrac{x^2 + 2x}{3x^2 - 18x + 24} \div \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$.

13. $\dfrac{\frac{x^2}{6}}{\frac{x}{3}}$.

14. $\dfrac{\frac{4x^3}{9x}}{\frac{x}{18}}$.

15. $\dfrac{\frac{2m}{n^3}}{\frac{4m}{n^2}}$.

16. $\dfrac{\frac{c + d}{c}}{\frac{c - d}{2c}}$.

17. $\dfrac{\frac{4x}{3}}{2x}$.

18. $\dfrac{\frac{4x}{3}}{\frac{3}{2x}}$.

19. $\dfrac{\frac{-9x^3}{x}}{\frac{x}{3}}$.

20. $\dfrac{\frac{-9x^3}{x}}{3}$.

21. $\dfrac{\frac{x - 5}{x^2 - 7x + 10}}{x - 2}$.

22. $\dfrac{\frac{x^2 + 6x + 9}{x}}{x + 3}$.

23. $\dfrac{\frac{10x^3}{x^2 - 1}}{\frac{5x}{x + 1}}$.

24. $\dfrac{\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}}{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}}$.

25. $\dfrac{\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 2x - 8}}{\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}}$.

26. $\dfrac{\frac{(x + 2)^2}{3x - 2}}{\frac{9x + 18}{4 - 9x^2}}$.

27. $\dfrac{\frac{4x^2 - 9}{x^2 + 3x - 4}}{\frac{2x - 3}{1 - x^2}}$.

28. $\dfrac{\frac{6x^2y + 7xy - 3y}{xy - x + 5y - 5}}{\frac{x^3y + 4x^2y}{xy - x + 4y - 4}}$.

29. $\dfrac{x^2}{x + 3} + \dfrac{5x + 6}{x + 3}$.

30. $\dfrac{2}{x + 2} + \dfrac{x}{x + 2}$.

31. $\dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{3t}$.

32. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

33. $1 - \dfrac{p^2}{p^2 - 1}$.

34. $\dfrac{4}{s + 4} + s$.

35. $\dfrac{4}{2x - 1} + \dfrac{x}{x + 3}$.

36. $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

37. $\dfrac{1}{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

38. $\dfrac{y}{3y^2 - 5y - 2} - \dfrac{2}{3y^2 - 7y + 2}$.

39. $\dfrac{4}{x - 1} - 3 + \dfrac{-3x^2}{5 - 4x - x^2}$.

40. $\dfrac{2x - 3}{2x^2 + 11x - 6} - \dfrac{3x + 1}{3x^2 + 16x - 12} + \dfrac{1}{3x - 2}$.

41. $(1 + x^{-1})^2$.

42. $(x^{-1} + y^{-1})^2$.

43. $(x^{-1} - y)^{-1}$.

44. $(x - y^{-1})^{-2}$.

45. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{3}$.

46. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{x-\dfrac{9}{x}}$.

47. $\dfrac{3-\dfrac{1}{2x}}{x+\dfrac{x}{x+2}}$.

48. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2+5x+6}-\dfrac{1}{x+2}}{3+\dfrac{x-7}{3}}$.

En los Problemas **49** *y* **50**, *realizar las operaciones que se señalan, pero no racionalizar los denominadores.*

49. $\dfrac{2}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

50. $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

En los Problemas **51-60** *simplificar y expresar la respuesta en forma que no aparezcan radicales en el denominador*

51. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

52. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.

53. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

54. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

55. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

56. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

57. $\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$.

58. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$.

59. $\dfrac{5}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}$.

60. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}\cdot\dfrac{x^2}{3}$.

CAPÍTULO 2

Ecuaciones

Aun los estudiantes que se inician en muchas áreas de estudio, se ven enfrentados pronto con la solución de ecuaciones elementales. En este capítulo, se desarrollan técnicas para llevar a cabo tal tarea. Estos métodos se aplicarán en el siguiente capítulo a algunos casos de la práctica.

2.1 Ecuaciones lineales

Una **ecuación** es un planteamiento que señala que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación se denominan **lados** o **miembros**. Se separan por un **signo de igualdad** "=".

EJEMPLO 1

Las siguientes son ecuaciones.

a. $x + 2 = 3$.

b. $x^2 + 3x + 2 = 0$.

c. $\dfrac{y}{y - 5} = 7$.

d. $w = 7 - z$.

En el Ejemplo 1, cada ecuación contiene cuando menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más utilizados para las variables son letras de la parte final del alfabeto, tales como x, y, z, w y t. Se dice que las ecuaciones (a) y (c) son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) se da en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, a los números 2 y 3 se les denomina *constantes*, y son números fijos.

Nunca se permite que una variable tenga un valor para el cual cualquier expresión de la ecuación resulte indefinida. Por lo tanto, en $y/(y - 5) = 7$, la y no puede ser 5 puesto que esto haría que el denominador fuera 0.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica. A estos valores se les denomina *soluciones* de la ecuación y se dice que la *satisfacen*. Cuando sólo se maneja una variable, a una solución también se le denomina **raíz**. Al conjunto de todas las soluciones se le denomina **conjunto solución** de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina simplemente *incógnita*. Enseguida se ilustran estos términos.

EJEMPLO 2

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. El único factor de x que satisface la ecuación es 1. Por ello, 1 es una raíz y el conjunto de soluciones es $\{1\}$.

b. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es el par de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una cantidad infinita de soluciones. ¿Puede el lector pensar en otra?

c. -2 es raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ debido a que al sustituir x por -2 la ecuación se verifica: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

Al resolver una ecuación se desea que cualquier operación que se haga sobre ella dé como resultado otra ecuación que tenga exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada. Cuando ocurre esto, se dice que las ecuaciones son **equivalentes**. Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

> 1. Sumar (o restar) el mismo polinomio* a (o de) ambos miembros de una ecuación, cuando el polinomio tiene la misma variable de la ecuación.

Por ejemplo, si $3x = 5 - 6x$, entonces sumar $6x$ a ambos lados produce la ecuación equivalente $3x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o bien $9x = 5$.

> 2. Multiplicar (o dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, exceptuando el cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces dividir ambos lados entre 10 produce la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, o bien $x = \frac{1}{2}$.

> 3. Reemplazar cualquier miembro de una ecuación por una expresión igual.

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces el reemplazo del lado izquierdo por una expresión igual, $x^2 + 2x$, produce la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

* Véase la Sección 1.6 que contiene la definición de polinomio.

Repitiendo: La aplicación de las operaciones 1 a 3 garantiza que la ecuación resultante equivale a la dada. Sin embargo, en ocasiones, al resolver una ecuación se desea utilizar operaciones diferentes a las consideradas en los cuadros 1 a 3. Estas operaciones pueden *no* necesariamente dar como resultado ecuaciones equivalentes. Dichas operaciones son:

4. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene a la variable;
5. Dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que implica la variable;
6. Elevar ambos lados de una ecuación a potencias de igual exponente.

Enseguida se ilustran estas tres últimas operaciones. Por ejemplo, por inspección se observa que la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Multiplicando ambos lados por x (operación 4) se tiene $x^2 - x = 0$, la cual se satisface si x es 0 o bien 1 (verifíquese esto mediante sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por ello, las ecuaciones no son equivalentes.

Se puede verificar que $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o bien 3. Dividiendo ambos miembros entre $x - 4$ (operación 5) se obtiene $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. De nueva cuenta, no se tiene equivalencia porque, como en este caso, se ha "perdido" una raíz. Obsérvese que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica división entre 0 la cual es una operación no válida.

Para terminar, elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) se obtiene $x^2 = 4$, la cual se verifica si $x = 2$ o bien -2. Pero -2 no es una raíz de la ecuación dada.

Del análisis anterior resulta claro que cuando se llevan a cabo las operaciones 4 a 6, se debe tener cuidado acerca de las conclusiones que se plantean para las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6 *pueden* producir una ecuación con una mayor cantidad de raíces. Por ello, se debe verificar si cada una de las "soluciones" que se obtienen de estas operaciones satisfacen la ecuación *original* o no. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menor cantidad de raíces. En este caso es posible que nunca se determine alguna raíz "perdida". Por tanto, debe evitarse la operación 5 cuando sea posible.

En resumen, se puede considerar una ecuación como un conjunto de restricciones impuestas a cualquiera de las variables de la misma. Las operaciones 4 a 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, produciendo soluciones diferentes a las de la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1 a 3 nunca afectan a las restricciones.

Ahora se mostrará en la solución de una *ecuación lineal* cómo utilizar los principios que se han presentado hasta este punto.

DEFINICIÓN

Una ***ecuación lineal*** *en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma*

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

A las ecuaciones lineales se les denomina también *ecuaciones de primer grado* o *ecuaciones de grado 1*, puesto que la mayor potencia que ocurre en la variable de la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal, se llevan a cabo operaciones hasta que se llega a una ecuación equivalente cuyas soluciones son *evidentes*. Esto significa una ecuación en la cual la variable se encuentra sola en un miembro, como en los ejemplos que se presentan enseguida.

EJEMPLO 3

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Se comienza haciendo que los términos que implican a x se encuentren en un lado y las constantes en el otro.

$$5x - 6 = 3x,$$

$$5x - 6 + (-3x) = 3x + (-3x) \quad \text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros)},$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{(simplificando, es decir, operación 3)},$$

$$2x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad \text{(sumando 6 a ambos lados)},$$

$$2x = 6 \quad \text{(simplificando)},$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{(dividiendo ambos lados entre 2)},$$

$$x = 3.$$

Resulta claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Dado que cada ecuación es equivalente a la que le antecede, se concluye que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Es decir, el conjunto solución es $\{3\}$. Se puede describir el primer paso de la solución diciendo que se pasa un término de un miembro de la ecuación al otro, al tiempo que se le cambia de signo; es común que se denomine a esto *transposición*. Obsérvese que como la ecuación original puede ponerse en la forma $2x + (-6) = 0$, es así una ecuación lineal.

EJEMPLO 4

Resolver $2(p + 4) = 7p + 2$.

En primer lugar se eliminan los paréntesis.

$$2(p + 4) = 7p + 2,$$

$$2p + 8 = 7p + 2 \quad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$2p = 7p - 6 \quad \text{(se resta 8 de ambos lados)},$$

$$-5p = -6 \quad \text{(se resta } 7p \text{ de ambos miembros)},$$

$$p = \frac{-6}{-5} \quad \text{(se dividen ambos lados entre } -5),$$

$$p = \frac{6}{5}.$$

EJEMPLO 5

Resolver $\dfrac{7x + 3}{2} - \dfrac{9x - 8}{4} = 6.$

En primer lugar, se eliminan las fracciones multiplicando *ambos* lados por el mínimo común denominador (M.C.D.)*, que es 4.

$$4\left(\frac{7x + 3}{2} - \frac{9x - 8}{4}\right) = 4(6),$$

$$4 \cdot \frac{7x + 3}{2} - 4 \cdot \frac{9x - 8}{4} = 24 \quad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$2(7x + 3) - (9x - 8) = 24 \quad \text{(se simplifica)},$$

$$14x + 6 - 9x + 8 = 24 \quad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$5x + 14 = 24 \quad \text{(se simplifica)},$$

$$5x = 10 \quad \text{(se resta 14 de ambos lados)},$$

$$x = 2. \quad \text{(se dividen ambos miembros entre 5)}.$$

Cada una de las ecuaciones de los Ejemplos 3 a 5 tiene una y sólo una raíz. Esto es característico de todas las ecuaciones lineales en una variable.

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes se representan por letras se denominan **ecuaciones literales**. Por ejemplo, en la ecuación literal $x + a = 4b$ se considera que a y b son constantes no especificadas. Las fórmulas, como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse ecuaciones literales. Si se desea expresar una letra específica de una fórmula en términos de las otras, a dicha letra se le considera la incógnita.

EJEMPLO 6

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I que se obtiene sobre un capital P, a la tasa anual de interés r por un período de t años. Expresar r en términos de I, P y t.*

Aquí se considera que r es la incógnita. Para separar r se dividen ambos lados entre Pt.

$$I = Prt,$$

$$\frac{I}{Pt} = \frac{Prt}{Pt},$$

$$\frac{I}{Pt} = r \quad \text{o bien} \quad r = \frac{I}{Pt}.$$

* El *mínimo común denominador* de dos o más fracciones es el menor número que tiene a todos los denominadores como factores. Es decir, el M.C.D. es el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de todos los denominadores.

Cuando se dividen ambos miembros entre Pt, se supone que $Pt \neq 0$, porque no se puede dividir entre cero. En la resolución de otras ecuaciones literales se hacen las mismas suposiciones.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital P a una tasa anual de interés simple r por un periodo de t años. Despejar P.*

$$S = P + Prt,$$

$$S = P(1 + rt) \qquad \text{(se factoriza)}$$

$$\frac{S}{1 + rt} = P \qquad \text{(se dividen ambos lados entre } 1 + rt\text{)}.$$

c. *Despejar x en $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$.*

En primer lugar se simplifica la ecuación y después se colocan en un mismo lado todos los términos que implican a la x.

$$(a + c)x + x^2 = (x + a)^2,$$

$$ax + cx + x^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$ax + cx = 2ax + a^2,$$

$$cx - ax = a^2,$$

$$x(c - a) = a^2,$$

$$x = \frac{a^2}{c - a}.$$

EJERCICIOS 2.1

En los Problemas **1-6**, *determinar por sustitución cuál de los números dados satisface la ecuación dada, si es que alguno lo hace.*

1. $9x - x^2 = 0$; $1, 0$.

2. $20 - 9x = -x^2$; $5, 4$.

3. $y + 2(y - 3) = 4$; $\frac{10}{3}, 1$.

4. $2x + x^2 - 8 = 0$; $2, -4$.

5. $x(7 + x) - 2(x + 1) - 3x = -2$; -3.

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0$; $0, -1, 2$.

En los Problemas **7-16** *determinar qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Especificar si las operaciones* ***garantizan*** *o no que las ecuaciones son equivalentes. No resuelva las ecuaciones.*

7. $x - 5 = 4x + 10$; $x = 4x + 15$.

8. $8x - 4 = 16$; $x - \frac{1}{2} = 2$.

9. $x = 4$; $x^2 = 16$.

10. $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9$; $x^2 + 6 = 2x - 18$.

11. $x^2 - 2x = 0$; $x - 2 = 0$.

12. $\dfrac{2}{x - 2} + x = x^2$; $2 + x(x - 2) = x^2(x - 2)$.

13. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 3$; $x^2 - 1 = 3(x - 1)$.

14. $x(x + 5)(x + 9) = x(x + 1)$; $(x + 5)(x + 9) = x + 1$.

15. $\dfrac{x(x + 1)}{x - 5} = x(x + 9)$; $x + 1 = (x + 9)(x - 5)$. **16.** $2x^2 - 9 = x$; $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{9}{2}$.

En los Problemas **17-46**, *resolver las ecuaciones.*

17. $4x = 10$.

18. $0.2x = 5$.

19. $3y = 0$.

20. $2x - 4x = -5$.

21. $-5x = 10 - 15$.

22. $3 - 2x = 4$.

23. $5x - 3 = 9$.

24. $\sqrt{2}\,x + 3 = 8$.

25. $7x + 7 = 2(x + 1)$.

26. $6z + 5z - 3 = 41$.

27. $2(p - 1) - 3(p - 4) = 4p$.

28. $t = 2 - 2[2t - 3(1 - t)]$.

29. $\dfrac{x}{5} = 2x - 6$.

30. $\dfrac{5y}{7} - \dfrac{6}{7} = 2 - 4y$.

31. $5 + \dfrac{4x}{9} = \dfrac{x}{2}$.

32. $\dfrac{x}{3} - 4 = \dfrac{x}{5}$.

33. $q = \dfrac{3}{2}q - 4$.

34. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 7$.

35. $3x + \dfrac{x}{5} - 5 = \dfrac{1}{5} + 5x$.

36. $y - \dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{y}{5}$.

37. $\dfrac{2y - 3}{4} = \dfrac{6y + 7}{3}$.

38. $\dfrac{p}{3} + \dfrac{3}{4}p = \dfrac{9}{2}(p - 1)$.

39. $w + \dfrac{w}{2} - \dfrac{w}{3} + \dfrac{w}{4} = 5$.

40. $\dfrac{7 + 2(x + 1)}{3} = \dfrac{8x}{5}$.

41. $\dfrac{x + 2}{3} - \dfrac{2 - x}{6} = x - 2$.

42. $\dfrac{x}{5} + \dfrac{2(x - 4)}{10} = 7$.

43. $\dfrac{9}{5}(3 - x) = \dfrac{3}{4}(x - 3)$.

44. $\dfrac{2y - 7}{3} + \dfrac{8y - 9}{14} = \dfrac{3y - 5}{21}$.

45. $\dfrac{3}{2}(4x - 3) = 2[x - (4x - 3)]$.

46. $(3x - 1)^2 - (5x - 3)^2 = -(4x - 2)^2$.

En los Problemas **47-54**, *expresar el símbolo que se indica en términos de los símbolos restantes.*

47. $I = Prt$; P.

48. $ax + b = 0$; x.

49. $p = 8q - 1$; q.

50. $p = -3q + 6$; q.

51. $S = P(1 + rt)$; r.

52. $r = \dfrac{2ml}{B(n + 1)}$; m.

53. $S = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$; a_1.

54. $S = \dfrac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$; R.

55. Si se compra un artículo para utilizarlo en un negocio, al elaborar la declaración del impuesto sobre la renta se puede repartir su costo sobre toda su vida útil. A esto se le denomina *depreciación*. Un método de evaluar esta cantidad es la *depreciación en línea recta*, en la cual se calcula la depreciación anual dividiendo el costo del artículo, menos su valor estimado de desecho, entre su vida útil. Supóngase que el costo es C, la vida útil es N (años) y no hay valor de desecho. Entonces, el valor V del artículo al final de n años está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Supóngase que se adquieren \$1 600 (dólares) de muebles nuevos para oficina, que tienen una vida útil de 8 años y que carecen de valor de desecho. ¿Después de cuántos años valdrán \$1 000?

56. Cuando se utiliza radar en una carretera para determinar la velocidad de un automóvil, se envía un haz de ondas para que se refleje en el automóvil que transita. La diferencia F (en ciclos por segundo) en la frecuencia entre el haz original emitido y el reflejado está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8},$$

en donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora (mi/h) y f es la frecuencia del haz radioeléctrico original (en megaciclos por segundo).

Supóngase que un conductor maneja en una carretera que tiene límite de velocidad de 55 mi/h. Un policía dirige un haz de radar, cuya frecuencia es de 2 450 (megaciclos por segundo) al automóvil, y observa que la diferencia en frecuencia es de 420 (ciclos por segundo) ¿Puede suponer el policía que el conductor está rebasando el límite de velocidad?

57. Para estudiar la relación entre depredador y presa, se llevó a cabo un experimento* en el cual un sujeto con los ojos tapados, el "depredador", permanecía de pie frente a una mesa de 3 pies cuadrados en la cual se habían colocado discos uniformes de lija, la "presa". Durante un minuto, el "depredador" buscó los discos tocando con un dedo. En los casos en los que encontraba un disco, se eliminaba éste y la búsqueda continuaba. El experimento se repitió con diversas densidades (número de discos por 9 pies cuadrados). Si y es el número de discos encontrados en un minuto cuando se encontraban x objetos de éstos en la mesa, se estima que

$$y = a(1 - by)x,$$

en donde a y b son constantes. Despeje y de esta ecuación.

2.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Algunas ecuaciones que no son lineales carecen de solución. En este caso, se dice que el conjunto solución es el *conjunto vacío* o *conjunto nulo*, el cual se denota mediante $\{\ \}$ o $\emptyset$. Los siguientes ejemplos ilustran que resolver ecuaciones no lineales puede conducir a ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{6}{x-3}$.

A esta ecuación se le denomina *ecuación fraccional* debido a que la incógnita se encuentra en el denominador. Para resolverla, primero se le escribe en forma que no tenga fracciones. Multiplicando ambos lados por el M.C.D., $(x-4)(x-3)$, se tiene

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right),$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \qquad \text{[ecuación lineal]},$$

$$5x - 15 = 6x - 24,$$

$$9 = x.$$

En el primer paso, se multiplicó cada uno de los lados por una expresión que implicaba la *variable* x. Como se mencionó en la Sección 2.1, esto significa que no se garantiza que la última ecuación equivale a la ecuación *original*. Por consiguiente, debe verificarse si el número 9 satisface la ecuación *original*. Si se sustituye x por 9 en esa ecuación, el lado izquierdo se convierte en

$$\frac{5}{9-4} = \frac{5}{5} = 1$$

* C.S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XGI, no. 7 (1959), 385-98.

175687

y el lado derecho es

$$\frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Dado que ambos miembros son iguales, 9 es una raíz.

b. $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}.$

Como $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$, el M.C.D es $(x + 2)(x - 4)$. Multiplicando ambos lados por el M.C.D., se tiene

$$\begin{aligned}
(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) &= 12,\\
3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) &= 12,\\
3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 &= 12,\\
-9x - 6 &= 12,\\
-9x &= 18,\\
x &= -2.
\end{aligned}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no se puede dividir entre 0), y por ello, no existen raíces. El conjunto solución es $\varnothing$.

c. $\dfrac{4}{x-5} = 0.$

La única forma en que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0 y el denominador es diferente de 0. Dado que el numerador, 4, nunca puede ser cero, el conjunto solución es $\varnothing$.

EJEMPLO 2

Resolver $\sqrt{x^2 + 33} - x = 3.$

A esta ecuación se le denomina *ecuación radical*, puesto que aparece una variable en el radicando. Para resolverla, se elevan ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza equivalencia y, por ello, se deben verificar cualesquiera "soluciones" resultantes. Se comienza aislando el radical en un lado.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 33} &= x + 3,\\
x^2 + 33 &= (x+3)^2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)},\\
x^2 + 33 &= x^2 + 6x + 9,\\
24 &= 6x,\\
4 &= x.
\end{aligned}$$

Se debe estar en posibilidades de probar, mediante sustitución, que 4 es en realidad una raíz.

Es posible que en ocasiones sea necesario elevar ambos lados de una ecuación radical a la misma potencia más de una vez, como se muestra en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Resolver $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

Cuando una ecuación tiene dos términos que contienen radicales, en primer lugar se escribe una ecuación de manera que, de ser posible, se encuentre un radical en cada uno de sus miembros.

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3,$$

$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)},$$

$$6\sqrt{y} = 12,$$

$$\sqrt{y} = 2,$$

$$y = 4 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)}.$$

Sustituyendo 4 en el primer miembro de la ecuación *original* se obtiene $\sqrt{1} - \sqrt{4}$, que es -1. Puesto que esto no es igual al segundo miembro, -3, no existe solución. Es decir, el conjunto solución es $\varnothing$.

EJERCICIOS 2.2

En los Problemas **1-34** *resolver las ecuaciones.*

1. $\frac{5}{x} = 25.$

2. $\frac{4}{x-1} = 2.$

3. $\frac{3}{7-x} = 0.$

4. $\frac{5x-2}{x+1} = 0.$

5. $\frac{4}{8-x} = \frac{3}{4}.$

6. $\frac{x+3}{x} = \frac{2}{5}.$

7. $\frac{q}{3q-4} = 3.$

8. $\frac{4p}{7-p} = 1.$

9. $\frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-2}.$

10. $\frac{2x-3}{4x-5} = 6.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

12. $\frac{4}{t-3} = \frac{3}{t-4}.$

13. $\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{3x-1}{2x+1}.$

14. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{2-x} = 0.$

15. $\frac{y-6}{y} - \frac{6}{y} = \frac{y+6}{y-6}.$

16. $\frac{y-3}{y+3} = \frac{y-3}{y+2}.$

17. $\frac{-4}{x-1} = \frac{7}{2-x} + \frac{3}{x+1}.$

18. $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{1-2x}.$

19. $\frac{9}{x-3} = \frac{3x}{x-3}.$

20. $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{3x-4}{x^2-9}.$

21. $\sqrt{x+6} = 3.$

22. $\sqrt{z-2} = 3.$

23. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0.$

24. $6 - \sqrt{2x+5} = 0.$

25. $\sqrt{\frac{x}{2} + 1} = \frac{2}{3}.$

26. $(x+6)^{1/2} = 7.$

27. $\sqrt{4x-6} = \sqrt{x}.$

28. $\sqrt{7-2x} = \sqrt{x-1}.$

29. $(x-3)^{3/2} = 8.$

30. $\sqrt{y^2-9} = 9 - y.$

31. $\sqrt{y} + \sqrt{y+2} = 3.$ **32.** $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1.$ **33.** $\sqrt{z^2 + 2z} = 3 + z.$

34. $\sqrt{\frac{1}{w}} - \sqrt{\frac{2}{5w-2}} = 0.$

En los Problemas **35-38** *expresar la letra que se señala en términos de las restantes.*

35. $r = \frac{d}{1 - dt}$; $d.$ **36.** $\frac{x-a}{b-x} = \frac{x-b}{a-x}$; $x.$ **37.** $r = \frac{2ml}{B(n+1)}$; $n.$

38. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$; $q.$

39. En cierta reserva ecológica, el número y de presas que un depredador consume en cierto intervalo de tiempo está dado por

$$y = \frac{10x}{1 + 0.1x},$$

en donde x es la *densidad de presas* (número de presas por unidad de área). ¿Qué densidad permitiría a un depredador sobrevivir si necesita consumir 50 presas en el periodo dado?

40. La policía ha utilizado la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, si derrapa d pies cuando se detiene. La cantidad f es el coeficiente de fricción determinado por la clase de camino (como concreto, asfalto, grava o alquitrán); f depende también de si el camino está seco o mojado. En la tabla que aparece enseguida se proporcionan algunos valores del coeficiente f. ¿A 40 millas por hora, más o menos en qué distancia derraparía un automóvil en un camino seco de concreto? Proporcione la respuesta redondeando el valor en pies.

	Concreto	**Alquitrán**
Mojado	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

2.3 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender a resolver problemas más complicados, se explicarán ahora métodos para la resolución de *ecuaciones cuadráticas*.

DEFINICIÓN

Una ***ecuación cuadrática*** *en la variable x es una ecuación que puede escribirse de la siguiente forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

A una ecuación cuadrática se le denomina también *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado 2*, puesto que la más alta potencia de la variable que aparece es la segunda. Mientras que las ecuaciones lineales tienen sólo una raíz, algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos raíces distintas.

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización de $ax^2 + bx + c$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + x - 12 = 0.$

Es fácil factorizar el primer miembro:

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Considérese esto como dos cantidades, $x - 3$ y $x + 4$, cuyo producto es cero. **Para que el producto de dos o más cantidades sea cero, cuando menos una de ellas *debe* ser cero.** Esto significa que o bien $x - 3 = 0$ o bien $x + 4 = 0$. Resolviendo éstas se obtiene $x = 3$ y $x = -4$. Las raíces son 3 y -4 y el conjunto solución es $\{3, -4\}$.

b. $6w^2 = 5w$.

No se dividen ambos lados entre w (una variable) puesto que no está garantizada la equivalencia y se puede "perder" una raíz. En cambio, se escribe la ecuación de la siguiente manera

$$6w^2 - 5w = 0.$$

Factorizando queda

$$w(6w - 5) = 0.$$

Igualando cada uno de los factores a 0,

$$w = 0 \qquad \text{y} \qquad 6w - 5 = 0.$$

Por consiguiente, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Obsérvese que si se hubieran dividido ambos lados de $6w^2 = 5w$ entre w, se habría obtenido $6w = 5$, y la única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Es decir, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma la mención que se hizo de la operación 5 en la Sección 2.1.

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse mediante factorización, como se muestra en el Ejemplo 2.

EJEMPLO 2

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $4x - 4x^3 = 0$.

A ésta se le denomina *ecuación de tercer grado*.

$$4x - 4x^3 = 0,$$
$$4x(1 - x^2) = 0,$$
$$4x(1 - x)(1 + x) = 0.$$

Igualando a 0 cada uno de los factores se obtiene $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. En consecuencia,

$$x = 0, 1, -1,$$

que se puede escribir como $x = 0, \pm 1$.

b. $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0.$

Como el factor $x(x + 2)^2$ es común a ambos términos del lado izquierdo, se tiene

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0,$$

$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0.$$

Por ello, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de donde se concluye que $x = 0$, -2, $-\frac{7}{2}$.

EJEMPLO 3

Resolver $(3x - 4)(x + 1) = -2$.

ADVERTENCIA
Se deben abordar con precaución los problemas de este tipo. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es cierto que cuando menos una de las cantidades deba ser igual a -2. ¿Por qué? No se debe igualar cada uno de los factores a -2; hacerlo no arroja soluciones para la ecuación dada.

En primer lugar, se multiplican los factores del lado izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2.$$

Reescribiendo, de manera que aparezca el 0 en un lado, se tiene

$$3x^2 - x - 2 = 0.$$

Factorizando queda

$$(3x + 2)(x - 1) = 0.$$

Por lo tanto

$$x = -\tfrac{2}{3}, 1.$$

EJEMPLO 4

Resolver $\dfrac{y + 1}{y + 3} + \dfrac{y + 5}{y - 2} = \dfrac{7(2y + 1)}{y^2 + y - 6}$. (1)

Multiplicando ambos miembros por el M.C.D. $(y + 3)(y - 2)$, resulta

$$(y - 2)(y + 1) + (y + 3)(y + 5) = 7(2y + 1). \quad (2)$$

Como se multiplicó la Ecuación (1) por una expresión que implicaba la variable y, se debe recordar (de la Sección 2.1) que la Ecuación (2) no necesariamente es equivalente a la (1). Después de simplificar la Ecuación (2), se tiene que

$$2y^2 - 7y + 6 = 0,$$

$$(2y - 3)(y - 2) = 0.$$

Así, $\frac{3}{2}$ y 2 son raíces *posibles* de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la Ecuación (1), puesto que la sustitución conduce a un denominador 0. Sin embargo, se debe verificar que $\frac{3}{2}$ satisface la ecuación *original*. Por consiguiente, su única raíz es $\frac{3}{2}$.

EJEMPLO 5

Resolver $x^2 = 3$.

Esta ecuación es equivalente a

$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, se obtiene

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por lo tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$. Las raíces son $\pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$ es $u^2 = k$. De la misma manera que antes, se puede demostrar que:

> Si $u^2 = k$, entonces $u = \pm\sqrt{k}$.

Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización puede resultar bastante difícil, como puede verse al intentar aplicar este método a la ecuación $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$. Sin embargo, existe una fórmula a la que se denomina *fórmula cuadrática,** que da las raíces de cualquier expresión cuadrática:

> **Fórmula cuadrática**
>
> Si $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, entonces
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
>
> Estos valores de x son las raíces de la ecuación cuadrática que aparece en primer término.

EJEMPLO 6

Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}.$$

* En la Sección 2.4 aparece, como complemento, la deducción de la fórmula cuadrática.

Las raíces son $\frac{17 + 7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $\frac{17 - 7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

EJEMPLO 7

Resolver $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Obsérvese la disposición de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$ y $c = 2$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}.$$

Así que $y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ o bien $y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$. Por lo tanto, la única raíz es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

EJEMPLO 8

Resolver $z^2 + z + 1 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Ahora bien, $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe un número real como éste, puesto que el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo. Por ello, la ecuación no tiene raíces reales.*

ADVERTENCIA

Es necesario asegurarse de utilizar en forma correcta la fórmula cuadrática.

$$x \neq -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De lo que se vio en los Ejemplos 6-8 puede apreciarse que una ecuación cuadrática tiene o dos raíces reales diferentes, exactamente una raíz real, o ninguna raíz real, dependiendo de si $b^2 - 4ac$ es > 0, $= 0$, o bien < 0.

EJERCICIOS 2.3

En los Problemas **1-30**, *resolver mediante factorización.*

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$. **2.** $t^2 + 3t + 2 = 0$. **3.** $y^2 - 7y + 12 = 0$.

* $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, en donde $i\ (= \sqrt{-1})$ se denomina la unidad imaginaria.

4. $x^2 + x - 12 = 0$.
5. $x^2 - 2x - 3 = 0$.
6. $x^2 - 16 = 0$.
7. $x^2 - 12x = -36$.
8. $3w^2 - 12w + 12 = 0$.
9. $x^2 - 4 = 0$.
10. $2x^2 + 4x = 0$.
11. $z^2 - 8z = 0$.
12. $x^2 + 9x = -14$.
13. $4x^2 + 1 = 4x$.
14. $2z^2 + 7z = 4$.
15. $y(2y + 3) = 5$.
16. $8 + 2x - 3x^2 = 0$.
17. $-x^2 + 3x + 10 = 0$.
18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y$.
19. $2p^2 = 3p$.
20. $-r^2 - r + 12 = 0$.
21. $x(x - 1)(x + 2) = 0$.
22. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0$.
23. $x^3 - 64x = 0$.
24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$.
25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$.
26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0$.
27. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0$.
28. $3(x^2 + 2x - 8)(x - 5) = 0$.
29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0$.
30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

En los Problemas **31-44**, *encontrar todas las raíces reales utilizando la fórmula cuadrática.*

31. $x^2 + 2x - 24 = 0$.
32. $x^2 - 2x - 15 = 0$.
33. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
34. $p^2 + 2p = 0$.
35. $p^2 - 5p + 3 = 0$.
36. $2 - 2x + x^2 = 0$.
37. $4 - 2n + n^2 = 0$.
38. $2x^2 + x = 5$.
39. $6x^2 + 7x - 5 = 0$.
40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0$.
41. $2x^2 - 3x = 20$.
42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$.
43. $2x^2 + 4x = 5$.
44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0$.

En los Problemas **45-66**, *resolver utilizando cualquier método.*

45. $x^2 = \dfrac{x + 3}{2}$.
46. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{6}{x} - 1$.
47. $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{x - 3}{x} = 2$.
48. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{6}{2x + 1} = 5$.
49. $\dfrac{6x + 7}{2x + 1} - \dfrac{6x + 1}{2x} = 1$.
50. $\dfrac{6(w + 1)}{2 - w} + \dfrac{w}{w - 1} = 3$.
51. $\dfrac{2}{r - 2} - \dfrac{r + 1}{r + 4} = 0$.
52. $\dfrac{2x - 3}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1} = 1$.
53. $\dfrac{y + 1}{y + 3} + \dfrac{y + 5}{y - 2} = \dfrac{14y + 7}{y^2 + y - 6}$.
54. $\dfrac{3}{t + 1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t + 2}$.
55. $\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x - 1)} = \dfrac{2}{x^2}$.
56. $5 - \dfrac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \dfrac{1 - x}{x}$.
57. $\sqrt{x + 2} = x - 4$.
58. $3\sqrt{x + 4} = x - 6$.
59. $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}$.
60. $x + \sqrt{x} - 2 = 0$.
61. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{2x} - 1 = 0$.
62. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0$.
63. $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0$.
64. $\sqrt{y - 2} + 2 = \sqrt{2y + 3}$.
65. $\sqrt{x + 5} + 1 = 2\sqrt{x}$.
66. $\sqrt{\sqrt{x + 2}} = \sqrt{2x - 4}$.

67. En la página 354 del libro *Economics*, de Samuelson,* se establece que una de las raíces de la ecuación

$$\overline{M} = \frac{Q(Q + 10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifique esto utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q representa el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de la oferta monetaria.

68. Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales que se produjeron sobre ratas a las que se alimentó con una dieta que contenía 10% de proteí-

* De Paul A. Samuelson, *Economics*. 10a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1976).

na.* La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Cambiando el porcentaje P (expresado como decimal) de yema en la mezcla de proteína, el grupo calculó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) de una rata en un cierto periodo estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20.$$

¿Qué porcentaje de yema produjo un aumento promedio de peso de 70 gramos?

69. Existen diversas reglas para determinar una dosis medicinal para niños cuando se ha especificado la dosis para adultos. Dichas reglas pueden estar basadas en el peso, la estatura, o en otras cantidades. Si A = edad del niño, d = dosis para adultos, y c = dosis infantil, existen entonces dos reglas.

Regla de Young: $c = \dfrac{A}{A + 12}d.$

Regla de Cowling: $c = \dfrac{A + 1}{24}d.$

¿A qué edad son iguales las dosis de los niños bajo ambas reglas? Redondee su respuesta al año más cercano.

70. En el análisis del precio de un artículo ofrecido por un fabricante a sus clientes, DeCanio† llega a y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas:

1. $(2n - 1)v^2 - 2nv + 1 = 0,$

2. $nv^2 - (2n + 1)v + 1 = 0,$

en donde $n > 0$.

(a) Despejar v en la primera ecuación.
(b) Despejar v en la segunda ecuación, si ≤ 2.

2.4 Complemento

A continuación se presenta la deducción de la fórmula cuadrática.

Considérese que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado. Puesto que $a \neq 0$, se puede dividir ambos lados entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Si se suma $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

entonces, el lado izquierdo se factoriza para convertirse en $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ y el lado derecho se simplifica en $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Por consiguiente,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

* Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R.I. Mateles y S.R. Tannenbaum, (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

† S.J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *The Quarterly Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-49.

Esta ecuación tiene la forma $u^2 = k$, en donde $u = x + \frac{b}{2a}$ y $k = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Por el Ejemplo 5 de la Sección 2.3 se tiene que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Despejando x se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En resumen, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la **fórmula cuadrática:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 2.1 ecuación miembro (lado) de la ecuación variable raíz de la ecuación conjunto solución ecuaciones equivalentes ecuación lineal (de primer grado) ecuación literal

Sección 2.2 conjunto vacío, $\varnothing$ ecuación fraccional ecuación radical

Sección 2.3 ecuación cuadrática (de segundo grado) fórmula cuadrática

RESUMEN

Cuando se resuelve una ecuación se pueden aplicar reglas que producen ecuaciones equivalentes, es decir, ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada. Estas reglas incluyen sumar (o restar) el mismo número a (de) ambos lados, así como multiplicar (o dividir) ambos lados por (entre) la misma constante, excepto 0.

Una ecuación lineal (en x) es de primer grado y tiene la forma $ax + b = 0$, en donde $a \neq 0$. Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz. Para resolver una ecuación lineal, se le aplican operaciones hasta que se obtiene una ecuación equivalente en la que se ha aislado la incógnita en un lado.

Una ecuación cuadrática (en x) es de segundo grado y tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$. Tiene dos raíces reales diferentes, exactamente una raíz, o ninguna raíz real. Se puede resolver una ecuación cuadrática mediante factorización o con la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando se resuelve una ecuación fraccional o una ecuación radical, es frecuente aplicarle operaciones que no garantizan que la ecuación resultante equivale a la original. Estas operaciones incluyen multiplicar ambos lados por una expresión que contenga la variable y elevar ambos miembros a la misma potencia. En estos casos, se deben verificar todas las soluciones obtenidas al final de estos procedimientos sustituyéndolas en la ecuación dada.

175687

PROBLEMAS DE REPASO

Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $4 - 3x = 2 + 5x$.

2. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}x$.

3. $3[2 - 4(1 + x)] = 5 - 3(3 - x)$.

4. $3(x + 4)^2 + 6x = 3x^2 + 7$.

5. $2 - w = 3 + w$.

6. $x = 2x$.

7. $x = 2x - (7 + x)$.

8. $3x - 8 = 4(x - 2)$.

9. $2(4 - \frac{3}{8}p) = 5$.

10. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}$.

11. $\dfrac{3x - 1}{x + 4} = 0$.

12. $\dfrac{5}{p + 3} - \dfrac{2}{p + 3} = 0$.

13. $\dfrac{2x}{x - 3} - \dfrac{x + 1}{x + 2} = 1$.

14. $\dfrac{t + 3t + 4}{7 - t} = 14$.

15. $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

16. $x^2 - 2x - 2 = 0$.

17. $5q^2 = 7q$.

18. $2x^2 - x = 0$.

19. $x^2 - 10x + 25 = 0$.

20. $r^2 + 10r - 25 = 0$.

21. $3x^2 - 5 = 0$.

22. $x(x - 9) = 0$.

23. $(8t - 5)(2t + 6) = 0$.

24. $2(x^2 - 1) + 2x = x^2 - 6x + 1$.

25. $-3x^2 + 5x - 1 = 0$.

26. $y^2 = 6$.

27. $x(x^2 - 9) = 4(x^2 - 9)$.

28. $4x^2(x - 5) - 9(x - 5) = 0$.

29. $\dfrac{6w + 7}{2w + 1} - \dfrac{6w + 1}{2w} = 1$.

30. $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x + 2} = 0$.

31. $\dfrac{2}{x^2 - 9} - \dfrac{3x}{x + 3} = \dfrac{1}{x - 3}$.

32. $\dfrac{3}{x^2 - 4} + \dfrac{2}{x^2 + 4x + 4} - \dfrac{4}{x + 2} = 0$.

33. $\sqrt{2x + 5} = 5$.

34. $\sqrt{3x - 4} = \sqrt{2x + 5}$.

35. $\sqrt[3]{11x + 9} = 4$.

36. $\sqrt{x^2 + 5x + 25} = x + 4$.

37. $\sqrt{y} + 6 = 5$.

38. $\sqrt{z^2 + 9} = 5$.

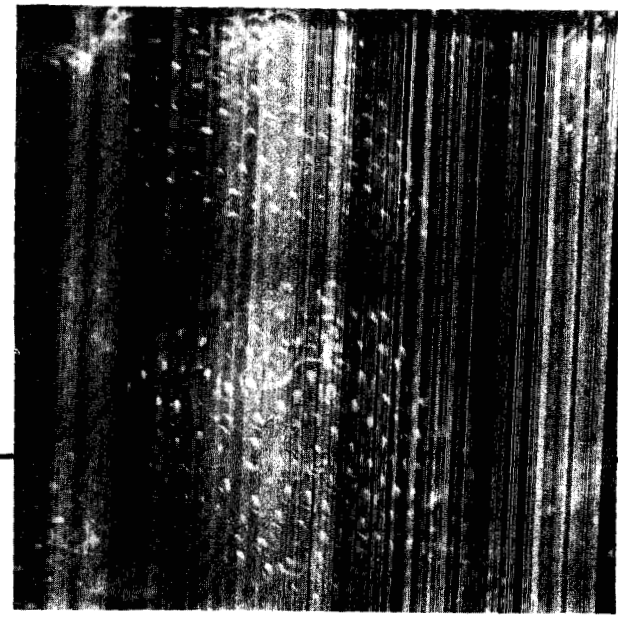
39. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 6} = 7$.

40. $\sqrt{2x + 1} = x - 7$.

41. $x + 2 = 2\sqrt{4x - 7}$.

42. $\sqrt{3z} - \sqrt{5z + 1} + 1 = 0$.

APLICACIÓN PRÁCTICA



Crecimiento real de una inversión*

Cuando se habla del crecimiento real de una inversión, se hace referencia al crecimiento de su poder de compra, es decir, al crecimiento de la cantidad de bienes que esa inversión puede comprar. El crecimiento real depende de la influencia tanto del interés como de la inflación. El interés aumenta el valor de la inversión, en tanto que la inflación reduce su crecimiento, ya que suben los precios y, por lo tanto, disminuye el poder de compra. Por lo general, la tasa de crecimiento real no es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de inflación, sino que queda descrita mediante una fórmula diferente de la que se denomina "efecto de Fisher".
Se puede comprender el efecto de Fisher examinando cuidadosamente la pregunta planteada por Edward P. Foldessy en *Wall Street Journal*, (27 de mayo, 1986)(pág. 37):

> Para el año que termina en mayo de 1986, la tasa anual de interés fue de 11%, y la tasa anual de inflación, de 3.6%. En estas condiciones, ¿cuál fue la tasa real de crecimiento anual?

Se podría pensar que la respuesta se obtiene simplemente restando los porcentajes: $11\% - 3.6\% = 7.4\%$. Sin embargo, la respuesta no es 7.4%.

Supóngase que se analiza la situación en términos más específicos. Se considera como producto o mercancía fresas que se venden a \$1.00 dólar la libra, y que debido a la inflación, ese precio aumenta con la tasa de 3.6% anual. De junio de 1985 a junio de 1986, el citado precio aumentó de \$1.00 a

$$\$1.00 + (3.6\% \text{ de } \$1.00) = \$1.036.$$

Por otro lado, considerando \$100 invertidos en junio de 1985 a una tasa anual de interés de 15%, el interés obtenido en junio de 1986 fue de (\$100)(0.11), por lo que el monto acumulado es

$$\$100 + \$100(0.11) = \$111.$$

* Adaptado de Yves Nievergelt, "Fisher's Effect: Real Growth Is Not Interest Less Inflation," *Mathematics Teacher*, 81 (*Octubre* 1988), 546-47. Con autorización de National Council of Teachers of Mathematics.

Ahora, compárese el poder de compra de $100 en junio de 1985, con el de $111 en junio de 1986. En 1985 se podían comprar 100 libras de fresas con $100, a $1.00 por libra. En 1986, las fresas costaban $1.036 por libra, por lo que el monto acumulado de $111 permitió comprar $111/1.036 \approx /107.14$ lb de fresas (el símbolo $\approx$ significa *aproximadamente igual*).

¿Qué cambio ocurrió en el pdoer de compra de la inversión? aumentó de 100 lb a 107.14 lb, o sea, un aumento de 7.14%. Es decir,

$$\frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad incial}} = \frac{107.14 - 100}{100} = 0.0714 = 7.14\%.$$

Por ello, 7.14% es la tasa real de crecimiento, que es inferior a la diferencia 11% − 3.6% = 7.4%. En la realidad tal diferencia no tiene significado porque los tres porcentajes se refieren a cantidades distintas: (a) interés (fracción de la inversión, o sea 11% de $100), (b) inflación (fracción del precio unitario de ciertos bienes, o sea 3.6% de $1.00), y (c) la tasa de crecimiento real (porcentaje del poder de compra, es decir, 7.14% de la cantidad inicial de fresas).

Para deducir una fórmula para la tasa de crecimiento real, g, sea y la tasa anual de interés (el rendimiento), y sea i la tasa anual de inflación. En un año, una inversión de P (dólares) (el capital) gana un interés de $y \cdot P$, por lo que produce un monto acumulado de

$$P + y \cdot P = P(1 + y) \qquad \text{(factorizando)}$$

En un año, el precio de los artículos, por ejemplo p(dólares) por unidad se eleva en $i \cdot p$ para llegar a un nuevo precio de

$$p + i \cdot p = p(1 + i)$$

dólares por unidad. El poder de compra inicial representa la cantidad inicial de artículos por dólar:

$$\text{cantidad inicial} = \frac{\text{capital}}{\text{precio inicial}} = \frac{P}{p}.$$

Un año después, la nueva cantidad de artículos que el monto acumulado de la inversión puede comprar al precio nuevo está dada por

$$\text{cantidad nueva} = \frac{\text{nuevo saldo}}{\text{precio}} = \frac{P(1 + y)}{p(1 + i)}.$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento (o cambio relativo) del poder de compra está dada por

$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}$$

$$= \frac{\dfrac{P(1 + y)}{p(1 + i)} - \dfrac{P}{p}}{\dfrac{P}{p}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por p/P, se obtiene

$$g = \frac{1 + y}{1 + i} - 1$$

$$= \frac{(1 + y) - (1 + i)}{1 + i} = \frac{y - i}{1 + i}$$

Por ello, la tasa de crecimiento real está dada por la ecuación literal

$$g = \frac{y - i}{1 + i} \tag{1}$$

La relación representada con la Ecuación (1) es lo que se denomina efecto de Fisher*. Para ilustrar su utilización, se le aplica al ejemplo anterior, en donde $y = 11\%$, e $i = 3.6\%$. Mediante la fórmula de Fisher se obtiene:

$$g = \frac{0.11 - 0.036}{1 + 0.036} = \frac{0.074}{1.036} \approx 0.0714 = 7.14\%.$$

EJERCICIOS

1. De acuerdo con Foldessy (1986), durante 1980, la tasa de interés fue de 11.4% en promedio, mientras que la inflacicón avanzó en 13.5%.
   a. Calcule el monto acumulado de una inversión de $100, después de un año, al 11.4%.
   b. Si una libra de manzanas costaba $1 en enero de 1980, ¿qué cantidad de manzanas se podía
   c. Si una libra de manzanas costaba $1 en enero de 1989, ¿qué cantidad de manzanas se podía comprar con $100 en 1980?
   d. ¿Qué cantidad de manzanas se podía comprar con el monto acumulado (veáse la parte (a)) un año después?
   e. Utilice los resultados de las partes (c) y (d) para evaluar la tasa de crecimiento real mediante la ecuación.

$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}$$

   f. Verifique la respuesta dada en la parte (e) mediante la fórmula de Fisher.
2. Obtenga la tasa real de crecimiento dada una tasa de interés de 10% y una tasa de inflación de 5%.

* Irving Fisher, "Appreciation and Interest", *Publications of the American Economic Association,* Tercera Serie, 11 (Agosto 1986), 331-442.

CAPÍTULO 3

Aplicaciones de las ecuaciones y las desigualdades

3.1 Aplicaciones de las ecuaciones

En la mayor parte de los casos, para resolver problemas de la práctica es necesario traducir las relaciones que se plantean en los problemas a símbolos matemáticos. A esto se le denomina *modelación*. Los ejemplos siguientes ilustran las técnicas y conceptos elementales. Es necesario examinar cada uno de ellos en forma cuidadosa antes de pasar a los ejercicios.

En el primer ejemplo, se hace referencia a algunos términos de administración relacionados con las empresas industriales. **Los costos fijos** (o *gastos generales*) son la suma de todos los costos que son independientes del nivel de la producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. Los **costos variables** son la suma de todos los costos que dependen del nivel de producción, como mano de obra y materiales. Los **costos totales** son la suma de los costos variables y los fijos:

costos totales = costos variables + costos fijos.

Los **ingresos totales** son el efectivo que el fabricante recibe por la venta de su producción. Están dados por:

ingresos totales = (precio por unidad) (número de unidades vendidas).

Las **utilidades** son los ingresos totales menos los costos totales:

utilidades = ingresos totales − costos totales.

EJEMPLO 1

Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de \$6 *(dólares) por unidad y costos fijos de* \$80,000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades de* \$60,000.

Sea q el número de unidades que deben ser vendidas. (En muchos problemas q representa una cantidad.) Entonces, los costos variables (en dólares) son $6q$. Por lo tanto, los costos *totales* para el caso son $6q + 80\,000$. Los ingresos totales por la venta de q unidades son $10q$. Y, dado que

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales},$$

el modelo para el problema es

$$60{,}000 = 10q - (6q + 80{,}000).$$

que da como resultado

$$\begin{aligned} 60{,}000 &= 10q - 6q - 80{,}000, \\ 140{,}000 &= 4q, \\ 35{,}000 &= q. \end{aligned}$$

Así que es necesario vender 35,000 unidades para obtener utilidades de \$60,000.

EJEMPLO 2

Una compañía fabrica ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de pantalones a tiendas que venden al menudeo. Los costos para el detallista serían de \$33 *(dólares) por conjunto. Para conveniencia del detallista, el fabricante anexará una etiqueta de precio a cada conjunto. ¿Qué cantidad se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio en* 20% *en una oferta promocional y obtener utilidades de* 15% *sobre los costos?*

Aquí se usa la siguiente relación

$$\text{precio de venta} = \text{costo por conjunto} + \text{utilidad por conjunto}.$$

Sea p el precio marcado en la etiqueta, por conjunto, en dólares. Durante la oferta, el detallista recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más las utilidades, (0.15)(33). Por ello

$$\text{precio de venta} = \text{costo} + \text{utilidades}.$$

$$\begin{aligned} p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33), \\ 0.8p &= 37.95, \\ p &= 47.4375. \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, la compañía debe imprimir un valor de \$47.44 en la etiqueta del precio.

EJEMPLO 3

Se invirtió un total de \$10,000 *(dólares) en dos empresas, A y B. Al final del primer año, A y B produjeron rendimientos de* 6% *y de* $5\frac{3}{4}$%, *respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cómo se distribuyó la cantidad original, si el total que se ganó fue de* \$588.75*?*

Sea x la cantidad (en dólares) que se invirtió al 6%. Entonces $10{,}000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés que se ganó fue de $(0.06)(x)$ y $(0.0575)(10{,}000 - x)$, que hacen un total de 588.75. Por tanto

$$\begin{aligned}(0.06)x + (0.0575)(10{,}000 - x) &= 588.75,\\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75,\\ 0.0025x &= 13.75,\\ x &= 5500.\end{aligned}$$

De manera que se invirtieron \$5,500 al 6% y \$10,000 − \$5,500 = \$4500 al $5\frac{3}{4}$%.

EJEMPLO 4

Se acordó en el consejo de administración de una empresa amortizar parte de sus bonos en dos años. En ese momento, se requerirían \$1,102,500. *Supóngase que en el presente se apartan* \$1,000,000. *¿A qué tasa de interés compuesto anual tendrá que invertirse esa cantidad para que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?*

Sea r la tasa de interés anual que se requiere. Al final del primer año, la cantidad acumulada será de \$1,000,000 más los intereses, \$1,000,000r, lo que dará un total de

$$1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000r = 1{,}000{,}000(1 + r).$$

Con el interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1{,}000{,}000(1 + r)$, más los intereses sobre esta cantidad, que serán de $[1{,}000{,}000(1 + r)]r$. Por tanto, el valor total al final del segundo año será de $1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r$. Esta cantidad debe ser igual a \$1,102,500:

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r = 1{,}102{,}500. \tag{1}$$

Dado que $1{,}000{,}000(1 + r)$ es factor común de los dos términos del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}1{,}000{,}000(1 + r)(1 + r) &= 1{,}102{,}500,\\ 1{,}000{,}000(1 + r)^2 &= 1{,}102{,}500,\\ (1 + r)^2 &= \frac{1{,}102{,}500}{1{,}000{,}000} = \frac{11{,}025}{10{,}000} = \frac{441}{400},\\ 1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20},\\ r &= -1 \pm \frac{21}{20}.\end{aligned}$$

Por ello, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o bien $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la Ecuación (1), se rechaza -2.05, puesto que se desea que r sea positiva. De ahí que $r = 0.05$ y, por lo tanto, la tasa que se desea es de 5%.

En ocasiones, es posible que haya más de una forma de modelar un problema planteado en términos verbales, tal como se muestra en el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5

Una empresa de bienes raíces es propietaria de un conjunto de departamentos que consta de 70 de ellos. Se puede rentar cada uno de los departamentos en \$250 *(dólares) al mes. Sin embargo, por cada* \$10 *que se aumenten a la renta cada mes se tendrán dos departamentos desocupados sin posibilidad de alquilarlos. La empresa desea obtener* \$17,980 *mensuales con las rentas. ¿Cuánto debe cobrar por el alquiler de cada departamento?*

Método I. Supóngase que r es la renta (en dólares) que se cobrará por departamento. Con esto, el aumento sobre el nivel de \$250 es $r - 250$. Así que el número de aumentos de \$10 es $\dfrac{r - 250}{10}$. Puesto que cada aumento de \$10 da como resultado dos departamentos vacíos, el número total de éstos será $2\left(\dfrac{r - 250}{10}\right)$. En consecuencia, el número total de departamentos rentados será $70 - 2\left(\dfrac{r - 250}{10}\right)$. Puesto que

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

se tiene que

$$17{,}980 = r\left[70 - \frac{2(r - 250)}{10}\right],$$

$$17{,}980 = r\left[70 - \frac{r - 250}{5}\right],$$

$$17{,}980 = r\left[\frac{350 - r + 250}{5}\right],$$

$$89{,}900 = r[600 - r].$$

Así que

$$r^2 - 600r + 89{,}000 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática

$$r = \frac{600 \pm \sqrt{(-600)^2 - 4(1)(89{,}900)}}{2(1)}$$

$$= \frac{600 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{600 \pm 20}{2} = 300 \pm 10.$$

La renta de cada departamento debe ser de \$310 o \$290.

Método II. Supóngase que n es el número de aumentos de \$10. Entonces, el aumento de la renta es de $10n$ y habrá $2n$ departamentos desocupados. Puesto que

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

se tiene que

$$\begin{aligned} 17{,}980 &= (250 + 10n)(70 - 2n), \\ 17{,}980 &= 17{,}500 + 200n - 20n^2, \\ 20n^2 - 200n + 480 &= 0, \\ n^2 - 10n + 24 &= 0, \\ (n - 6)(n - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Por ello, $n = 6$ o bien $n = 4$. La renta por departamento debe ser de $250 + 10(6) =$ \$310 o bien $250 + 10(4) =$ \$290.

EJERCICIOS 3.1

1. Una firma industrial fabrica un producto que tiene costos variables de \$2.20 (dólares) por unidad. Si los costos fijos son de \$95,000 y se vende cada unidad en \$3, ¿cuántas unidades deben venderse para que la compañía obtenga utilidades de \$50,000?

2. Los administradores de una compañía desean saber el total de unidades que deben venderse para que la firma obtenga utilidades de \$100,000. Se tienen disponibles los siguientes datos: Precio unitario de venta, \$20; costos variables por unidad, \$15; costos fijos totales, \$600,000. Determínense las ventas que se requieren, en unidades.

3. Una persona desea invertir \$20,000 en dos empresas, de manera que sus ingresos totales sean de \$1,440 al año. Una compañía paga 6% anual; la otra tiene un mayor riesgo y ofrece $7\frac{1}{2}$ % anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una de ellas?

4. Una persona invirtió \$20,000. Una parte a una tasa de interés de 6% anual, y el resto al 7% anual. El total de intereses ganados al final del primer año fue equivalente a una tasa anual del $6\frac{3}{4}$ % sobre el total de los \$20,000. ¿Cuánto se invirtió según cada tasa de interés?

5. El costo de un producto es de \$3.40 para el vendedor al menudeo. Si éste desea obtener utilidades de 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio deberá vender el producto?

6. Dentro de dos años, una empresa requerirá \$1,123,600, con objeto de amortizar ciertos bonos. Si la compañía invierte ahora \$1,000,000 con este propósito, ¿qué tasa de interés compuesto anual debe recibir sobre esta cantidad con objeto de estar en posibilidades de amortizar los bonos?

7. Dentro de dos años, una compañía emprenderá un programa de expansión. Ha decidido invertir \$2,000,000 en estos momentos, para que dentro de dos años el valor total de la inversión sea de \$2,163,200, que es el monto que requerirá para la expansión. ¿Qué tasa de interés compuesto anual debe utilizar la compañía para lograr su propósito?

8. En una compañía se sabe que si se venden q unidades de un producto, sus ingresos totales por las ventas serán de $100\sqrt{q}$. Si los costos variables por unidad son de \$2 y los costos fijos son de \$1200, encuéntrense los valores de q para los cuales

ingresos totales por venta = costos variables + costos fijos

(es decir, una utilidad igual a cero).

9. En un dormitorio estudiantil se da albergue a 210 estudiantes. En este otoño se dispone e 76 cuartos para alumnos de nuevo ingreso. En promedio, 95% de los alumnos de primer ingreso que solicitan cuartos los obtienen. ¿Cuántas solicitudes de habitación deben enviar los estudiantes si desean obtener 76 confirmaciones?

10. Se entrevistó a un grupo de personas, y 20% de ellas, 700 en número, estuvieron en favor de un producto nuevo, por encima de la marca con mejores ventas. ¿A cuántas personas se entrevistó?

11. Se reportó que en cierto reclusorio para mujeres las guardianas, a las que se denomina celadoras, recibieron 30% (o $200) menos, al mes, que sus contrapartes masculinas, los celadores. Calcule el salario anual de los guardianes masculinos. Redondee la respuesta al dólar más cercano.

12. Hace pocos años, los conductores de camiones para el transporte de cemento se fueron a la huelga durante 46 días. Antes de la huelga, estos conductores ganaban $7.50 por hora y trabajaban 260 días al año, con ocho horas de trabajo al día. ¿Qué porcentaje de aumento se requiere en sus ingresos anuales para recuperar el tiempo perdido en un año?

13. Un fabricante de cartuchos para juegos para video vende cada uno en $19.95. El costo de manufactura de cada pieza es de $14.95. Los costos fijos mensuales son de $8,000. Durante el primer mes de ventas de un juego nuevo, ¿cuántos cartuchos deben venderse para que el fabricante salga "a mano" (es decir, para que los ingresos totales sean iguales a los costos totales)?

14. Una sociedad de inversiones compró en $5000 (dólares) un bono de una compañía petrolera. El bono produce el 8% anual. Ahora, la sociedad desea comprar acciones de una compañía que vende productos para hospitales. Las acciones se venden a $20 cada una de ellas y ofrecen dividendos de $0.50 por acción al año. ¿Cuántas acciones debe adquirir la sociedad para que su inversión total en acciones y bonos produzca el 5% anual?

15. En calidad de prestación para sus empleados, una compañía estableció un plan de atención médica para la vista. Según el plan, cada año la compañía pagará los primeros $10 de gastos en los que cada empleado incurra por atención óptica, y 80% de todos los gastos adicionales, hasta un pago *total* máximo de $60. Calcule los gastos totales anuales de atención oftálmica que cubre este programa, por empleado.

16. En cierto intervalo de tiempo, una empresa fabricante de barras de caramelo encontró que el 2% de su producto es rechazado por defectos.

(a) Si se fabrican c barras de caramelo al año, ¿cuántas de ellas puede esperar el fabricante que sean rechazadas?

(b) Este año, se proyecta que el consumo anual de esta golosina será de 2,000,000 de barras. ¿Aproximadamente cuántas tendrían que fabricarse si se toman en cuenta las que se rechazan?

17. Supóngase que los consumidores adquirirán q unidades de un producto, si el precio es de $(80 - q)/4$ *por unidad*. ¿Cuántas unidades deben venderse para que los ingresos por ventas sean de $400?

18. ¿En qué tiempo se duplicaría una inversión con tasa de interés simple de 5% anual? [*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 6(a) de la Sección 1.1, y exprese 5% como 0.05.]

19. El inventor de un juguete nuevo ofrece a una empresa fabricarlo y venderlo mediante un solo pago de $25,000 (dólares). Después de estimar que las posibilidades de ventas futuras a plazo mayor de un año son prácticamente inexistentes, los administradores de la compañía están ponderando la siguiente propuesta alternativa: dar un solo pago de $2000 y regalías de $0.50 por cada unidad que se venda. ¿Cuántas unidades deben venderse durante el primer año para que esta alternativa le resulte al inventor tan económicamente atractiva como su ofrecimiento original? (*Sugerencia:* Determine el punto en el que los ingresos de ambas propuestas son iguales?)

20. El estacionamiento de una compañía tiene 120 pie de largo y 80 de ancho. Debido a un aumento en el personal, se decide duplicar el área del estacionamiento añadiendo franjas de igual anchura en forma de escuadra (para situar al extremo y a un lado). Determine dicha anchura.

21. Usted es el asesor financiero en jefe de una empresa propietaria de un complejo de oficinas que cuenta con 50 *suites*. Se puede rentar cada una de éstas en $400 mensuales. Sin embargo, por cada $20 de aumento por mes habrá dos de ellas desocupadas, sin posibilidad de rentarlas. La compañía desea obtener un total de $20,240 mensuales con la renta del total del complejo. Se pide determinar la renta que debe cobrarse por cada *suite*. ¿Cuál sería su respuesta?

22. Hace seis meses, una compañía de inversiones tenía una cartera de $3,000,000 (dólares), formada

por acciones AAA y acciones especulativas. Desde entonces, el valor de las inversiones AAA se ha incrementado en $\frac{1}{16}$, en tanto que el valor de las acciones especulativas ha disminuido en una proporción equivalente. El valor actual de la cartera es de \$3,140,000. ¿Cuál es el valor *actual* de las inversiones AAA?

23. Los ingresos mensuales I de cierta compañía, están dados por $I = 800p - 7p^2$, en donde p es el precio en dólares del producto que fabrica. ¿A qué precio se obtendrían ingresos de \$10,000, si el precio debe ser superior a \$50?

24. La *razón de precio a utilidad* (o razón de P/U) de una compañía, es el cociente que se obtiene dividiendo el valor de mercado de una de sus acciones comunes en circulación entre las utilidades por acción. Si la razón de P/U aumenta en 10%, y las utilidades por accion aumentan en 20%, determine el aumento porcentual en el valor de mercado por acción, para las acciones comunes.

25. Cuando el precio de un producto es de p dólares por unidad, supóngase que un fabricante ofrece $2p - 8$ unidades del producto al mercado, y que la demanda de los consumidores será de $300 - 2p$ unidades. Se dice que el mercado está en equilibrio cuando el valor de p hace que la oferta sea igual a la demanda. Encuéntrese el valor de p.

26. Repítase el Problema 25 para las siguientes condiciones: a un precio de p dólares por unidad, la oferta es de $3p^2 - 4p$ y la demanda es de $24 - p^2$.

27. Por razones de seguridad, una compañía resguardará un área rectangular de 11,200 pies cuadrados que se encuentra en la parte trasera de su planta. Un lado estará limitado por el edificio y los otros tres serán bardados (véase la Figura 3.1). Si se ocupan 300 pies de barda, ¿cuáles serán las dimensiones del área rectangular?

28. Una firma industrial está diseñando el empaque para su producto. Parte del mismo será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, que se cortará con orillas de tres pulgadas cuadradas en cada esquina y se doblará en los lados (véase la Figura 3.2). La caja deberá contener 75 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja cuadrada de aluminio que se debe utilizar?

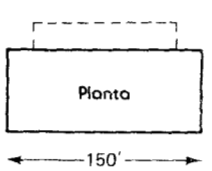


FIGURA 3.1

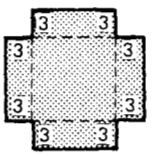


FIGURA 3.2.

29. Una compañía dulcera fabrica una golosina muy popular. La barra, que tiene forma rectangular, de 10 centímetros (cm) de longitud, 5 cm de ancho y 2 cm de grueso (véase la Figura 3.3). Debido a los costos crecientes, la compañía ha decidido reducir el volumen de la barra en un 28%, lo cual es bastante drástico. El grosor será igual, pero se reducirá tanto la longitud como el ancho en cantidades iguales. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones de lo ancho y lo largo de la nueva barra?

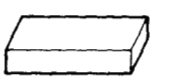


FIGURA 3.3

30. Una compañía dulcera fabrica una golosina con forma de rosca; véase la Figura 3.4. Debido a los costos crecientes, la compañía reducirá el volumen de su producto en 20%. Para hacer esto, mantendrá el mismo grosor y el mismo radio exterior, pero ampliará el radio interior. En la actualidad, el grosor es de

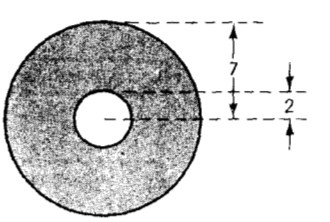


FIGURA 3.4

2 milímetros (mm), el radio interior es de 2 mm, y el radio exterior, de 7 mm. Halle el radio interior de la golosina con las nuevas dimensiones. (*Sugerencia:* El volumen D de un disco sólido es $\pi r^2 h$, en donde r es el radio y h es el grosor.)

31. Un *saldo compensatorio* se refiere a la práctica mediante la cual un banco pide a quien solicita un crédito mantener un depósito de cierta proporción del crédito, durante el término de éste. Por ejemplo, si una empresa obtiene un crédito de \$100,000 y requiere un saldo compensatorio de 20%, tendría que dejar \$20,000 de depósito y utilizar los \$80,000 restantes. Para cubrir los gastos de renovación de sus herramientas, una fábrica debe obtener un préstamo de \$95,000. El banco, con el que no ha tenido tratos previos, exige un saldo compensatorio de 15%. Redondeando al millar de dólares más cercano, ¿cuál debe ser el importe total del préstamo, para obtener los fondos necesarios?

32. Una compañía que fabrica maquinaria tiene un plan de incentivos para sus vendedores. Cada uno obtiene \$20 (dólares) de comisión por cada unidad que vende. Por *cada* máquina vendida, por encima de 600, se aumentará la comisión en 0.02 por cada una. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas sería de \$20.04. ¿Cuántas máquinas debe colocar un comisionista para obtener \$15,400?

33. Una compañía fraccionadora de terrenos adquirió uno en \$7,200. Se había recuperado el costo total del terreno después de vender la totalidad, excepto 20 acres, con utilidades de \$30 por acre. ¿Cuántos acres se vendieron?

34. El *margen de utilidad* de una empresa son las utilidades netas divididas entre las ventas totales. El margen de utilidad de una compañía aumentó en 0.02, con respecto al año pasado. En ese año, la firma vendió sus productos a \$3.00 (dólares) por unidad y obtuvo utilidades netas de \$4,500. Este año, se aumentó el precio del producto en \$0.50 por unidad, se vendieron 2,000 más y se obtuvieron utilidades netas de \$7,140. La compañía nunca tuvo un margen de utilidad superior al 0.15. ¿Cuántos productos se vendieron el año pasado, y cuántos en éste?

35. Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de fabricar cada unidad de A es \$2 más que el de fabricar B. Los costos de producción de A y B son de \$1,500 y \$1,000, respectivamente, y se manufacturaron 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades se fabricaron de cada uno de los dos productos?

3.2 Desigualdades lineales

Supóngase que a y b son dos puntos que se encuentran sobre la recta de los números reales. En este caso, puede suceder que a y b coincidan, que a esté a la izquierda de b o que a esté a la derecha de b (véase la Figura 3.5).

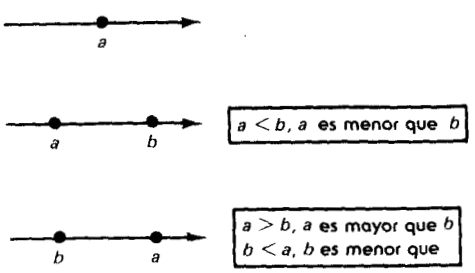


FIGURA 3.5

Si a y b coinciden, entonces $a = b$. Si a está a la izquierda de b, se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, en donde el *símbolo de desigualdad* "$<$", se lee como "es menor que". Por otro lado, si a está a la derecha de b, se dice que a es mayor que b y se escribe $a > b$. Escribir $a > b$ es equivalente a escribir $b < a$.

Otro símbolo de desigualdad es "$\leq$", que se lee como "es menor que o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o bien $a = b$. De manera similar, el símbolo "$\geq$" se define como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a = b$. En este caso, se dice que "a es mayor que o igual a b".

Se utilizarán las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, puesto que existe una correspondencia de uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta. Por ello, se puede hablar de los puntos -5, -2, 0, 7 y 9 y se puede escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$ (véase la Figura 3.6). Resulta evidente que si $a > 0$, entonces a es positivo; si $a < 0$, entonces a es negativo.

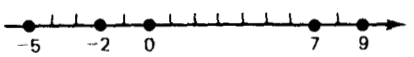


FIGURA 3.6

Supóngase que $a < b$ y x se encuentra entre a y b (véase la Figura 3.7). Entonces, no sólo $a < x$, sino que $x < b$. Se señala esto escribiendo $a < x < b$. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$ (véase la Figura 3.6).

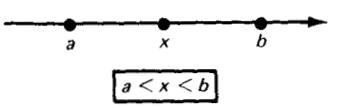


FIGURA 3.7

Al definir una desigualdad en la parte que sigue, se utilizará la relación menor que ($<$), pero también se aplican los demás símbolos ($>$, $\geq$, $\leq$).

DEFINICIÓN

*Una **desigualdad** es un planteamiento que establece que un número es menor que otro.*

Por supuesto, se representan las desigualdades por medio de símbolos de desigualdad. Si en dos desigualdades sus símbolos apuntan en la misma dirección, entonces se dice que las desigualdades tienen el *mismo sentido*. Si no es así, se dice que tienen *sentidos opuestos*, o que una tiene el *sentido inverso* de la otra. Por lo tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene sentido opuesto a $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores para los cuales la desigualdad se verifica. Esto implica utilizar ciertas reglas que se enuncian enseguida.

1. *Si se suma o se resta el mismo número en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la original.* En términos simbólicos,

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \quad \text{y} \quad a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$ y $7 + 3 < 10 + 3$.

2. *Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número* ***positivo****, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la desigualdad original.* En términos simbólicos,

   si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

   Por ejemplo, puesto que $3 < 7$ y $2 > 0$, entonces $3(2) < 7(2)$. También, $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

3. *Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número* ***negativo****, entonces la desigualdad resultante tiene un sentido* ***opuesto*** *a la desigualdad original.* Simbólicamente,

   $$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(-c) > b(-c) \text{ y } \frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}.$$

   Por ejemplo, $4 < 7$, pero $4(-2) > 7(-2)$. También $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$.

4. *Se puede remplazar cualquier lado de una desigualdad por una expresión equivalente.* Simbólicamente,

   $$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

   Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. *Si ambos lados de una desigualdad son positivos o negativos, entonces sus respectivos recíprocos* son desiguales en el sentido* ***inverso***. Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

6. *Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se elevan a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la desigualdad original.* Por ello, si $a > b > 0$ y $n > 0$, entonces

   $$a^n > b^n \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

   Por ejemplo, $9 > 4$ y, por lo tanto, $9^2 > 4^2$ y $\sqrt{9} > \sqrt{4}$.

El resultado de aplicar las reglas 1-4 a una desigualdad se denomina *desigualdad equivalente*. Es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la desigualdad original. Se aplicarán estas reglas a *desigualdades lineales*.

DEFINICIÓN

Una ***desigualdad lineal*** *en la variable x es una desigualdad que puede escribirse en la siguiente forma*

$$ax + b < 0 \quad \text{o bien} \quad ax + b \leq 0,$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

* El *recíproco* de un número diferente de 0, a, se define como $\frac{1}{a}$.

En los ejemplos siguientes de resolución de desigualdades lineales, se indica en el lado derecho la propiedad que se utiliza. En cada uno de los pasos, se remplazará la desigualdad dada con otra equivalente, hasta que la solución sea evidente.

EJEMPLO 1

Resolver las siguientes desigualdades.

a. $2(x - 3) < 4$.

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &< 4, \\ 2x - 6 &< 4 && (4), \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 && (1), \\ 2x &< 10 && (4), \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} && (2), \\ x &< 5. \end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. De modo que, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Se escribe en forma simple la solución como $x < 5$. En términos geométricos, se puede representar esto mediante el segmento de trazo más grueso marcado en la Figura 3.8. El signo de paréntesis indica que 5 *no está incluido* en la solución.

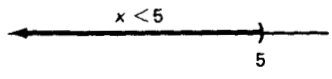


FIGURA 3.8

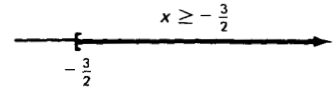


FIGURA 3.9

b. $3 - 2x \leq 6$.

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\leq 6, \\ -2x &\leq 3 && (1) \\ x &\geq -\frac{3}{2} && (3) \end{aligned}$$

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$. Esto se representa geométricamente en la Figura 3.9. El símbolo de corchete señala que $-\frac{3}{2}$ *está incluido* en la solución.

EJEMPLO 2

Resolver $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}(s - 2) + 1 &> -2(s - 4), \\ 2[\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1] &> 2[-2(s - 4)] && (2), \\ 3(s - 2) + 2 &> -4(s - 4), \\ 3s - 4 &> -4s + 16, \end{aligned}$$

$$7s > 20 \qquad (1),$$

$$s > \frac{20}{7} \qquad (2).$$

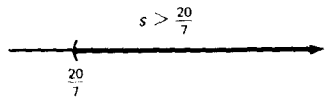


FIGURA 3.10

Véase la Figura 3.10.

EJEMPLO 3

Resolver las siguientes desigualdades

a. $2(x - 4) - 3 > 2x - 1.$

$$2(x - 4) - 3 > 2x - 1,$$
$$2x - 8 - 3 > 2x - 1,$$
$$-11 > -1.$$

Puesto que nunca es cierto que $-11 > -1$, no existe solución alguna y el conjunto solución es $\varnothing$.

b. $2(x - 4) - 3 < 2x - 1.$

Procediendo de la misma forma que en (a), se obtiene $-11 < -1$. Esto se verifica para todos los números reales x. Se escribe la solución como $-\infty < x < \infty$ (véase la Figura 3.11). Los símbolos $-\infty$ y ∞ no son números, sino simplemente una ayuda para señalar que la solución son todos los números reales.

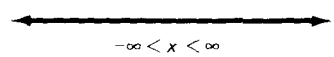
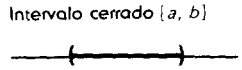


FIGURA 3.11

Con frecuencia se utilizará el término *intervalo* para describir ciertos conjuntos de números reales. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales para los cuales $a \leq x \leq b$ se denomina **intervalo cerrado** e incluye los *extremos* a y b. Se le denota mediante $[a, b]$. El conjunto de todos los números x para los cuales $a < x < b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota mediante (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto (véase la Figura 3.12).

Intervalo cerrado $[a, b]$



Intervalo abierto (a, b)

FIGURA 3.12.

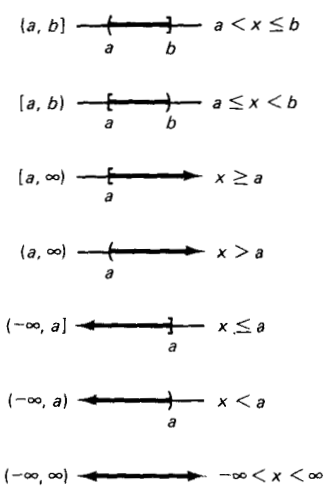


FIGURA 3.13

Extendiendo estos conceptos, se tienen los intervalos que se muestran en la Figura 3.13, en donde los símbolos ∞ y $-\infty$ no son números, sino simplemente una ayuda para señalar que el intervalo se extiende en forma indefinida en alguna dirección.

EJERCICIOS 3.2

En los problemas **1-34,** *resolver las desigualdades y representar las respuestas en forma geométrica en la recta de los números reales.*

1. $3x > 12$.

2. $4x < -2$.

3. $4x - 13 \leq 7$.

4. $3x \geq 0$.

5. $-4x \geq 2$

6. $2y + 1 > 0$.

7. $3 - 5s > 5$.

8. $4s - 1 < -5$.

9. $3 < 2y + 3$.

10. $6 \leq 5 - 3y$.

11. $2x - 3 \leq 4 + 7x$.

12. $-3 \geq 8(2 - x)$.

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$.

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$.

15. $2(3x - 2) > 3(2x - 1)$.

16. $3 - 2(x - 1) \leq 2(4 + x)$.

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$.

18. $\sqrt{2}\,(x + 2) > \sqrt{8}\,(3 - x)$.

19. $\frac{5}{3}x < 10$.

20. $-\frac{1}{2}x > 6$.

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$.

22. $\frac{4y - 3}{2} \geq \frac{1}{3}$.

23. $4x - 1 \geq 4(x - 2) + 7$.

24. $0x \leq 0$.

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}$.

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}$.

27. $2x + 3 \geq \frac{1}{2}x - 4$.

28. $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x$.

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r$.

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{2}{3}t$.

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}$.

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}$.

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434$.

34. $\frac{5y - 1}{-3} < \frac{7(y + 1)}{-2}$.

35. Durante cada uno de los meses del año pasado, una compañía obtuvo utilidades que fueron superiores a \$37,000 pero inferiores a \$53,000. Si S representa las utilidades totales del año, describir S utilizando desigualdades.

36. Utilizando desigualdades, representar mediante símbolos el siguiente enunciado: El número de horas de trabajo, x, que se requieren para fabricar un producto, no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

3.3 Aplicaciones de las desigualdades

En ocasiones, resolver problemas planteados en forma verbal implica desigualdades, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Para un fabricante de termostatos, el costo combinado de mano de obra y materiales es de \$5 por unidad. Los costos fijos (los costos en los que se incurre en un lapso dado sin que importe la cantidad que se fabrique) son de \$60,000 (dólares). Si el precio de venta de un termostato es de \$7, ¿cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

Sea q el número de termostatos que deben venderse. Entonces, su costo es $5q$. Por ello, el costo total para la compañía es así de $5q + 60{,}000$. Los ingresos totales por la venta de q aparatos será $7q$. Ahora bien,

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales},$$

y se desea que las utilidades > 0. Por lo tanto,

$$\text{ingresos totales} - \text{costos totales} > 0.$$

$$7q - (5q + 60{,}000) > 0,$$

$$2q > 60{,}000,$$

$$q > 30{,}000.$$

Por lo tanto, se deben vender cuando menos 30,001 termostatos para que la compañía obtenga utilidades.

EJEMPLO 2

Un constructor debe decidir si ha de rentar o comprar una máquina excavadora. Si la rentara, tendría que pagar \$600 (dólares) al mes (sobre una base anual), y el costo diario (gasolina, aceites y el conductor) sería de \$60 por cada día que se utilizara. Si la comprara, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$80 por día. ¿Cuál es el número mínimo de días al año, que tendría que utilizar la máquina para justificar el rentarla en vez de comprarla?

Sea d el número de días que se utiliza la máquina al año. Si se renta, los costos anuales totales estarían formados por los pagos de renta, que serían de (12)(600) y los cargos diarios de $60d$. Si se compra la máquina, el costo anual es de $4{,}000 + 80d$. Se desea que

$$\text{costo}_{\text{renta}} < \text{costo}_{\text{compra}},$$

$$12(600) + 60d < 4000 + 80d,$$

$$7200 + 60d < 4000 + 80d,$$

$$3200 < 20d,$$

$$160 < d.$$

Por ello, el constructor debe utilizar la máquina cuando menos 161 días para justificar su alquiler.

EJEMPLO 3

La *razón de circulante* en un negocio es el cociente de sus activos circulantes (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar) entre sus pasivos circulantes (como préstamos a corto plazo e impuestos por pagar).

Después de consultar al contralor, el presidente de una empresa decide solicitar un préstamo a corto plazo para aumentar el inventario. La compañía tiene activos circulantes por \$350,000 *y pasivos circulantes por* \$80,000. *¿Cuánto es lo que puede obtener en préstamo si se desean que su razón de circulante no sea inferior a 2.5? (Nota: Los fondos que se recibirían se consideran como activos circulantes, y el préstamo, como pasivos circulantes.)*

Si x denota el monto que la compañía puede obtener en préstamo, entonces sus activos circulantes serán de $350{,}000 + x$ y sus pasivos circulantes serán de $\$80{,}000 + x$. Por consiguiente,

$$\text{razón de circulante} = \frac{\text{activos circulantes}}{\text{pasivos circulantes}} = \frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x}.$$

Se desea

$$\frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x} \geq 2.5.$$

Dado que x es positiva, también lo es $80{,}000 + x$. Por ello se pueden multiplicar ambos lados de la desigualdad por $80{,}000 + x$ y el sentido de la misma no se altera.

$$350{,}000 + x \geq 2.5(80{,}000 + x),$$

$$150{,}000 \geq 1.5x,$$

$$100{,}000 \geq x.$$

De modo que se pueden obtener hasta \$100,000 por préstamo y seguir manteniendo una razón de circulante no menor de 2.5.

EJEMPLO 4

Una compañía editorial encuentra que el costo de publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$0.38 *(de dólar). Los ingresos provenientes de los distribuidores son de*

$0.35 (dólares) por copia. Los ingresos por publicidad son del 10% de los ingresos que se reciben de los distribuidores, para todos los ejemplares que se venden por encima de 10,000. ¿Cuál es el número mínimo de ejemplares que se deben vender, para que la compañía obtenga utilidades?

Sea q el número de ejemplares que se venden. Los ingresos que se obtienen de los distribuidores son $0.35q$, y los ingresos por publicidad son $(0.10)[(0.35)(q - 10{,}000)]$. El costo total de publicación es de $0.38q$. Dado que utilidad = ingresos totales − costos totales, se desea que

$$\text{ingresos totales} - \text{costos totales} > 0.$$

$$0.35q + (0.10)[(0.35)(q - 10{,}000)] - 0.38q > 0,$$

$$0.35q + 0.035q - 350 - 0.38q > 0,$$

$$0.005q - 350 > 0,$$

$$0.005q > 350,$$

$$q > 70{,}000.$$

Por ello, el número total de ejemplares debe ser superior a 70,000. Es decir, se deben vender cuando menos 70,001 ejemplares para garantizar una utilidad.

EJERCICIOS 3.3

1. Una firma industrial fabrica un producto con precio unitario de venta de $20 (dólares) y costo unitario de $15. Si los costos fijos son de $600,000, determine el número mínimo de unidades que se deben vender para que la compañía obtenga utilidades.

2. Para fabricar una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo de los materiales es de $2.50 (dólares) y el costo de la mano de obra de $4. Los gastos generales constantes, sin importar el volumen de ventas, son de $5,000. Si el precio para los mayoristas es de $7.40 por unidad, determínese el número de unidades que debe vender la compañía para obtener utilidades.

3. Una administradora de negocios desea determinar la diferencia entre los costos de ser propietaria y de rentar un automóvil. Puede rentar un auto pequeño por $135 (dólares) al mes (sobre una base anual). Según este plan, el costo por milla (de gasolina y aceite) es de $0.05. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de $1,000, y los otros costos sumarían $0.10 por milla. ¿Cuál es el número mínimo de millas que tendría que conducir al año para hacer que la renta no fuera más costosa que la compra?

4. Un fabricante de camisas produce N artículos, con un costo total de mano de obra (en dólares) de $1.2N$ y un costo total de materiales de $0.3N$. Los gastos generales constantes para la planta son de $6,000. Si se vende cada camisa en $3, ¿cuántas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

5. El costo de publicación de cada ejemplar de una revista es de $0.65 (dólares). Se vende a los distribuidores a 0.60 cada una, y el ingreso que recibe por publicidad es 10% de la cantidad que recibiría por todos los ejemplares que publique arriba de un tiraje de 10,000. Determine el número mínimo de ejemplares que pueden publicarse sin pérdidas, es decir, tal que las utilidades sean ≥ 0 (Supóngase que se vende todo el tiraje.)

6. Una compañía fabrica relojes despertadores. Durante la semana normal de trabajo, el costo de la mano de obra para producir un reloj es de $2.00 (dólares). Sin embargo, si se fabrica un reloj en el tiempo extra, el costo de mano de obra es de $3.00. Los administradores han decidido invertir no más de un total de $25,000 a la semana en mano de obra. La compañía debe fabricar 11,000 relojes durante esa semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que

deben fabricarse durante la semana normal de trabajo?

7. Una compañía invierte un total de \$30,000 (dólares) de fondos excedentes a dos tasas anuales de interés: 5% y $6\frac{3}{4}$ %. Desea obtener un rendimiento anual no inferior a $6\frac{1}{2}$ %. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}$ %?

8. La razón de circulante de una empresa es 3.8. Si sus activos circulantes son de \$570,000, ¿cuánto valen sus pasivos circulantes? Para obtener fondos adicionales, ¿cuál es la cantidad máxima que puede obtener a crédito, a corto plazo, si se desea que su razón de circulante no sea inferior a 2.6? (Véase el Ejemplo 3, que contiene una explicación de la razón de circulante.)

9. En la actualidad, un fabricante tiene 2,500 unidades de un producto en su almacén. El producto se vende en estos momentos a \$4 (dólares) por unidad. Para el próximo mes, el precio unitario aumentará en \$0.50. El fabricante desea que los ingresos totales que se obtengan por la venta de las 2500 unidades no sea inferior a \$10,750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. Supóngase que los consumidores adquirirían q unidades de un producto a un precio de $\frac{100}{q} + 1$ (en dólares) por unidad. ¿Cuál es el número de unidades que se deben vender para que los ingresos sean superiores a \$5,000?

11. Con frecuencia se paga a los pintores por hora o a destajo. La tarifa puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, supóngase que pueden trabajar por \$8.50 por hora, o por \$300 más \$3 por cada hora, por debajo de 40, si terminan el trabajo en menos de 40 horas. Supóngase que un trabajo requeriría t horas. Si $t \geq 40$, resulta claro que es mejor la tarifa por hora. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t es mejor la tarifa por hora?

12. Supóngase que una compañía le ofrece un puesto en ventas, pudiendo usted elegir uno de dos planes para determinar su sueldo anual. Según un plan, recibiría \$12,600, más un bono de 2% de las ventas anuales. Según el otro plan, recibiría una comisión directa de 8% sobre las ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor elegir el primero de los planes?

13. El secretario de asuntos estudiantiles de una universidad está haciendo arreglos para que un grupo de música "rock" ofrezca un concierto en las instalaciones. El grupo cobra una cuota total de \$2,440 (dólares) o, por otro lado, una cuota de \$1,000 más 40% de lo que se obtenga en taquilla. Es probable que asistan 800 estudiantes. Cuando mucho, ¿cuánto debe cobrar el secretario por cada boleto, de manera que el segundo plan no resulte más costoso que el de la cuota única? Si se cobra este máximo, ¿cuánto dinero sobrará para pagar la publicidad, los guardianes y otros gastos de la función?

3.4 Valor absoluto

En ocasiones resulta útil considerar, sobre la recta de números reales, la distancia que existe entre un número x y 0. A esta distancia se le denomina **valor absoluto** de x y se le denota mediante $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, porque tanto 5 como -5 se encuentran a 5 unidades de 0 (véase la Figura 3.14). De manera similar, $|0| = 0$.

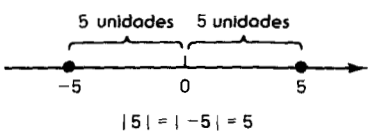


FIGURA 3.14

Si x es positiva, resulta claro que $|x| = x$. De la misma forma que $|-5| = 5 = -(-5)$, no debe resultar difícil para el lector convencerse de que si x es cualquier número negativo, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que se ha cambiado el signo de x. Por ello, aparte de su interpretación geométrica, el valor absoluto puede definirse de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

El ***valor absoluto*** *de un número real x, que se denota por* $|x|$, *es*

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0, \\ -x, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, se tiene que $|3| = 3$; $|-8| = -(-8) = 8$; $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; $-|2| = -2$; y $-|-2| = -2$. Obsérvese que $|x|$ siempre es positiva o cero; es decir, $|x| \geq 0$.

ADVERTENCIA

$\sqrt{x^2}$ no es necesariamente x, pero $\sqrt{x^2} = |x|$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, no -2. Esto concuerda con el hecho de que $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. También, $|-x| \neq x$ y $|-x - 1| \neq x + 1$. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$ y $|-(-3) - 1| \neq -3 + 1$.

EJEMPLO 1

Despejar x en cada ecuación

a. $|x - 3| = 2$.

Esta ecuación expresa que $x - 3$ es un número que se encuentra a dos unidades de cero. Por ello, puede ser que

$$x - 3 = 2 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -2.$$

La resolución de estos planteamientos, da $x = 5$ y $x = 1$.

b. $|7 - 3x| = 5$.

La ecuación es cierta si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene $x =$ y $x = 4$.

c. $|x - 4| = -3$.

El valor absoluto de un número nunca es negativo. Por ello, el conjunto solución es $\varnothing$.

Los números 5 y 9 se encuentran a una distancia de 4 unidades. También,

$$|9 - 5| = |4| = 4,$$

$$|5 - 9| = |-4| = 4.$$

En general, se puede interpretar $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b.

Por ejemplo, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 es de 2 unidades. Por lo tanto, x puede ser 1 o bien 5, tal como se muestra en el Ejemplo 1(a) y en la Figura 3.15.

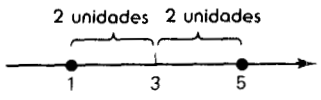


FIGURA 3.15

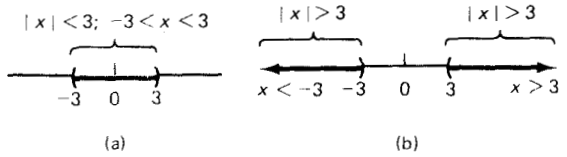


FIGURA 3.16

Ahora se volverá a las desigualdades. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades de 0. Por ello, x debe estar entre -3 y 3. Es decir, $-3 < x < 3$ [véase la Figura 3.16(a)]. Por otro lado, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del 0. De modo que existen dos casos: $x > 3$ o bien $x < -3$ [véase la Figura 3.16(b)]. Se pueden extender estas nociones. Si $|x| \leq 3$, entonces $-3 \leq x \leq 3$. Si $|x| \geq 3$, entonces $x \geq 3$ o bien $x \leq -3$.

En general, la solución de $|x| < d$ o bien $|x| \leq d$, en donde d es un número positivo, está formada por un intervalo, a saber: $-d < x < d$ o bien $-d \leq x \leq d$. Sin embargo, cuando $|x| > d$ o bien $|x| \geq d$, existen dos intervalos en la solución, $x < -d$ y $x > d$, o bien $x \leq -d$ y $x \geq d$.

EJEMPLO 2

Despejar x en cada una de las desigualdades.

a. $|x - 2| < 4$.

El número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del 0. Por el análisis anterior, esto significa que $-4 < x - 2 < 4$. Se puede establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -4 &< x - 2 < 4, \\ -4 + 2 &< x < 4 + 2 \qquad \text{(sumando 2 a cada miembro)}, \\ -2 &< x < 6. \end{aligned}$$

Entonces, la solución es $-2 < x < 6$. Lo anterior significa que todos los números que se encuentran entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la Figura 3.17).

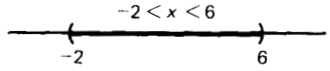


FIGURA 3.17

b. $|3 - 2x| \leq 5$.

$$\begin{aligned} -5 &\leq 3 - 2x \leq 5, \\ -5 - 3 &\leq -2x \leq 5 - 3 \qquad \text{(restando 3 de cada miembro)}, \\ -8 &\leq -2x \leq 2, \\ 4 &\geq x \geq -1 \qquad \text{(dividiendo cada miembro entre } -2), \\ -1 &\leq x \leq 4 \qquad \text{(reordenando)}. \end{aligned}$$

175687

Nótese que se *invirtió* el sentido de la desigualdad original al dividir entre un número negativo.

EJEMPLO 3

Despejar x en cada desigualdad.

a. $|x + 5| \geq 7$.

Aquí, $x + 5$ debe estar cuando *menos* a 7 unidades del 0. Por ello, $x + 5 \leq -7$ o bien $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ o bien $x \geq 2$ (véase la Figura 3.18).

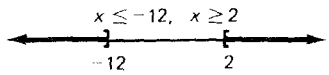


FIGURA 3.18

b. $|3x - 4| > 1$.

Aquí puede ser que $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Por consiguiente, $3x < 3$ o bien $3x > 5$. En consecuencia, $x < 1$ o bien $x > \frac{5}{3}$.

EJEMPLO 4

Utilizando la notación de valor absoluto, expresar simbólicamente los siguientes planteamientos:

a. x está a menos de 3 unidades de 5.

$$|x - 5| < 3.$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

$$|x - 6| \geq 7.$$

c. $x < 3$ y $x > -3$ simultáneamente.

$$|x| < 3.$$

d. x está a más de una unidad de -2.

$$|x - (-2)| > 1,$$

$$|x + 2| > 1.$$

x está a menos de σ (la letra griega "sigma") unidades de μ (la letra griega "mi").

$$|x - \mu| < \sigma.$$

Enseguida se presentan tres propiedades básicas del valor absoluto:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

3. $|a - b| = |b - a|$.

EJEMPLO 5

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$; $|(-7)(-3)| = |-7| \cdot |-3| = 21$.

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$.

c. $|7 - x| = |x - 7|$.

d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}$; $\left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}$.

e. $\left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}$.

EJERCICIOS 3.4

En los Problemas **1-10**, *escriba una forma equivalente sin el símbolo de valor absoluto.*

1. $|-13|$.
2. $|2^{-1}|$.
3. $|8 - 2|$.
4. $|(-4 - 6)/2|$.
5. $|3(-\frac{5}{3})|$.
6. $|2 - 7| - |7 - 2|$.
7. $|x| < 3$.
8. $|x| < 10$.
9. $|2 - \sqrt{5}|$.
10. $|\sqrt{5} - 2|$.

11. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese cada planteamiento.

a. x está a menos de 3 unidades de 7.
b. x difiere de 2 en menos de 3.
c. x está a no más de 5 unidades de 7.
d. La distancia entre 7 y x es 4.
e. $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
f. x está entre -3 y 3 pero no es igual ni a 3 ni a -3.
g. $x < -6$ o bien $x > 6$.
h. $x - 6 > 4$ o bien $x - 6 < -4$.
i. El número de horas, x, que una máquina opera en forma eficiente, difiere de 105 en menos de 3.
j. El ingreso promedio mensual, x, (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para señalar que x y μ difieren en un valor no mayor de σ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2, de dos productos, no pueden diferir en más de 2 (unidades monetarias cualesquiera).

14. Encuentre todos los valores de x tales que $|x - \mu| \leq 2\sigma$.

En los Problemas **15-36**, *resuelva la desigualdad o la ecuación dada.*

15. $|x| = 7$.
16. $|-x| = 2$.
17. $\left|\frac{x}{3}\right| = 2$.
18. $\left|\frac{4}{x}\right| = 8$.
19. $|x - 5| = 8$.
20. $|4 + 3x| = 2$.
21. $|5x - 2| = 0$.
22. $|7x + 3| = x$.
23. $|7 - 4x| = 5$.
24. $|1 - 2x| = 1$.
25. $|x| < 4$.
26. $|-x| < 3$.
27. $\left|\frac{x}{4}\right| > 2$.
28. $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$.
29. $|x + 7| < 2$.
30. $|5x - 1| < -6$.
31. $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.
32. $|1 - 3x| > 2$.
33. $|5 - 2x| \leq 1$.
34. $|4x - 1| \geq 0$.
35. $\left|\frac{3x-8}{2}\right| \geq 4$.
36. $\left|\frac{x-8}{4}\right| \leq 2$.

37. En análisis estadístico, la desigualdad de Tchebyscheff (o Chebyshev) establece que si x es una variable aleatoria, μ es su media y σ es su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \leq \frac{1}{h^2}.$$

Determine los valores de x para los cuales $|x - \mu| > h\sigma$.

38. En la fabricación de unos artefactos, la dimensión promedio de una parte es de 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte no difiere del promedio en más de 0.005 cm.

3.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 3.1 costos fijos, gastos generales, costos variables, costos totales, ingresos totales, utilidades

Sección 3.2 $a < b$, $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$, $a < x < b$, desigualdad, sentido de una desigualdad, desigualdad equivalente, desigualdad lineal, $-\infty < x < \infty$, intervalo abierto, intervalo cerrado

Sección 3.4 valor absoluto, $|x|$

RESUMEN

Cuando se tiene un problema expresado en forma verbal no se da una ecuación. Más bien, se le debe plantear traduciendo los datos verbales a una ecuación (o desigualdad). A esto se le denomina *modelación matemática*. Es importante leer primero el problema más de una vez para comprender claramente qué datos se proporcionan y qué es lo que se pide calcular o determinar. Después, se elige una letra para representar la cantidad desconocida que se desea hallar. Se utilizan las relaciones y los hechos que se dan en el problema y se les traduce a una ecuación que incluye la letra. Finalmente se resuelve la ecuación y se ve si la solución contesta lo que se pedía. En ocasiones, la solución de la *ecuación* no es la respuesta para el *problema*, pero puede resultar útil para obtenerla.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son:

$$\text{costos totales} = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

$$\text{ingresos totales} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales}.$$

Los símbolos $<$, $\leq$, $>$, y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, que es una afirmación de que un número es, por ejemplo, menor que otro número. Tres operaciones básicas que, cuando se aplican a una desigualdad, garantizan el tener otra desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número en ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo, e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones sirven para resolver desigualdades lineales (aquéllas que se pueden expresar en la forma $ax + b < 0$ o bien $ax + b \leq 0$, en donde $a \neq 0$).

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad |x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

Se interpreta $|a - b|$ o bien $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución para la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo expresado por $-d < x < d$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos, a saber los que están dados por $x < -d$ y $x > d$. Tres propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,
3. $|a - b| = |b - a|$.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-15** *resolver la ecuación o desigualdad.*

1. $3x - 8 \geq 4(x - 2)$.

2. $2x - (7 + x) \leq x$.

3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$.

4. $-2(x + 6) > x + 4$.

5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$.

6. $2(4 - \frac{3}{5}q) < 5$.

7. $\frac{x + 1}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$.

8. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{x}{4}$.

9. $\frac{1}{4}s - 3 \leq \frac{1}{8}(3 + 2s)$.

10. $\frac{1}{3}(t + 2) \geq \frac{1}{4}t + 4$.

11. $|3 - 2x| = 7$.

12. $\left|\frac{5x - 8}{13}\right| = 0$.

13. $|4t - 1| < 1$.

14. $4 < \left|\frac{2}{3}x + 5\right|$.

15. $|3 - 2x| \geq 4$.

16. Una utilidad de 40% sobre el precio de venta de un producto, ¿es equivalente a qué utilidad porcentual sobre el costo?

17. Cierto día se negociaron 1132 emisiones diferentes en la bolsa de valores de Nueva York. Había 48 emisiones que mostraban más un aumento que disminución, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron reducciones?

18. El impuesto sobre la renta en cierto estado es de 6%. Si se tiene un total de \$3017.29 en compras, incluyendo impuestos, en el curso de un año, ¿qué tanto de esa cantidad corresponde al impuesto?

19. Una compañía fabricará un total de 10,000 unidades de un producto en las fábricas A y B. Los datos disponibles se muestran en la tabla que aparece enseguida.

	Fábrica A	Fábrica B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30,000	\$35,000

La compañía ha decidido asignar entre las dos plantas no más de \$117,000 (dólares) para los costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que se deben fabricar en la planta industrial A?

20. Una compañía va a remplazar dos tanques cilíndricos de almacenamiento de petróleo, por otro tanque nuevo. Los tanques antiguos tienen cada uno 16 pie de altura. Uno tiene un radio de 15 pie, y el otro, de 20. El tanque nuevo tendrá también 16 pie de altura. Determine su radio si debe tener el mismo volumen que los dos tanques reemplazados juntos. (*Sugerencia:* El volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, en donde r es el radio y h es la altura.)

APLICACIÓN PRÁCTICA

Grabación de calidad en video grabadoras*

Lo que sigue es un entretenido análisis de la grabación con videograbadoras e ilustra los conceptos matemáticos de este capítulo.

Si usted es una de las millones de personas que poseen una grabadora de videocasetes (VCR, de *videocassette recorder)* habrá presenciado cuán conveniente es grabar programas de televisión para verlos posteriormente. Aquí aprenderá cómo lograr una grabación de mejor calidad con esta maravilla para el entretenimiento casero.

Si su VCR tiene un formato VHS, es muy probable que tenga la alternativa de elegir las velocidades de operación stándar (SP), larga (LP) o superlarga o extendida (SLP/ EP). La SP (*Standard play*) en la velocidad mayor y ofrece la mejor calidad de imagen. La LP (*Long play*) es una velocidad menor que ofrece también menor calidad de grabación, y la SLP (*Super long play*) que es la más lenta, ofrece la menor calidad de imagen. Con la videocinta común T-120, el tiempo máximo de grabación en SP es de 2 horas. En LP, es de 4 y en SLP, es de 6 horas. En el análisis que sigue puede suponerse que estos tiempos de grabación son exactos y que la cantidad de cinta por utilizar cambia de manera uniforme con el tiempo de grabación.

Si se desea grabar una película que no tenga más de 2 horas de duración, es evidente que debe utilizarse SP para lograr la mejor calidad de imagen. Sin embargo, para la grabación de una película de 3 horas en una sola cinta T-120, el utilizar sólo la velocidad SP podría resultar en que se llenara la cinta una hora antes de la terminación de la película. Se puede resolver esta dificultad utilizando en SP/VE, junto con otra velocidad, para asegurarse de que se maximiza el tiempo en SP.

Por ejemplo, puede comenzarse en LP, y después, terminar la grabación en SP/VE. Es evidente que el problema consiste en determinar cuándo se debe realizar el cambio a SP. Si t representa el tiempo, en horas, en que se utiliza LP, entonces faltaría por grabar $3 - t$ horas de película. Como la rapidez de la cinta en la modalidad LP es de 1/4 de cinta por hora, y en SP es de 1/2 cinta por hora, la porción de cinta que se utiliza en LP es $t/4$ y la porción que se emplea en SP es $(3 - t)/2$.

* Adaptado de Gregory N. Fiore, "An Application of Linear Equations to the VCR", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre 1988), 570-72. Con autorización de the National Council of Teachers of Mathematics.

La suma de estas porciones debe dar la unidad porque hay que usar la totalidad de la cinta. Por lo tanto, es necesario resolver una ecuación lineal:

$$\frac{t}{4} + \frac{3 - t}{2} = 1,$$

$$t + 2(3 - t) = 4,$$

$$6 - t = 4,$$

$$t = 2.$$

Por ello, se debe grabar en LP durante 2 horas, y después cambiar a VE para el tiempo restante: $3 - t = 3 - 2 = 1$ hora. Esto significa que una tercera parte de la película quedará registrada con la mejor calidad de imagen.

En vez de limitarse a una película de 3 horas, puede generalizarse el problema anterior para manejar una película que dure l horas, en donde $(2 < l \geq 4)$. Esta situación da como resultado:

$$\frac{t}{4} + \frac{l - t}{2} = 1,$$

Cuya solución es

$$t = 2l - 4.$$

En forma alternativa, se podría pensar que no hay gran diferencia entre las calidades de imagen con las velocidades LP y SLP. Si se desea comenzar en SLP y terminar con SP, se podría manejar una película de longitud l, en donde $(2 < l \geq 6)$. Si se utiliza t para representar el tiempo, en horas, durante el que se utiliza SLP, entonces

$$\frac{t}{6} + \frac{l - t}{2} = 1,$$

$$t + 3(l - t) = 6,$$

$$-2t + 3l = 6,$$

$$3l - 6 = 2t,$$

$$t = \frac{3}{2}l - 3.$$

Por ejemplo, con una película de 3 horas, se grabaría en SLP durante $t = 3/2(3) - 3 = 1\ 1/2$ horas, y después en SP durante $3 - 1\ 1/2 = 1\ 1/2$ horas. Esto indica que utilizar SLP en vez de LP produce, 1/2 horas más de grabación de calidad en SP. Como otro ejemplo, considérese la grabación de una película que dura 4 horas y 20 minutos. Aquí, $l = 4\ 1/3$ horas, por lo que se utilizaría VSL durante

$$t = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{3}\right) - 3 = 3\tfrac{1}{2} \text{ horas}$$

y se utilizaría SP durante el resto de la película.

Finalmente, supóngase que un programa de televisión tiene interrupciones comerciales, pero que se desea grabarlo eliminando los anuncios. Se puede manejar esto deteniendo la videograbadora VCR al comienzo del anuncio y volviendo a arrancar cuando termine. Suponiendo que se estima

que cada hora de un programa que dura l horas contiene c minutos de información comercial, entonces el tiempo total de anuncios en horas, es $lc/60$. Así que la longitud del programa continuo, sin comerciales, en horas es

$$l - \frac{lc}{60}.$$

Si se comienza grabando en SLP y después se cambia a SP, se tendrá

$$\frac{t}{6} + \frac{l - \frac{lc}{60} - t}{2} = 1,$$

en donde t es el tiempo, en horas, a SLP. Resolviendo esto se obtiene,

$$t + 3\left(l - \frac{lc}{60} - t\right) = 6,$$

$$t + 3l - \frac{lc}{20} - 3t = 6,$$

$$-2t = -3l + \frac{lc}{20} + 6$$

$$t = \frac{3}{2}l - \frac{c}{40}l - 3.$$

Por ejemplo, considérese un programa de 3 horas que tiene 6 minutos de comerciales por hora; es decir $l = 3$ y $c = 6$, por lo que

$$t = \frac{3}{2}(3) - \frac{6}{40}(3) - 3$$

$$= \frac{21}{20} \text{ hora}$$

$$= 1 \text{ hora y } 3 \text{ minutos}$$

Por ejemplo, considérese un programa de 3 horas que tiene 6 minutos de anuncios por hora; es decir, $l = 3$ y $c = 6$, por lo que

EJERCICIOS

1. Si se utilizan las velocidades LP y SP para grabar una película de 2½ horas, ¿qué tanto tiempo después de comenzar la película se debe cambiar de LP a SP?

2. Si se utilizan las modalidades SLP y SP para grabar un programa de 2½ horas, ¿cuántos minutos después del comienzo del programa se debe cambiar de SLP a SP?

3. Si se utilizan las modalidades de SLP y SP para grabar una película que dura dos horas y 40 minutos, ¿qué tanto tiempo después del principio de la película se debe cambiar de SLP a SP?

4. Se utilizan las modalidades de SLP y LP a fin de grabar una película de 3 horas. ¿Qué tanto tiempo después del inicio de la película se debe cambiar de SLP a SP, si el telespectador elimina 8 minutos de comerciales cada hora?

5. Resuelva de nuevo el Problema 4 si se utilizan las modalidades SP y LP

CAPÍTULO 4

Funciones y gráficas

4.1 Funciones

En el Siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del Cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más importantes en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del Cálculo.

En términos breves, una función es un tipo especial de relación de entrada y salida, o insumo y producto, que expresa cómo una cantidad (la *salida*) depende de otra cantidad (la *entrada*). Por ejemplo, cuando se invierte dinero a una tasa de interés, el interés I, (salida) depende del tiempo t (entrada) en que el dinero se invierte. Para expresar esta dependencia, se dice que "I es función de t". Relaciones funcionales como ésta se especifican normalmente por una fórmula que muestra qué es lo que se debe hacer a la entrada para evaluar la salida.

A fin de ilustrar lo anterior, supóngase que \$100 producen interés simple a una tasa anual del 6%. Se puede demostrar que el interés y el tiempo están relacionados mediante la fórmula.

$$I = 100(0.06)t, \tag{1}$$

en donde I está en unidades monetarias y t en años. Por ejemplo,

$$\text{si } t = \tfrac{1}{2}, \quad \text{entonces} \quad I = 100(0.06)(\tfrac{1}{2}) = 3. \tag{2}$$

Por tanto, la Fórmula (1) asigna a la entrada $\frac{1}{2}$, la salida 3. Se puede pensar que la Fórmula (1) define una *regla*: multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, lo cual se simboliza mediante la siguiente notación con flecha:

$$t \to I \quad \text{o bien} \quad t \to 100(0.06)t.$$

Esta regla es un ejemplo de una *función* en el siguiente sentido:

DEFINICIÓN

Una función es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. El conjunto de todos los números de entrada a los cuales se aplica la regla

se le denomina ***dominio*** *de la función. Al conjunto de todos los números de salida se le llama* ***ámbito*** *(o contradominio).*

Para la función del interés que se definió con la Fórmula (1), el número de entrada t no puede ser negativo ya que el signo menos no tiene sentido. Por tanto, el dominio consiste en todos los números no negativos; es decir, toda $t \geq 0$. De (2) cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3. Por consiguiente, 3 se encuentra en el ámbito.

Se ha estado utilizando el término *función* en un sentido restringido porque, en general, las entradas o las salidas no tienen que ser números. Por ejemplo, una lista de estados federados y sus capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida). Por lo tanto, se implica una función. Sin embargo, por el momento se considerarán sólo las funciones cuyos dominios y ámbitos están formados por números reales.

A una variable que representa números de entrada para una función se le denomina **variable independiente**. Una variable que representa números de salida se le llama **variable dependiente** pues su valor *depende* del valor de la variable independiente. Se dice que la variable dependiente es *función de* la variable independiente. Es decir, la salida es función de la entrada. De modo que, para la fórmula del interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la dependiente es I y entonces I es función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación (o fórmula)

$$y = x + 2 \tag{3}$$

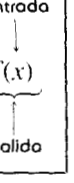
define a y como función de x. Expresa la regla: sumar 2 a x. Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. En consecuencia, si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la dependiente es y.

No todas las ecuaciones en x y y definen a esta última como función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, así que $y = \pm 3$. Por consiguiente, a la entrada 9 no se le asigna un solo número de salida sino *dos*: 3 y -3. Esto infringe la definición de función, y por ello y **no** es función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones en dos variables definen a cualquiera de ellas como función de la otra. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x, existe exactamente una salida $2x$. Consecuentemente, y es función de x. Sin embargo, despejando x en la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y hay exactamente una salida, $y/2$. Así que x es función de y.

Por lo general, se utilizan letras como f, g, h, F, G y otras, para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la Ecuación (3) anterior ($y = x + 2$) define y como función de x, en donde la regla consiste en sumar 2 a la entrada. Supóngase que se utiliza f para representar esta regla. Entonces se dice que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, se escribe $f(1) = 3$, lo cual se lee "f de 1 igual 3". De manera similar, $f(-4) = -2$. En términos generales, si x es cualquier entrada, se obtiene la siguiente notación:

$f(x)$, que se lee "f de x", significa el número de salida en el ámbito de f que que corresponde al número de entrada x en el dominio.



Por lo tanto, la salida $f(x)$ es el mismo que y. Pero dado que $y = x + 2$, se puede escribir $y = f(x) = x + 2$, o en forma más simple,

$$f(x) = x + 2.$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida que corresponde a la entrada 3, se reemplaza por 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5.$$

De la misma manera,

$$f(8) = 8 + 2 = 10,$$
$$f(-4) = -4 + 2 = -2.$$

Números de salida como $f(-4)$ reciben el nombre de **valores funcionales**. Se debe tener presente que se encuentran en el ámbito de f.

ADVERTENCIA
$f(x)$ **no** significa f multiplicada por x. $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

Con frecuencia, se definen las funciones por medio de la "notación funcional". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$ define la función g que asigna a un número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$.

$$g: \quad x \to x^3 + x^2.$$

Así que, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores funcionales son:

$$g(2) = 2^3 + 2^2 = 12,$$
$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0,$$
$$g(t) = t^3 + t^2,$$
$$g(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2.$$

Obsérvese que se llegó a $g(x + 1)$ reemplazando cada x en $x^3 + x^2$ por el número de entrada $x + 1$.

Cuando se hace referencia de la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, debe saberse que es posible denominar función a la ecuación misma. Por ello, se habla de la "función $g(x) = x^3 + x^2$", y de manera similar, de "la función $y = x + 2$."

Para ser más específicos acerca del dominio de una función que está dado por una ecuación, a menos que se especifique lo contrario, el dominio consiste en todos los números reales para los que la ecuación tiene sentido y produce valores funcionales que son números reales. Por ejemplo, supóngase que

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}.$$

Aquí se puede utilizar cualquier número real para x, exceptuando el 6, porque el denominador se convierte en cero cuando x es 6 (no se puede dividir entre 0). En consecuencia, se sobreentiende que el dominio de h es todos los números reales excepto el 6.

EJEMPLO 1

Hallar el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

No se puede dividir entre 0, así que se deben obtener los valores de x que hagan que el denominador se convierta en 0. Estos *no* pueden ser números de entrada. Consecuentemente, se iguala el denominador a 0 y se despeja x:

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática)},$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \qquad \text{(factorización)},$$

$$x = 2, -1.$$

Por lo tanto, el dominio de f está formado por todos los números reales *exceptuando* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$.

No se puede tener valores funcionales que impliquen números imaginarios. Para evitar las raíces cuadradas de números negativos, $2t - 1$ debe ser mayor que o igual a 0.

$$2t - 1 \geq 0,$$

$$2t \geq 1 \qquad \text{(sumando uno a ambos miembros)},$$

$$t \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(dividiendo a ambos miembros entre 2)}.$$

Por ello, el dominio está formado por todos los números reales t tales que $t \geq \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2

Dominio y notación funcional.

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Se puede utilizar para x cualquier número real y, por con siguiente, el dominio de g es todos los números reales.

Encuéntrese $g(z)$.
Reemplácese la x por las diversas variables en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por z da

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5.$$

Encuéntrese $g(r^2)$.
Reemplácese la x por las diversas variables en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por r^2 da

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5.$$

Encuéntrese $g(x + h)$.

$$\begin{aligned} g(x + h) &= 3(x + h)^2 - (x + h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5. \end{aligned}$$

ADVERTENCIA

Se deben evitar confusiones con la notación. En el Ejemplo 2, se determinó $g(x + h)$ reemplazando cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. **No** se debe escribir la función y después sumar h. Es decir, $g(x + h) \neq g(x) + h$.

$$g(x + h) \neq 3x^2 - x + 5 + h.$$

Tampoco se debe utilizar la ley distributiva con $g(x + h)$. Este símbolo **no** es análogo al de la multiplicación.

$$g(x + h) \neq g(x) + g(h).$$

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x^2$, *determinar* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Aquí, el número rador es una diferencia de valores funcionales.

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h.$$

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, la anterior función de interés $I = 100(0.06)t$, tiene que $t \geq 0$ pues t representa tiempo. En el Ejemplo 4 se presenta otra ilustración.

EJEMPLO 4

Supóngase que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad, p, de cierto producto, y el número de unidades, q, de ese producto que los consumidores adquirirán (es decir, la demanda) por semana, a ese precio. A esta ecuación se le denomina *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces a cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \rightarrow \frac{100}{q} = p.$$

Por ejemplo,

$$20 \rightarrow \frac{100}{20} = 5;$$

es decir, cuando q es igual 20, entonces p es igual a 5. En consecuencia, el precio p es función de la cantidad que se demanda, q. Aquí, q es la variable independiente y p es la dependiente. Dado que q no puede ser 0 (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa cantidad de productos), el dominio es todos los valores de q tales que $q > 0$. A esta función se le denomina **función de demanda**.

Ya se ha visto que una función es en esencia una *correspondencia* mediante la cual se asigna exactamente un número de salida en el contradominio a cada uno de los números de entrada del dominio. Para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$, se muestran mediante las flechas de la Figura 4.1 algunos ejemplos de asignaciones. En el siguiente ejemplo se presenta una correspondencia funcional que no está dada por una fórmula algebraica.

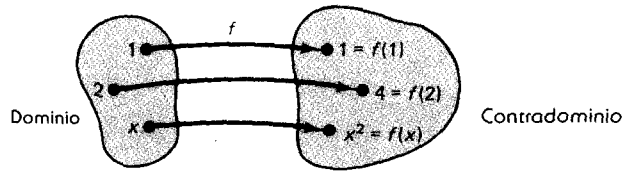


FIGURA 4.1

EJEMPLO 5

La tabla que aparece en la Figura 4.2 es un *programa de oferta*. Señala la correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proveerán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad, y viceversa.

Programa de oferta

p	q
Precio por unidad (en dólares)	Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

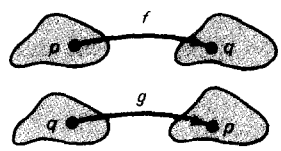


FIGURA 4.2.

Si p es la variable independiente, entonces q es función de p, es decir $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11, \quad f(600) = 14, \quad f(700) = 17, \quad \text{y} \quad f(800) = 20.$$

De manera similar, si q es la variable independiente, entonces p es función de q, es decir, $p = g(q)$, y así

$$g(11) = 500, \quad g(14) = 600, \quad g(17) = 700, \quad \text{y} \quad g(20) = 800.$$

Se llama a f y g **funciones de oferta**. Obsérvese en el programa de oferta que al aumentar el precio unitario, los fabricantes están dispuestos a ofrecer mayor cantidad de unidades por semana.

EJERCICIOS 4.1

En los Problemas **1-12**, *exprese el dominio de cada función.*

1. $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

2. $g(x) = \dfrac{x}{3}$.

3. $h(x) = \sqrt{x - 5}$.

4. $H(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

5. $F(t) = 3t^2 + 5$.

6. $H(x) = \dfrac{x}{x + 2}$.

7. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 5}$.

8. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$.

9. $G(y) = \dfrac{4}{y^2 - y}$.

10. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$.

11. $h(s) = \dfrac{4 - s^2}{2s^2 - 7s - 4}$.

12. $G(r) = \dfrac{2}{r^2 + 1}$.

En los Problemas **13-24**, *determine los valores funcionales para cada función.*

13. $f(x) = 5x$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$.

14. $H(s) = s^2 - 3$; $H(4)$, $H(\sqrt{2})$, $H(\frac{2}{3})$.

15. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8)$, $G(u)$, $G(u^2)$.

16. $f(x) = 7x$; $f(s)$, $f(t + 1)$, $f(x + 3)$.

17. $g(u) = u^2 + u$; $g(-2)$, $g(2v)$, $g(-x^2)$.

18. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16)$, $h\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $h(1 - x)$.

19. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x + h)$.

20. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0)$, $H(2)$, $H(t - 4)$.

21. $g(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 4}$; $g(5)$, $g(3x)$, $g(x + h)$.

22. $H(x) = \sqrt{4 + x}$; $H(-4)$, $H(-3)$, $H(x + 1) - H(x)$.

23. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0)$, $f(64)$, $f(\frac{1}{8})$.

24. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32)$, $g(-64)$, $g(t^{10})$.

En los Problemas **25-28**, *determine (a)* $f(x + h)$ *y (b)* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$; *simplifique las respuestas.*

25. $f(x) = 3x - 4$.

26. $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

27. $f(x) = x^2 + 2x$.

28. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

En los Problemas **29-32**, *¿es y función de x? ¿Es x función de y?*

29. $y - 3x - 4 = 0$.

30. $x^2 + y = 0$.

31. $y = 7x^2$.

32. $x^2 + y^2 = 1$.

33. La fórmula para el área A de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área función del radio?

34. Supóngase que $f(b) = ab^2 + a^2b$. (a) Determine $f(a)$. (b) Evalúe $f(ab)$.

35. Un negocio con capital original de \$10,000 tiene ingresos y gastos semanales de \$2000 y \$1600, respectivamente. Si se retienen en el negocio todas las utilidades, exprese el valor V en el negocio al final de t semanas como función de t.

36. Si una máquina que cuesta \$30,000 (dólares) se deprecia 2% de su valor original cada año, encuéntrese una función f que exprese su valor V después de haber transcurrido t años.

37. Si se venden q unidades de cierto producto (q es no negativo), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?

38. Una compañía de seguros examinó los historiales de un grupo de personas hospitalizadas por una cierta enfermedad. Se descubrió que la proporción total de los que había sido dada de alta al final de t días de hospitalización está dada por $f(t)$, en donde

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Evaluar (a) $f(0)$, (b) $f(100)$, y (c) $f(300)$. (d) ¿Al final de cuántos días se había dado de alta al 0.999 del grupo.

39. Se llevó a cabo un experimento psicofísico para analizar la respuesta humana a choques eléctricos*.

* Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

Los sujetos recibieron un choque de cierta intensidad. Se les pidió asignar una magnitud de 10 a este choque específico al cual se le denominó estímulo normal. Después se les aplicaron otros choques (estímulos) de diversas intensidades. Para cada uno de ellos, la respuesta R debía ser un número que señalara la magnitud percibida del choque, con respecto a la del estímulo normal. Se encontró que R era función de la intensidad I del choque (I está en microamperes) y se evaluó de la siguiente manera:

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500}, \qquad 500 \leq I \leq 3500.$$

Evalúese (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Supóngase que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprésese $f(2I_0)$ en términos $f(I_0)$. ¿Qué efectos tiene sobre la respuesta duplicar la intensidad?

40. En un experimento de aprendizaje de asociación pareada,† la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de ensayos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

en donde el valor estimado de c es 0.344. Encuéntrese $P(1)$ y $P(2)$ utilizando este valor de c.

41. A la tabla adyacente se la denomina *programa de demanda*. Da la correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandan (es decir, compran) a tal precio. (a) Si $p = f(q)$, enliste los números del dominio de f. Determine $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, enliste los números del dominio de g. Evalúe $g(10)$ y (17).

PRECIO UNITARIO p	CANTIDAD SEMANAL DEMANDADA, q
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

4.2 Funciones especiales

En esta sección se estudiarán las funciones que tienen formas y representaciones especiales. Se comienza con la que es quizá el tipo más simple, la *función constante*.

EJEMPLO 1

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h es todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2, \qquad h(-387) = 2, \qquad h(x + 3) = 2.$$

A h se le denomina *función constante*. En términos más generales, se tiene la siguiente definición:

> Una función de la forma $h(x) = c$, En donde c es una *constante*, se denomina **función constante**.

Las funciones constantes pertenecen a una clase más amplia de funciones, a las que se llama *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

† D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

en donde n es un número entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ son constantes con $c_n \neq 0$ se denomina **función polinomial** (en x). Al número n se le denomina **grado** de la función, y c_n es el **coeficiente inicial**. Así, $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es una función polinomial de grado 2, con coeficiente inicial 3. De la misma manera, $g(x) = 4 - 2x$ tiene el grado 1 y coeficiente inicial -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o bien 2 reciben el nombre de **funciones lineales** o **cuadráticas**, respectivamente. Por ello, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Obsérvese que una función constante diferente de 0, tal como $f(x) = 5$ [que puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. También se considera que la función constante $f(x) = 0$ es una función polinomial pero no se le asigna grado. El dominio de cualquier función polinomial es todos los números reales.

EJEMPLO 2

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es un polinomio (o función polinomial) de grado 3 y con coeficiente principal 1.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Como $f(x) = 2x^{-3}$ y el exponente de x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma apropiada para ser polinomio. De manera similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es un polinomio porque $g(x) = x^{1/2}$.

Otro tipo de *función racional*, en la que intervienen en los polinomios.

> A una función que es cociente de funciones polinomiales se le denomina **función racional**.

EJEMPLO 3

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional puesto que tanto el numerador como el denominador son polinomios. Obsérvese que esta función racional no está definida para $x = -5$.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional puesto que $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial es también una función racional.

En ocasiones, se requiere más de una ecuación para definir una función como se muestra en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq s < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq s \leq 2, \\ s - 3, & \text{si } 2 < s \leq 3 \end{cases}$$

A ésta se le denomina **función compuesta** porque está definida mediante más de una ecuación. Aquí, s es la variable independiente y el dominio de F es todas las s tales que $-1 \leq s \leq 3$. El valor de s determina qué ecuación se debe utilizar.

Determinar $F(0)$: Dado que $-1 \leq 0 < 1$, se tiene que $F(0) = 1$.

Determinar $F(2)$: Dado que $1 \leq 2 \leq 2$, se tiene que $F(2) = 0$.

Evaluar $F(\frac{9}{4})$: Puesto que $2 < \frac{9}{4} \leq 3$, se sustituye s por $\frac{9}{4}$ en $s - 3$.

$$F(\tfrac{9}{4}) = \tfrac{9}{4} - 3 = -\tfrac{3}{4}.$$

EJEMPLO 5

A la función $f(x) = |x|$ se le denomina *función valor absoluto*. Recuérdese que el **valor absoluto** o **magnitud** de un número real x se denota por $|x|$ y está definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, el dominio de f es todos los números reales. Algunos valores funcionales son:

$$f(16) = |16| = 16,$$
$$f(-\tfrac{4}{3}) = |-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3},$$
$$f(0) = |0| = 0.$$

En los siguientes ejemplos se utiliza la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, siendo r un entero positivo, se lee "**factorial** r". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r.$$

Se define que $0!$ es igual a 1.

EJEMPLO 6

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

b. $3!(6-5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6.$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \dfrac{24}{1} = 24.$

EJEMPLO 7

Supóngase que se aparean dos cobayos (o conejillos de indias) y se producen exactamente cinco crías. Se puede probar que, en ciertas condiciones, la probabilidad P de que exactamente r de las crías sean de color café y las restantes negras es función de r digamos $P = P(r)$, en donde

$$P(r) = \frac{5!(\frac{1}{4})^r(\frac{3}{4})^{5-r}}{r!(5-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5.$$

La letra P en $P = P(r)$ se utiliza de dos maneras. En el lado derecho, P representa la regla de la función. En el lado izquierdo, P representa la variable dependiente. El dominio de P es todos los enteros de 0 a 5, inclusive. Encontrar la probabilidad de que exactamente tres conejillos de indias sean de color café.

Se desea encontrar $P(3)$.

$$P(3) = \frac{5!(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2}{3!2!} = \frac{120(\frac{1}{64})(\frac{9}{16})}{6(2)} = \frac{45}{512}.$$

EJERCICIOS 4.2

En los Problemas **1-4**, *encuentre el dominio de cada función.*

1. $H(z) = 16.$

2. $f(t) = \pi.$

3. $f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{si } x > 1, \\ 4, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x = 3, \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$

En los Problemas **5-8**, *exprese, (a) el grado, y (b) el coeficiente inicial de la función polinomial dada.*

5. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6.$

6. $f(x) = x.$

7. $f(x) = 2 - 3x^4 + 2x.$

8. $f(x) = 9.$

En los Problemas **9-14**, *obtenga los valores funcionales para cada función.*

9. $f(x) = 8$; $f(2)$, $f(t+8)$, $f(-\sqrt{17})$.

10. $g(x) = |x-3|$; $g(10)$, $g(3)$, $g(-3)$.

11. $F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$ $F(10)$, $F(-\sqrt{3})$, $F(0)$, $F(-\frac{18}{5})$.

12. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ 3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$; $f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$.

13. $G(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 3, \\ 2 - x, & \text{si } x < 3; \end{cases}$ $G(8)$, $G(3)$, $G(-1)$, $G(1)$.

14. $h(r) = \begin{cases} 3r - 1, & \text{si } r > 2, \\ r^2 - 4r + 7, & \text{si } r < 2; \end{cases}$ $h(3)$, $h(-3)$, $h(2)$.

En los Problemas **15-20** *determine el valor de cada expresión.*

15. $6!$. **16.** $0!$. **17.** $(4 - 2)!$. **18.** $5! \cdot 3!$. **19.** $\dfrac{5!}{4!}$. **20.** $\dfrac{8!}{5!(8 - 5)!}$.

21. En la fabricación de un componente de una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850 (dólares) y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad fabricada. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como función lineal del número q de unidades que se fabrican. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

22. Si se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés anual simple de r durante t años, exprese el monto total acumulado de capital e intereses, como función de t. ¿Es el resultado función lineal de t?

23. En ciertas condiciones, si dos padres con ojos cafés tienen exactamente 3 hijos, la probabilidad P de que haya exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, en donde,

$$P(r) = \frac{3!(\frac{1}{4})^r(\frac{3}{4})^{3-r}}{r!(3 - r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3.$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan ojos azules.

24. En el Ejemplo 7 halle la probabilidad de que las 5 crías sean cafés.

25. Se cultivan bacterias en un cierto experimento. El tiempo t (en horas) que se requiere para que se duplique el número de bacterias (tiempo de generación) es función de la temperatura T(en °C) del cultivo. Si esta función está dada por*

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39, \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f, y (b) encontrar $f(30)$, $f(36)$, y $f(39)$.

4.3 Combinaciones de funciones

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear otra nueva. Supóngase que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x.$$

Sumando $f(x)$ y $g(x)$, se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Esta operación define una nueva función denominada **suma** de f y g, y que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Es decir,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10.$$

* Adaptado de F.K.E. Imrie y A.J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein* II, ed. S.R. Tannenbaum y D.I.C. Wang (Cambridge, Mass; MIT Press, 1975).

En general, para cualesquiera funciones f y g, se define la **suma** $f + g$, **diferencia** $f - g$, **el producto** fg y el **cociente** $\frac{f}{g}$:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Entonces, para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, se tiene

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x,$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3,$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

EJEMPLO 1

Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x$, determinar *(a)* $(f + g)(x)$, *(b)* $(f - g)(x)$, *(c)* $(fg)(x)$, y *(d)* $\frac{f}{g}(x)$.

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1.$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2.$

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x.$

d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}.$

También se pueden combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y aplicando después la otra función al resultado. Por ejemplo, supóngase que $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3(2) = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \xrightarrow{g} 6.$$

En seguida, se hace que la salida 6 se convierta en la entrada para f.

$$f(6) = 6^2 = 36,$$

* En cada una de las cuatro combinaciones se supone que x está tanto en el dominio de f como en el dominio de g. En el cociente no se permite que ningún valor x haga que $g(x)$ sea igual a 0.

de modo que f envía 6 hacia 36.

$$6 \xrightarrow{f} 36.$$

Aplicando primero g y después f, se envía 2 hacia 36.

$$2 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36.$$

En términos más generales, se reemplaza al 2 por una x, que está en el dominio de g (véase la Figura 4.3). Aplicando g a x, se obtiene el número $g(x)$, el cual se supone se encuentra en el dominio de f. Aplicando f a $g(x)$, se obtiene $f(g(x))$, que se lee "f de g de x", y que se encuentra en el ámbito o contradominio de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f define una función a la que se denomina función "compuesta" y se denota por $f \circ g$. Esta función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$ [véase la flecha de abajo en la Figura 4.3]. Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Se puede considerar a $f(g(x))$ como una función de función.

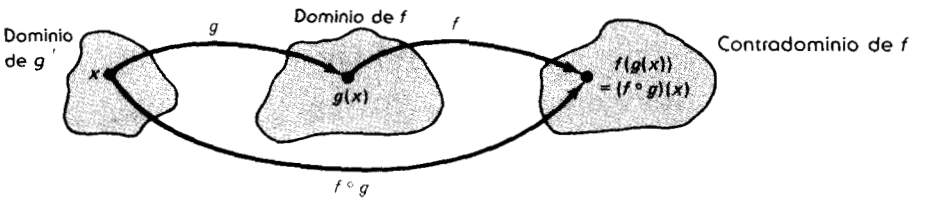


FIGURA 4.3

DEFINICIÓN

Si f y g son funciones, la ***composición de f con g*** *es la función $f \circ g$ definida por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

en donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x que se encuentran en el dominio de g tales que $g(x)$ se halle en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, se puede obtener una forma simple para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2.$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, tal como se vio antes.

EJEMPLO 2

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$. Determinar (*a*) $(f \circ g)(x)$ y (*b*) $(g \circ f)(x)$.

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$ y f toma la raíz cuadrada de un número de entrada, que es $g(x)$ o bien $x + 1$. De manera que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}.$$

El dominio de g es todos los números reales x, y el dominio de f es todos los números reales no negativos. Por tanto, el dominio de la composición es todas las x para las cuales $g(x) = x + 1$ es no negativo. Es decir, el dominio es todas las $x \geq -1$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$ y g suma 1 a un número de entrada, que es $f(x)$ o bien $\sqrt{x}$. Por tanto, g suma 1 a $\sqrt{x}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1.$$

El dominio de f es todas las $x \geq 0$ y el dominio de g es todos los números reales. Consecuentemente, el dominio de la composición es todas las $x \geq 0$ para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, es decir, todas las $x \geq 0$.

ADVERTENCIA

Por lo general, $f \circ g \neq g \circ f$. En el Ejemplo 2, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1}$, pero $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$. También, es importante no confundir, $f(g(x))$ con el producto $f(x)g(x)$. En este caso,

$$f(g(x)) = \sqrt{x + 1}$$

$$\text{pero} \quad f(x)g(x) = \sqrt{x}(x + 1).$$

EJEMPLO 3

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$ y $G(p) = 2p + 1$, determinar (*a*) $F(G(p))$ y (*b*) $G(F(1))$.

a. $F(G(p)) = F(2p + 1) = (2p + 1)^2 + 4(2p + 1) - 3 = 4p^2 + 12p + 2.$

b. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$

En Cálculo es necesario en ocasiones considerar una función específica como una composición de dos funciones más simples, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

La función $h(x) = (2x - 1)^3$ puede considerarse como una composición. Obsérvese que $h(x)$ se obtiene determinando $2x - 1$ y elevando al cubo el resultado. Supóngase que se hace $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x - 1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

lo cual muestra que h es una composición de dos funciones.

EJERCICIOS 4.3

1. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x + 4$, encontrar lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$.

b. $(f + g)(0)$.

c. $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$.

e. $(fg)(-2)$.

f. $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$.

h. $(f \circ g)(3)$.

i. $(g \circ f)(x)$.

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 4 + x$, encontrar lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(4)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(2)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(2)$.

3. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + x$, encontrar lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-\frac{1}{2})$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(-\frac{1}{2})$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-3)$.

4. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 4$, encontrar lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(\frac{1}{2})$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(4)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(100)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, determinar $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \dfrac{4}{p}$ y $g(p) = \dfrac{p - 2}{3}$, encontrar $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

7. Si $F(t) = t^2 + 3t + 1$ y $G(t) = \dfrac{2}{t - 1}$, encontrar $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(s) = \sqrt{s}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, determinar $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(s)$.

9. Si $f(w) = \dfrac{1}{w^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, determinar $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(w)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 3$, hallar $(f \circ f)(x)$.

En los Problemas **11-16,** *obtener las funciones f y g tales que* $h(x) = f(g(x))$.

11. $h(x) = (4x - 3)^5$.

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

13. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$.

14. $h(x) = (3x^3 - 2x)^3 - (3x^3 - 2x)^2 + 7$.

15. $h(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x + 1}{3}}$.

16. $h(x) = \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + 2}$.

17. Un fabricante determina que el número total de unidades de producción al día, q, es función del número de empleados, m, en donde $q = f(m) = (40m - m^2)/4$. Los ingresos totales, r, que reciben por la venta de q unidades están dados por la función g, en donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

18. Se han llevado a cabo estudios acerca de las relaciones estadísticas entre la posición social, la educación y los ingresos de las personas.* Si se utiliza

* R.K. Leik y B.F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975).

S para denotar un valor numérico para la posición social con base en los ingresos anuales I, y se supone que para cierta población

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}.$$

Se considera, además, que los ingresos I de una persona son función del número de años de escolaridad E, en donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}.$$

Evalúe $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que esta función describe?

4.4 Gráficas en coordenadas rectangulares

Un **sistema de coordenadas rectangulares** (o **cartesianas**) permite especificar y ubicar puntos en un plano. También ofrece una forma geométrica de representar ecuaciones con dos variables, así como funciones.

Se trazan en un plano dos rectas de números reales, denominadas ejes *coordenados*, perpendiculares entre sí, de manera que sus orígenes coincidan, como se muestra en la Figura 4.4. A su punto de intersección se le denomina *origen* del sistema coordenado. Se denomina a la recta horizontal *eje x*, y a la recta vertical, *eje y*. No es necesario que la distancia unitaria sobre el *eje x* sea igual a la del *eje y*.

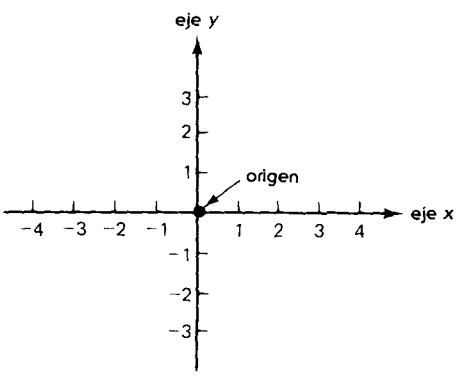


FIGURA 4.4

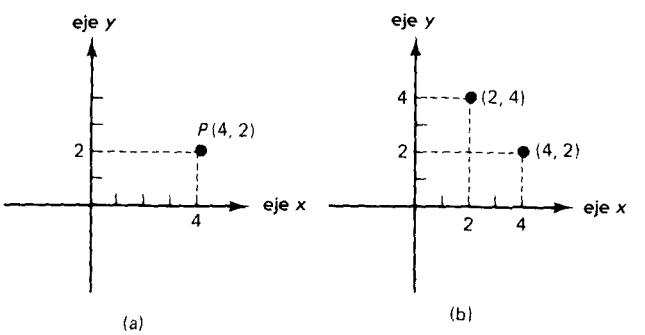


FIGURA 4.5

El plano que contiene a los ejes coordenados se denomina *plano coordenado rectangular*, o en términos más simples, *plano x, y*. Se puede identificar a cada uno de los puntos que se localizan sobre un plano x, y, para señalar su posición. Para identificar el punto P de la Figura 4.5(a) se trazan rectas perpendiculares desde el punto P, hacia los ejes x y y. Estas rectas cortan a los ejes en los puntos 4 y 2, respectivamente. Por ello, P determina dos números: 4 y 2. Se dice que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** (4, 2). La palabra "ordenado" es importante. En la Figura 4.5(b) el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que el (2, 4):

$$(4, 2) \neq (2, 4).$$

En general, si P es cualquier punto, entonces sus coordenadas rectangulares estarán dadas por un par ordenado de la forma (x, y) (véase la Figura 4.6). A x se le denomina *abscisa* o *coordenada x* de P y a y, *ordenada* o *coordenada y* de P.

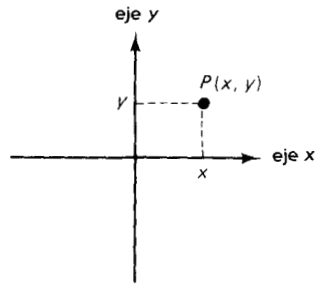


FIGURA 4.6

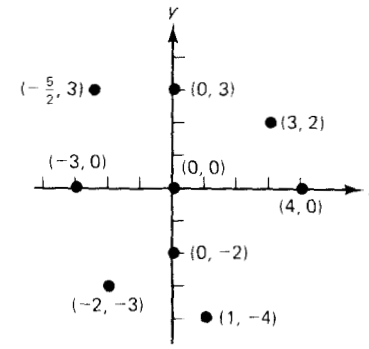


FIGURA 4.7

Así, a cada punto de un determinado plano coordenado se le puede asociar exactamente un par ordenado (x, y) de números reales. También, debe resultar evidente que a cada par ordenado (x, y) de números reales puede asociarse exactamente un punto en ese plano. Dado que existe una *correspondencia de uno a uno* entre los puntos del plano y todos los pares ordenados de los números reales, se puede hacer referencia a un punto P con abscisa x y ordenada y como el punto (x, y), o como $P(x, y)$. Además pueden utilizarse en forma indistinta las palabras "punto" y "par ordenado".

En la Figura 4.7 se señalan las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está ubicado a una unidad a la derecha del eje y y a cuatro unidades por debajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todos los puntos que se encuentran sobre el eje y es 0, y la coordenada y de todos los puntos que se encuentran sobre el eje x es 0.

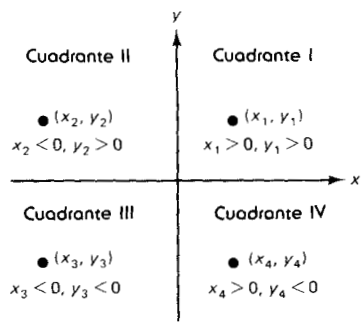


FIGURA 4.8

Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones a las que se denomina *cuadrantes* (Figura 4.8). Por ejemplo, el cuadrante I contiene todos los puntos (x_1, y_1) con $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos que se encuentran sobre los ejes no quedan en ningún cuadrante.

Utilizando un sistema de coordenadas rectangulares, se pueden representar en forma geométrica ecuaciones en dos variables. Por ejemplo, considérese la siguiente:

$$y = x^2 + 2x - 3. \tag{1}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y un valor de y que hacen que la ecuación se verifique. Por ejemplo, si $x = 1$, sustituyendo en la ecuación (1)

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0.$$

En consecuencia, $x = 1$, $y = 0$ es una solución. De modo análogo,

$$\text{si } x = -2, \qquad \text{entonces} \qquad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3,$$

y de esta manera, $x = -2$, $y = -3$ es también una solución. Eligiendo otros valores para x se puede obtener mayor cantidad de soluciones [véase la Figura 4.9(a)]. Es claro que existe una cantidad infinitamente grande de soluciones.

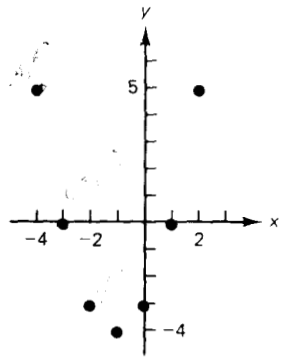
Cada solución genera un punto (x, y). Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la Figura 4.9(b) se han trazado los puntos correspondientes a las soluciones que aparecen en la tabla.

Dado que la ecuación tiene una cantidad infinitamente grande de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo se requiere obtener la forma general de la gráfica. Por esta razón se traza una cantidad suficiente de puntos para que pueda conjeturarse su forma específica. Después se unen esos puntos mediante una curva alisada, en los casos en que las condiciones lo permitan. Se comienza con el punto que tiene la menor coordenada x, es decir $(-4, 5)$, y se avanza por los puntos que tienen coordenadas cada vez mayores de x. Se termina con el punto que tiene la mayor coordenada x, es decir, $(2, 5)$ [véase la Figura 4.9(c)]. Por supuesto, conforme mayor número de puntos se ubican, tanto mejor es la gráfica que se obtiene. Aquí se supuso que la gráfica se extiende en forma indefinida hacia arriba, lo cual se señala mediante flechas.

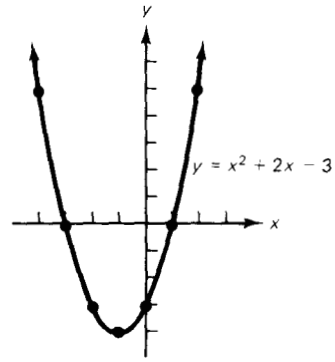
Al punto $(0, -3)$, que es donde la curva corta al eje y se le denomina **intersección** y. (Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva corta al eje) x se denominan **intersecciones** x. En general, se tiene la siguiente definición.

x	y
−4	5
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0
2	5

(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.9

DEFINICIÓN

La **intersección** x *de la gráfica de una ecuación en* x, y *es el punto donde la gráfica corta al eje* x. *La* **intersección** y *es el punto en donde la gráfica corta al eje* y.*

* **(N. del R.)** Se denominan por lo común **intercepciones** x y y (a las coordenadas no cero de las **intersecciones** x y y, que se llaman también "abscisa en el origen" y "ordenada en el origen". (F.P.)

Para evaluar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x, y, en primer lugar se toma $y = 0$ y se resuelve la ecuación restante para evaluar x. Para contrar las intersecciones y, en primer lugar se toma $x = 0$ y se despeja el valor de y. Por ejemplo, para encontrar las intersecciones x de la gráfica de $(y = x^2 + 2x - 3)$, haciendo $y = 0$ y despejando x, se obtiene

$$0 = x^2 + 2x - 3,$$

$$0 = (x + 3)(x - 1)$$

$$x = -3, 1.$$

Por ello, las intersecciones x son (-3, 0) y (1, 0), como se vio antes. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3.$$

Por lo tanto, (0, −3) es la intersección y. Observe que una intersección x tiene como ordenada 0, y que una intersección y tiene como abscisa 0. Los puntos de intersección son útiles para situar según en forma precisa la gráfica según los ejes.

EJEMPLO 1

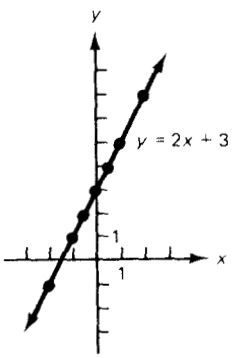
Determinar las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$, *y trazar la gráfica.* Si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x + 3 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Por ello, la intersección es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3.$$

Por tanto, la intersección y es (0, 3). En la Figura 4.10 se muestra una tabla que contiene otros puntos de la gráfica y su trazo.



x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1	2	−2
y	3	4	2	5	1	7	−1

FIGURA 4.10

EJEMPLO 2

Determinar las intersecciones x y y, si existen, de $s = \dfrac{100}{t}$, *y trazar la gráfica.*

Para el trazo se identifica el eje horizontal como t y el eje vertical como s (Figura 4.11). Como t no puede ser igual a 0 (la división entre cero no está definida), no existe intersección s. Por ello, la gráfica no tiene ningún punto que corresponda a $t = 0$. Además, no existe intersección t, porque si $s = 0$, entonces

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. En la Figura 4.11 se muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, en donde k es una constante diferente de 0, se denomina *hipérbola.*

t	5	−5	10	−10	20	−20	25	−25	50	−50
s	20	−20	10	−10	5	−5	4	−4	2	−2

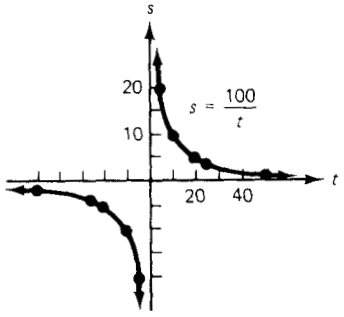


FIGURA 4.11

EJEMPLO 3

Determinar las intersecciones x, y de la gráfica $x = 3$ *y trace ésta.*

Se puede expresar $x = 3$ como una ecuación en las variables x, y describiendo $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tener cualquier valor, pero x debe ser 3. Como $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es (3, 0). No existe intersección y porque x no puede ser cero. Véase la Figura 4.12.

x	3	3	3
y	1	3	−2

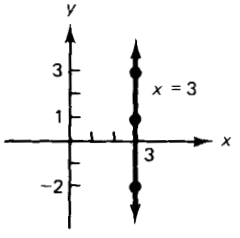


FIGURA 4.12

Además de ecuaciones, también pueden representarse funciones en un plano coordenado. Si f es una función con variable independiente x y variable dependiente y, entonces la gráfica de f es simplemente la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Consiste en todos los puntos (x,y), o bien $(x,f(x))$, en donde x se encuentra en el dominio de f. Al eje vertical se le puede identificar con y, o bien con $f(x)$, y se denomina el **eje de valores funcionales**. *Al eje horizontal siempre se le identifica con la variable independiente.*

EJEMPLO 4

Graficar $f(x) = \sqrt{x}$.

Véase la Figura 4.13. Se identifica el eje vertical con $f(x)$. Recuérdese que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Por consiguiente, $f(9) = \sqrt{9} = 3$, y no ± 3. Tampoco se pueden elegir valores negativos para x porque no se desea tener números imaginarios para $\sqrt{x}$. Es decir, debe hacerse que $x \geq 0$. Consideremos ahora las intersecciones x,y. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$; *o bien* $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Por ello, la intersección x y la intersección con el eje vertical son la misma, es decir (0, 0).

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2
9	3

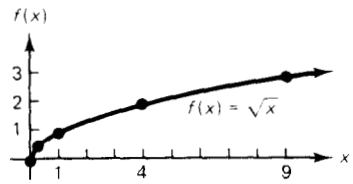
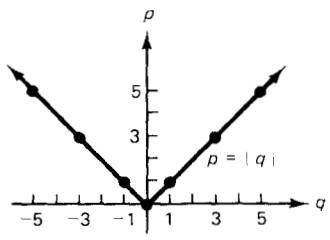


FIGURA 4.13

EJEMPLO 5

Graficar $p = G(q) = |q|$ *(función valor absoluto).*

Se utiliza la variable independiente q para identificar el eje horizontal. El eje de valores funcionales puede denominarse $G(q)$ o bien p (véase la Figura 4.14). Obsérvese que las intersecciones q y p son el mismo punto (0,0).



q	0	1	−1	3	−3	5	−5
p	0	1	1	3	3	5	5

FIGURA 4.14

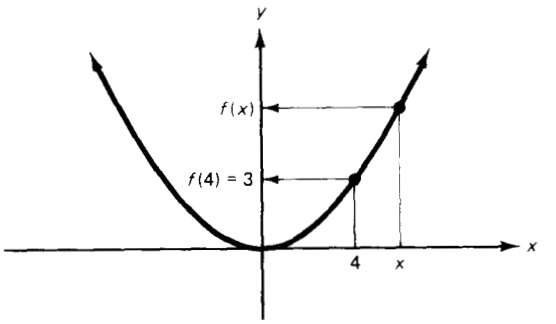


FIGURA 4.15

En la Figura 4.15 se muestra la gráfica de una cierta función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que correspondiendo al número de entrada x del eje horizontal se tiene el número de salida $f(x)$ en el vertical. Por ejemplo, correspondiendo a la entrada 4 se encuentra la salida 3, de manera que $f(4) = 3$. A partir de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, por lo que el dominio de f es todos los números reales. Obsérvese que el conjunto de todas las coordenadas y de los puntos que se encuentran sobre la gráfica es el conjunto de todos los números no negativos. Por ello, el ámbito o contradominio de f es todas las $y \geq 0$. Esto muestra que se puede hacer una conjetura "fundamentada" acerca del dominio y el ámbito de una función observando su gráfica. *En general, el dominio considte en todos los valores de x que están incluidos en la gráfica y el contradominio es todos los valores de y que se incluyen.* Por ejemplo, la Figura 4.13 implica que tanto el dominio como el contradominio de $f(x) = \sqrt{x}$ son números no negativos. En la Figura 4.14 resulta claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ es todos los números reales y que el ámbito es todas las $p \geq 0$.

EJEMPLO 6

La Figura 4.16 muestra la gráfica de una función F. Se supone que a la derecha de 4, la gráfica se repite en forma indefinida. Consecuentemente, el dominio de F es todas las $t \geq 0$. El ámbito es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores funcionales son

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(2) = 0, \quad F(3) = -1.$$

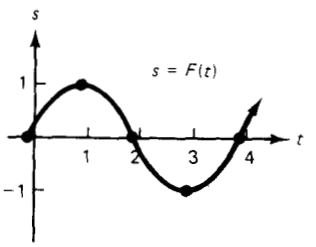


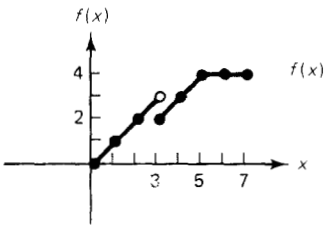
FIGURA 4.16

EJEMPLO 7

Graficar la siguiente función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 4, & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

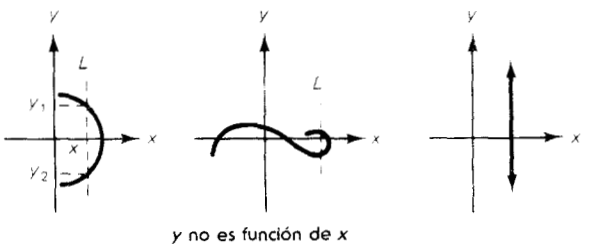
El dominio de f es $0 \leq x \leq 7$. La gráfica está dada en la Figura 4.17, en la que el *pequeño círculo claro* significa que el punto así marcado *no* está incluido en la gráfica. Obsérvese que el contradominio de f es todos los números reales y tales que $0 \leq y \leq 4$.



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 4, & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

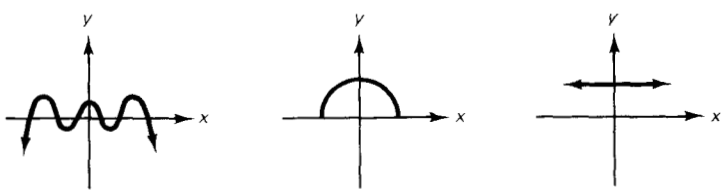
FIGURA 4.17



y no es función de *x*

FIGURA 4.18

Existe una forma sencilla de identificar si una curva es la gráfica de una función o no. En el diagrama del extremo izquierdo de la Figura 4.18, puede observarse que con la x dada existen *dos* valores asociados de y, es decir y_1 y y_2. Por ello la curva *no* es la gráfica de una función de x. Desde otro punto de vista, se obtiene la siguiente regla general, denominada **prueba de la recta vertical**. Si se puede trazar una recta *vertical L* que corte a una curva en cuando menos dos puntos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando no puede trazarse una recta vertical como ésta, la curva *sí* es la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la Figura 4.18 no representan funciones de x, pero sí las de la Figura 4.19.



Funciones de *x*

FIGURA 4.19

EJEMPLO 8

Graficar $x = 2y^2$.

En este caso, resulta más sencillo elegir valores de y y después encontrar los valores correspondientes de x. En la Figura 4.20 se muestra la gráfica. De acuerdo con la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	−1	2	−2	3	−3

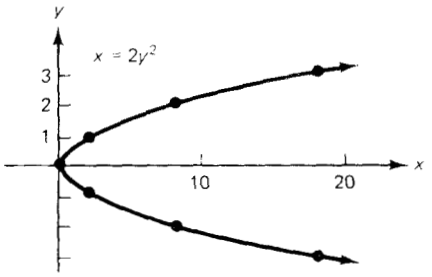


FIGURA 4.20

EJERCICIOS 4.4

En los Problemas **1** *y* **2**, *ubique e identifique cada uno de los puntos y diga en qué cuadrante está cada punto, si es posible.*

1. $(2, 7)$, $(8, -3)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(0, 0)$.

2. $(-4, 5)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(0, -6)$.

3. En la Figura 4.21(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$. (a) Evalúe $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ y $f(-2)$. (b) ¿Cuál es el dominio de f? (c) ¿Cuál es el ámbito (o contradominio) de f?

4. En la Figura 4.21(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Evalúe $f(0)$ y $f(2)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el ámbito de f?

5. En la Figura 4.22(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Evalúe $f(0)$, $f(1)$, y $f(-1)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el ámbito de f?

6. En la Figura 4.22(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Determine $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el ámbito de f?

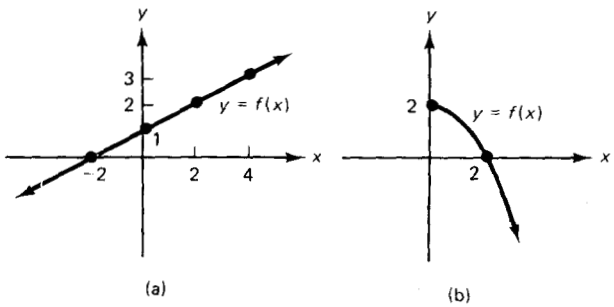


FIGURA 4.21

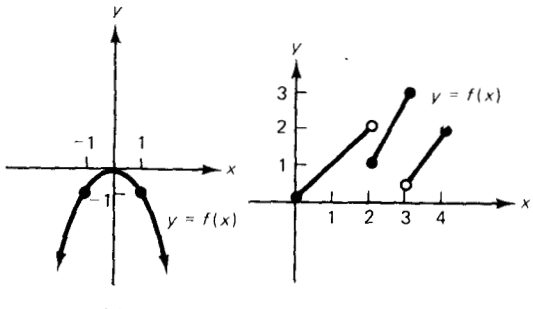


FIGURA 4.22

En los Problemas **7-20** *determinar las intersecciones x, y de la gráfica de cada ecuación y trazarla. Con base en su gráfica, ¿es y función de x? Si su respuesta es afitmativa, ¿cuáles son el dominio y el ámbito?*

7. $y = x$.
8. $y = x + 1$.
9. $y = 3x - 5$.
10. $y = 3 - 2x$.
11. $y = x^2$.
12. $y = \frac{3}{x}$.
13. $x = 0$.
14. $y = x^2 - 9$.
15. $y = x^3$.
16. $x = -4$.
17. $x = -3y^2$.
18. $x^2 = y^2$.
19. $2x + y - 2 = 0$.
20. $x + y = 1$.

En los Problemas **21-34**, *graficar cada función y señalar cuál es el dominio y el ámbito o contradominio. Determinar también las intersecciones x y y.*

21. $s = f(t) = 4 - t^2$.
22. $f(x) = 5 - 2x^2$.
23. $y = g(x) = 2$.
24. $G(s) = -8$.
25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$.
26. $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$.
27. $f(t) = -t^3$.
28. $p = h(q) = q(2 - q)$.
29. $s = F(r) = \sqrt{r - 5}$.
30. $F(r) = -\frac{1}{r}$.
31. $f(x) = |2x - 1|$.
32. $v = H(u) = |u - 3|$.
33. $F(t) = \frac{16}{t^2}$.
34. $y = f(x) = \frac{2}{x - 4}$.

En los Problemas **35-38** *grafique cada función compuesta y determine el dominio y el contradominio.*

35. $c = g(p) = \begin{cases} p, & \text{si } 0 \le p < 2, \\ 2, & \text{si } p \ge 2. \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } -1 \le x < 2, \\ 9 - x^2, & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \ge 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } 0 < x \le 3, \\ 4, & \text{si } 3 < x \le 5, \\ x - 1, & \text{si } x > 5. \end{cases}$

39. ¿Cuáles de las gráficas de la Figura 4.23 representan las funciones de x?

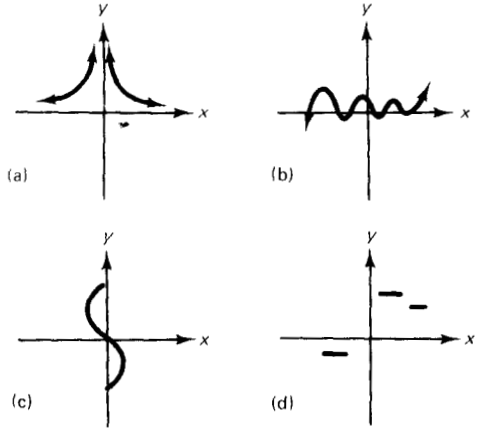


FIGURA 4.23

40. Dado el programa de oferta que se muestra enseguida (véase el Ejemplo 6 de la Sección 4.2), sitúe cada par de valores de cantidad y precio eligiendo el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos que se encuentran entre los datos dados, conectando éstos con una curva alisada. De esta manera, se obtiene una *curva de oferta*. A partir de la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta. (Es decir, al aumentar el precio, ¿qué sucede con la cantidad ofrecida?) ¿Es el precio por unidad función de la cantidad de oferta?

Cantidad ofrecida por semana, q	**Precio por unidad, p**
30	$10
100	20
150	30
190	40
210	50

41. A la siguiente tabla se le denomina *programa de demanda*. Señala las cantidades del producto de

marca X que los consumidores demandarán (es decir, comprarán) cada semana, a ciertos precios por unidad. Sitúe cada par de valores de cantidad y precio eligiendo el eje vertical para los posibles precios. Conéctense los puntos con una curva alisada. De esta manera se obtienen puntos aproximados entre los datos dados. Al resultado se le denomina *curva de demanda*. A partir de la gráfica, determine la relación entre el precio del producto X y la cantidad que será demandada. (Es decir, al disminuir el precio, ¿qué sucede con la cantidad que se demanda?) ¿Es el precio por unidad función de la cantidad de demanda?

Cantidad demandada, q	**Precio por unidad, p**
5	\$20
10	10
20	5
25	4

42. Trace la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600, & \text{si } 0 \le x < 5, \\ -100x + 1100, & \text{si } 5 \le x < 10, \\ -100x + 1600, & \text{si } 10 \le x < 15. \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el tiempo x.

43. En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un conjunto de letras y después se le pidió recordar tantas como fuera posible. Se repitió el procedimiento varias veces. Supóngase que y es el número promedio de letras recordadas, a partir de conjuntos con x letras. Las gráficas de los resultados se ajustan aproximadamente a la gráfica de

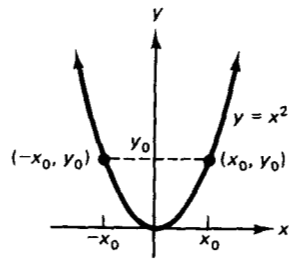
$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le 4, \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{si } 4 < x \le 5, \\ 4.5, & \text{si } 5 < x \le 12. \end{cases}$$

Grafique esta función.*

4.5 Simetría

El examen del comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica en matemáticas. En esta sección se examinarán ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior se verá que el Cálculo es de *gran* ayuda al graficar, poque ayuda a determinar la forma de una gráfica. Proporciona técnicas poderosas para determinar si una curva "serpentea" entre puntos o no.

Considérese la gráfica de $y = x^2$ que aparece en la Figura 4.24. La porción que se encuentra del lado izquierdo del eje y es la reflexión (o imagen del espejo) sobre el eje y de la porción que se encuentra a la derecha de éste, y viceversa. En forma más precisa, si (x_0, y_0) es cualquier punto de esta gráfica, entonces el punto $(-x_0, y_0)$ debe quedar también en la gráfica. Se dice que esa gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.



Simetría con respecto al eje y

FIGURA 4.24

* Adaptada de G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc. 1976).

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje*** *y si y sólo si* $(-x_0, y_0)$ *queda en la gráfica cuando* (x_0, y_0) *queda también.*

EJEMPLO 1

Utilizar la definición anterior para probar que la gráfica de $y = x^2$ *es simétrica con respecto al eje y.*

Supóngase que (x_0, y_0) es *cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. En este caso

$$y_0 = x_0^2.$$

Se debe demostrar que las coordenadas de $(-x_0, y_0)$ satisfacen $y = x^2$.

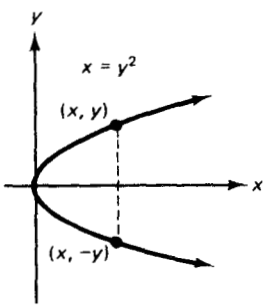
$$y_0 = (-x_0)^2?$$

$$y_0 = x_0^2?$$

Pero de lo anterior se sabe que $y_0 = x_0^2$. En consecuencia la gráfica *es* simétrica con respecto al eje y.

Al probar la simetría en el Ejemplo 2, (x_0, y_0) puede ser cualquier punto de la gráfica. En lo futuro, y por conveniencia, se omitirán los subíndices. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y si reemplazando a x por $-x$ en la ecuación resulta otra ecuación equivalente.

En la gráfica de $x = y^2$ que aparece en la Figura 4.25 se muestra otro tipo de simetría. Aquí, la porción que se encuentra por debajo del eje x es la reflexión sobre el eje x de la porción que se encuentra por encima de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces también $(x, -y)$ está en ella. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje x.*



Simetría con respecto al eje x.

FIGURA 4.25

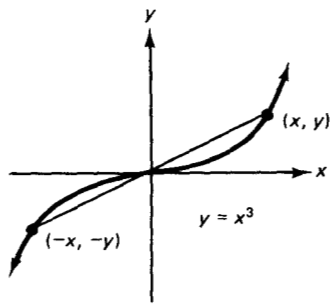
DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** *si y sólo si* $(x, -y)$ *está en la gráfica cuando* (x, y) *también lo está.*

Por tanto, la gráfica de una ecuación en x y y tiene simetría con respecto al eje y si se reemplaza y por $-y$ da como resultado una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $x = y^2$ que se muestra en la figura 4.25, se obtiene

$$x = (-y)^2,$$
$$x = y^2,$$

que es equivalente a la ecuación original. Por ello, la gráfica es simétrica con respecto al eje x.



Simetría con respecto al origen

FIGURA 4.26

En la gráfica de $y = x^3$ que aparece en la Figura 4.26 se ilustra un tercer tipo de simetría, la *simetría con respecto al origen*. En los casos en los que el punto (x, y) queda en la gráfica, entonces también $(-x, -y)$ está en ella. Como resultado, el segmento de recta que une los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ es bisecado por el origen.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** *si y sólo si $(-x, -y)$ está en la gráfica cuando (x, y) también lo está.*

Por tanto, la gráfica de una ecuación en x, y tiene simetría respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $y = x^3$, Figura 4.26, se obtiene

$$-y = (-x)^3,$$
$$-y = -x^3,$$
$$y = x^3,$$

que equivale a la ecuación original. De modo que la gráfica es simétrica respecto al origen.

Cuando se sabe que una gráfica tiene simetría, se la puede trazar mediante un menor número de puntos de los que serían necesarios si no fuera simétrica.

TABLA 4.1
Criterios de simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplazar y por $-y$ en la ecuación. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Sustituir x por $-x$ en la ecuación dada. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2

Probar la simetría de $y = \dfrac{1}{x}$ con respecto al eje y, al eje x y al origen. Después determinar las intersecciones x, y y trazar la gráfica.

Simetría

Eje x: Reemplazando y por $-y$ en $y = 1/x$ resulta

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{1}{x},$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por ello, la gráfica *no es* simétrica respecto al eje x.

Eje y: Reemplazando x por $-x$ en $y = 1/x$ resulta

$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{1}{x},$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por tanto, la gráfica *no* es simétrica respecto al eje y.

Origen: Reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$ da

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{x},$$

que sí es equivalente a la ecuación dada. De modo que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

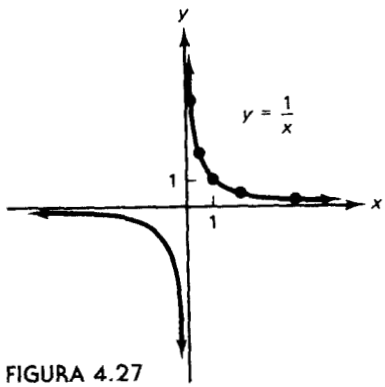


FIGURA 4.27

x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

Intersecciones: Como x no puede ser 0, la gráfica no tiene intersección y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$ y esta ecuación no tiene solución. Por tanto, no existe intersección x.

Análisis: Como no existen intersecciones x, y, la gráfica no corta a ninguno de los ejes. Ubicando algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, puede trazarse la porción de gráfica que se muestra en el primer cuadrante de la Figura 4.27. Por simetría, se refleja esta porción sobre el origen para obtener la gráfica completa.

EJEMPLO 3

Investigar si $y = f(x) = 1 - x^4$ es simétrica con respecto al eje x, el eje y o el origen. Después obtener las intersecciones con los ejes y trazar la gráfica.

Simetría. *Eje x:* Reemplazando y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ resulta

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{o bien} \quad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: Sustituyendo x por $-x$ en $y = - x^4$ da

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{o bien} \quad y = 1 - x^4,$$

que es equivalente a la ecuación dada. Por consiguiente, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4, \qquad -y = 1 - x^4, \qquad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Consecuentemente, la gráfica ***no*** es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones *x* y *y* Para ver si existen intercepciones x (o intersecciones con el eje x) debe hacerse $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. En este caso,

$$1 - x^4 = 0,$$
$$(1 - x^2)(1 + x^2) = 0,$$
$$(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = 0,$$
$$x = 1 \text{ o bien } x = -1.$$

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

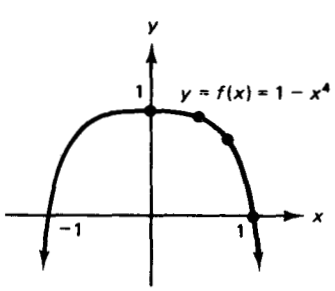


FIGURA 4.28

Por ello, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para ver si hay intersecciones y, hace $x = 0$. Entonces $y = 1$, de modo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Análisis Si se marcan las intercepciones y algunos puntos (x y y) a la derecha del eje y, puede trazarse la gráfica *completa* utilizando la simetría con respecto al eje y (Figura 4.28).

En el Ejemplo 3 se ilustró que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Con excepción de la función constante $f(x) = 0$, *la gráfica de cualquier función $y = f(x)$ no puede tener simetría con respecto al eje x* porque tal simetría implica que existen dos valores y con el mismo valor de x.

EJEMPLO 4

Buscar las intersecciones con los ejes y la simetría de la gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$. Trazar la gráfica.

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de manera que $x = \pm 3$. Así, las intercepciones x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$, en consecuencia, $y = \pm 2$. Por lo tanto, las intercepciones y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Eje x:* Reemplazando y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{o bien} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Dado que se obtiene la ecuación original, existe simetría con respecto al eje x.

Eje y: Reemplazando x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{o bien} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

De nueva cuenta se obtiene la ecuación original y, en consecuencia, existe también simetría con respecto al eje y.

Origen: Reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{o bien} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

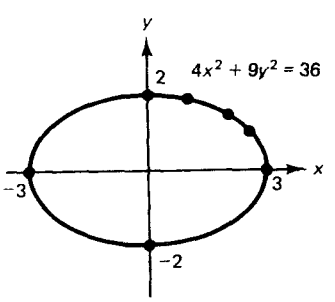


FIGURA 4.29

Debido a que ésta es la ecuación original, la gráfica es también simétrica con respecto al origen.

Análisis En la Figura 4.29 se marcan las intersecciones con los ejes y algunos, puntos en el primer cuadrante. Después se unen los puntos de este cuadrante mediante una curva alisada. Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen a partir de la simetría con respecto al eje x. Después por la simetría con respecto al eje y se determina la gráfica completa. Existen otras formas de graficar la ecuación utilizando simetría. Por ejemplo, después de marcar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, mediante la simetría con respecto al origen se pueden obtener los puntos del tercer cuadrante. Por la simetría con respecto al eje x (o eje y) puede obtenerse entonces la gráfica completa.

En el Ejemplo 4, la gráfica es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen. **Para cualquier gráfica, si existen cualesquiera dos de los tres tipos de simetría, entonces debe existir el tipo restante también.**

EJERCICIOS 4.5

En los Problemas **1-16**, *halle las intersecciones x, y de las gráficas de las ecuaciones. Investigue también la simetría con respecto al eje y o el origen. No trace las gráficas.*

1. $y = 5x$.

2. $y = f(x) = x^2 - 4$.

3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$.

4. $x = y^3$.

5. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

6. $y = 7$.

7. $x = -2$.

8. $y = |2x| - 2$.

9. $x = -y^{-4}$.

10. $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$.

12. $x^3 - xy + y^2 = 0$.

13. $y = f(x) = x^3/(x^2 + 5)$.

14. $x^2 + xy + y^2 = 0$.

15. $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$.

16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$.

En los Problemas **17-24**, *halle las intercepciones x y y de las gráficas de las ecuaciones. También investigue si existe simetría con respecto al eje x, al eje y o al origen. Después trace las gráficas.*

17. $2x + y^2 = 4$.

18. $x = y^4$.

19. $y = f(x) = x^3 - 4x$.

20. $y = x - x^3$.

21. $|x| - |y| = 0$.

22. $x^2 + y^2 = 16$.

23. $4x^2 + y^2 = 16$.

24. $x^2 - y^2 = 1$.

4.6 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 4.1 función, dominio, contradominio (o ámbito), variable independiente, variable dependiente, $f(x)$, valor de función, función de demanda, función de oferta

Sección 4.2 función constante, función polinomial, función lineal, función cuadrática, función compuesta, valor absoluto $|x|$, factorial, $r!$, función racional

Sección 4.3 $f + g$, $f - g$, fg, f/g, $f \circ g$, función compuesta

Sección 4.4 sistema de coordenadas rectangulares ejes coordenados origen
plano x, y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto
coordenada x coordenada y abscisa ordenada cuadrante
gráfica de una ecuación intersección y intersección x
gráfica de una función eje de valores funcionales prueba de la recta vertical

Sección 4.5 simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y
simetría con respecto al origen.

RESUMEN

Una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada número de entrada x exactamente un número de salida $f(x)$. Por lo general, se especifican las funciones mediante ecuaciones que señalan qué es lo que debe hacerse a la entrada x para obtener $f(x)$. A fin de obtener un valor específico $f(a)$, se reemplaza por a cada valor de x en la ecuación.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada (o de insumo) y su contradominio o ámbito consiste en todos los números de salida (o de producto). A menos que se especifique lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es también un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son las funciones constantes, las funciones polinomiales y las funciones racionales. Una función que está definida por más de una ecuación recibe el nombre de función compuesta.

En economía, las funciones de oferta y de demanda presentan la correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q de los productos que los fabricantes (o los consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Se pueden combinar dos funciones, f y g, para formar una suma, una diferencia, un producto, un cociente, o una composición, de la siguiente manera:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Un sistema de coordenadas rectangulares permite representar en forma geométrica ecuaciones en dos variables, así como funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Se ubica un número suficiente de puntos y se les une (en donde sea apropiado), para que resulte evidente la forma básica de la gráfica.

Los puntos en donde la gráfica corta a los ejes x y y, se denominan intersecciones x y y, respectivamente. Se determina una intersección x igualando y a 0, y despejando el valor de x; se encuentra una intersección y igualando x a 0 y despejando el valor de y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$. La gráfica debe poner de manifiesto cuáles son el dominio y el contradominio.

Se puede determinar el hecho de que una gráfica representa una función utilizando la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar la gráfica de una función en más de un punto.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto de imagen especular (o de espejo) permite trazar la gráfica utilizando un menor número de puntos de los que se requerirían de otra manera. Las pruebas para simetría son:

Simetría respecto al eje x	Se sustituye y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente
Simetría respecto al eje y	Se sustituye x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si resulta una ecuación equivalente
Simetría respecto al eje z	Se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-6**, *señale cuál es el dominio de cada función.*

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

2. $g(x) = x^2 + 3x$.

3. $F(t) = 7t + 4t^2$.

4. $G(x) = 18$.

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$.

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s - 5}}{4}$.

En los Problemas **7-14**, *determine los valores funcionales para la función dada.*

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $f(0)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f(t)$.

8. $g(x) = 4$; $g(4)$, $g(\frac{1}{100})$, $g(-156)$, $g(x + 4)$.

9. $G(x) = \sqrt{x - 1}$; $G(1)$, $G(10)$, $G(t + 1)$, $G(x^2)$.

10. $F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4}$; $F(-1)$, $F(0)$, $F(5)$, $F(x + 3)$.

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u + 4}}{u}$; $h(5)$, $h(-4)$, $h(x)$ $h(u - 4)$.

12. $H(s) = \dfrac{(s - 4)^2}{3}$; $H(-2)$, $H(7)$, $H(\frac{1}{2})$, $H(x^2)$.

13. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 2 \\ 8 - x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f(4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(10)$.

14. $h(q) = \begin{cases} q, & \text{si } -1 \le q < 0 \\ 3 - q, & \text{si } 0 \le q < 3 \\ 2q^2, & \text{si } 3 \le q \le 5 \end{cases}$; $h(0)$, $h(4)$, $h(-\frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2})$.

En los Problemas **15** *y* **16**, *evalúe (a)* $f(x + h)$, *y (b)* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, *simplifique las respuestas.*

15. $f(x) = 3 - 7x$.

16. $f(x) = x^2 + 4$.

17. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, determine lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$.
b. $(f + g)(4)$.
c. $(f - g)(x)$.
d. $(fg)(x)$.
e. $(fg)(1)$.
f. $\dfrac{f}{g}(x)$.
g. $(f \circ g)(x)$.
h. $(f \circ g)(5)$.
i. $(g \circ f)(x)$.

18. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, evalúe lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$.
b. $(f - g)(x)$.
c. $(f - g)(-3)$.
d. $(fg)(x)$.
e. $\dfrac{f}{g}(x)$.
f. $\dfrac{f}{g}(2)$.
g. $(f \circ g)(x)$.
h. $(g \circ f)(x)$.
i. $(g \circ f)(-4)$.

En los Problemas **19-22** *evalúe* $(f \circ g)(x)$ *y* $(g \circ f)(x)$.

19. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$.

20. $f(x) = \dfrac{x + 1}{4}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

21. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^3$.

22. $f(x) = 2$, $g(x) = 3$.

En los Problemas **23-24**, *determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y pruebe si existe simetría con respecto al eje x, al eje y o al origen. No trace la gráfica.*

23. $y = 2x - 3x^3$.

24. $\dfrac{xy^2}{x^2 + 1} = 4$.

En los problemas **25** *y* **26**, *determine las intersecciones x, y de las gráficas de las ecuaciones. Pruebe también si existe simetría con respecto al eje x, al eje y o al origen. Después trace las gráficas*

25. $y = 9 - x^2$.

26. $y = 3x - 7$.

***En los problemas* 27-30** *grafique cada función y exprese cuáles son su dominio y su contradominio. Determine también las intersecciones (x, y).*

27. $G(u) = \sqrt{u + 4}$.

28. $f(x) = |x| + 1$.

29. $y = g(t) = \dfrac{2}{t - 4}$.

30. $g(t) = \sqrt{4t}$.

31. Grafique la siguiente función compuesta y determine su dominio y contradominio:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

32. Las ventas anuales proyectadas S (en dólares) para un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150\,000 + 3000t$, en donde t es el tiempo en años a partir de 1990. A una ecuación como ésta se le denomina *ecuación de tendencia*. Determine las ventas anuales proyectadas para 1995. ¿Es S función de t?

33. En la Figura 4.30 ¿Qué gráficas representan funciones de x?

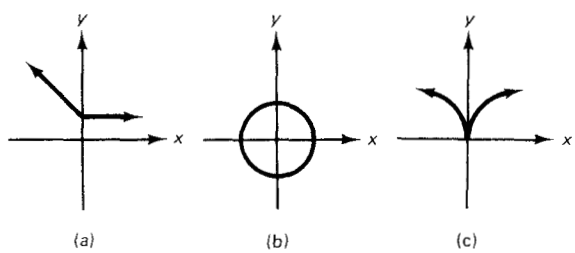
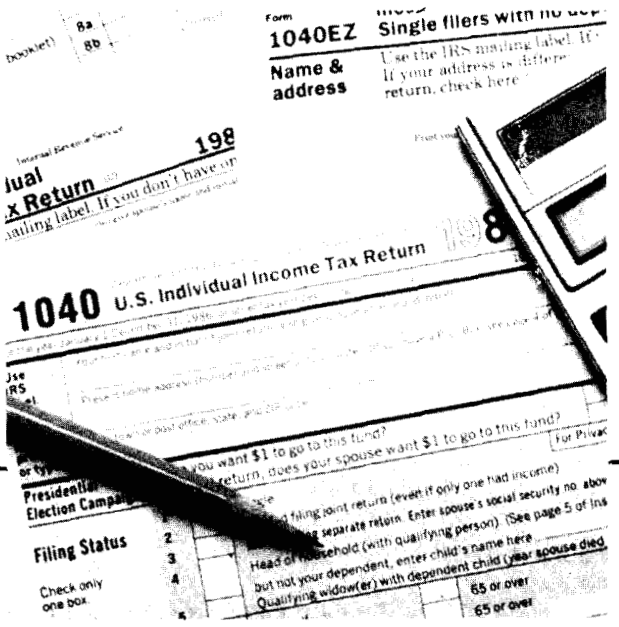


FIGURA 4.30

APLICACIÓN PRÁCTICA



¡Una experiencia en el pago de impuestos!

Es probable que haya usted escuchado el viejo dicho: "sólo existen dos cosas seguras en la vida: la muerte y el pago de impuestos". Aquí se verá la forma en que se pueden aplicar las funciones a una de esas "certidumbres": los impuestos.

Se utilizarán las tasas de impuestos federales de 1988, en Estados Unidos, aplicables a un matrimonio que presenta una declaración conjunta con cuatro exenciones. Supóngase que se desea determinar una fórmula para la función f, tal que $f(x)$ sean los impuestos (en dólares) para un ingreso gravable x (dólares). El impuesto se basa en diversos intervalos de ingresos gravables. De acuerdo con la Tabla Y-1 de la Dirección del Impuesto Sobre la Renta (Internal Revenue Service) (Figura 4.31),

- si x es \$0 o menos, el impuesto es \$0;
- si x mayor de \$0, pero no mayor de \$29 750, el impuesto es 15% de x;
- se x es superior a \$29 750, pero no superior a \$71 900, el impuesto es de \$4 462.50 más 28% de la cantidad que exceda de 29 750;
- si x es superior a \$71,900, pero no superior a \$149 250, el impuesto es \$16 264.50 más 33% de la cantidad que exceda de \$71,900;
- si x es superior a \$149 250, entonces debe utilizarse una hoja de trabajo para calcular el impuesto.

Evidentemente, si $x \leq 0$, entonces

$$f(x) = 0.$$

Si $0 < x \leq 29\,750$, entonces

$$f(x) = 0.15x.$$

Obsérvese que el impuesto que causa un ingreso gravable de \$29 750 es

$$f(29\,750) = 0.15(29\,750) = \$4462.50.$$

Tabla Y-1—Utilícese si su estado civil es **Casado, con declaración** conjunta, o bien Viudo(a) calificable.

Si la cantidad en la forma 1040, línea 37, es: Superior a	Pero no superior a	Anótese en la Forma 1040, línea 38	de la cantidad excedente de
$0	$29 750	..... 15%	$0
29 750	71 900	$4 462.50 + 28%	29 750
71 900	149 250	16 264.50 + 33%	71 900
149 250	.....	Utilice la **Hoja de Trabajo** que sigue para calcular sus impuestos.	

Internal Revenue Service
1988 Schedule Y-1

FIGURA 4.31

Si $(29\ 750 < x \leq 71\ 900)$, entonces la cantidad excedente de \$29 750 es $x - 29\ 750$, y

$$f(x) = 4462.50 + 0.28(x - 29\ 750).$$

Como 4 462.50 es 15% de 29 750, para un ingreso gravable de entre \$ 29 750 y \$ 71 900, se grava en esencia a la tasa de 15% para los primeros \$ 29 750 de ingresos, y a una tasa de 28% para el ingreso restante.

Obsérvese que el impuesto sobre \$ 71 900 es

$$f(71\ 900) = 4462.50 + 0.28(71\ 900 - 29{,}750) = 4462.50 + 0.28(42\ 150)$$
$$= 4462.50 + 11\ 802 = \$16\ 264.50.$$

Si $(71\ 900 < x \leq 149\ 250)$, entonces la cantidad excedente de \$ 71 900 es $x - 71\ 900$, por lo que

$$f(x) = 16{,}264.50 + 0.33(x - 71{,}900)$$

Como 16 264.50 es el impuesto sobre \$71 900, para un ingreso gravable de entre \$71 900 y \$149 250, se grava a una tasa de 15% para los primeros \$29 750 de ingresos, a la tasa de 28% para los siguientes \$42,150 de ingresos (71 900 − 29 750 = 42 150), y a una tasa de 33% para el impuesto restante. En el extremo superior de este intervalo de ingresos, es decir, \$149 ,250, el impuesto es

$$f(149\ 250) = 16\ 264.50 + 0.33(149\ 250 - 71\ 900) = 16\ 264.50 + 0.33(77\ 350)$$
$$= 16\ 264.50 + 25\ 525.50 = \$\ 41\ 790.$$

Para el ingreso gravable x superior a \$149 250, se utiliza una hoja de trabajo (véase la figura 4.32). En ella se determina la parte menor de 5% del ingreso gravable que se encuentra por encima de \$149 250, y \$2 184 (esta última, \$2 184 es una cantidad basada en el número de exenciones, en este caso cuatro). El ingreso gravable por encima de \$149 250 es $x - 149\ 250$, y el 5% de esta cantidad es $0.05(x - 149\ 250)$. Si

$$0.05(x - 149{,}250) \leq 2184,$$

entonces

$$0.05x - 7462.50 \leq 2184,$$

$$0.05x \leq 9646.50,$$

$$x \leq \frac{9646.50}{0.05} = 192\ 930.$$

Hoja de trabajo (Consérvela en su archivo)

1.	Si su estado civil es:	Soltero, anote Jefe de familia, anote Casado con declaración conjunta o un viudo(a) calificable, anote Casado con declaración por separado, anote	1. _____
2.		Anote su ingreso gravable de la Forma 1040, línea 37	2. _____
3.	Si su estado civil es:	Soltero, anote Jefe de familia, anote Casado con declaración conjunta o un viudo (a7) calificabale, anote Casado con declaración por separado, anote	3. _____
4.		Reste la línea 3 de la línea 2. Anote el resultado. (Si el resultado es cero o menos, utilice la tabla anterior para calcular sus impuestos, de acuerdo con su estado civil. No utilice esta hoja de trabajo	4. _____
5.		Multiplique por 28% (.28) la cantidad de la línea 4. Anote el resultado	5. _____
6.		Multiplique por 5% (.05) la cantidad de la línea 4. Anote el resultado	6. _____
7.		Multiplique $546 por el número de exenciones que se indican en la Forma 1040, línea 6e. Si es casado y presenta declaración en forma separada, vea la advertencia que se anota abajo). Anote el resultado.	7. _____
8.		Compare las cantidades de las líneas 6 y 7. Anote la menor de las dos.	8. _____
9.		**Impuesto.** Sumar los renglones 1, 5 y 8. Anote aquí el total y en la forma 1040, línea 38.	9. _____

Hoja de Trabajo.
Tabla Y-1

FIGURA 4.32

de manera similar, si $(0.05(x - 149\,250) > 2\,184$, entonces $x > 192\,930$. Por ello, la porción menor de $0.05(x - 149\,250)$ y 2 184 es $0.05(x - 149\,250)$ si $149\,250 < x \leq 192\,930$, y es 2 184 si $(x > 192\,930$. El impuesto sobre x es la suma de $41 790, o sea 28% del ingreso gravable por encima de $149 250, y la cantidad menor de $0.05(x - 149\,250)$ y 2 184. Así, para $149\,250 < x \leq 192\,930$,

$$f(x) = 41{,}790 + 0.28(x - 149{,}250) + 0.05(x - 149{,}250)$$

$$= 41{,}790 + 0.33(x - 149{,}250).$$

Si $x > 192\,930$, entonces

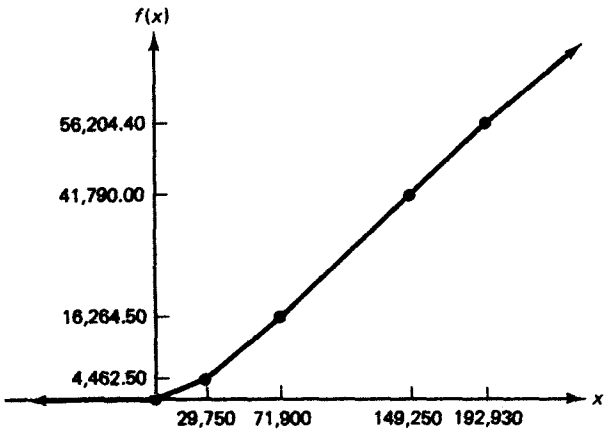
$$f(x) = 41{,}790 + 0.28(x - 149{,}250) + 2184$$

$$= 43{,}974 + 0.28(x - 149{,}250).$$

Por lo tanto, la parte de ingreso gravable entre $149 250 y $192 930 se grava a la tasa de 33%, pero cualquier suma por encima de $192 930 se grava a una tasa menor, de 28%.

Resumiendo todos estos resultados, se obtiene la función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ 0.15x, \text{ si } 0 < x \leq 29, 750, \\ 4462.50 + 0.28(x - 29\,750), \\ \qquad \text{si } 29\,750 < x \leq 71\,900, \\ 16\,264.50 + 0.33(x - 71\,900), \\ \qquad \text{si } 71\,900 < x \leq 149\,250, \\ 41\,790 + 0.33(x - 149\,250), \\ \qquad \text{si } 149\,250 < x \leq 192\,930, \\ 43\,974 + 0.28(x - 149\,250), \\ \qquad \text{si } x > 192\,930 \end{cases}$$



Función Impuesto sobre la Renta.

FIGURA 4.33

Por ejemplo, el impuesto por un ingreso gravable de \$40 000 es (utilizando la tercera ecuación):

$$\begin{aligned} f(40\ 000) &= 4462.50 + 0.28(40\ 000 - 29\ 750) \\ &= 4462.50 + 0.28(10\ 250) \\ &= 4462.50 + 2870 = \$7\ 332.50. \end{aligned}$$

Con estas fórmulas se puede ilustrar en forma geométrica la función "impuesto sobre la renta", como se ve en la Figura 4.33.

EJERCICIOS

Utilice la función f "impuestos sobre la renta" que se acaba de analizar para determinar el impuesto sobre los siguientes ingresos gravables.

1. \$100 000.
2. \$25 350.
3. \$240 000.
4. \$62 700.

CAPÍTULO 5

Rectas, parábolas y sistemas

5.1 Rectas

Se pueden representar en forma conveniente muchas relaciones entre cantidades mediante rectas. Una característica de una recta es su inclinación. Por ejemplo, en la Figura 5.1, la recta L_1 está más inclinada respecto de la horizontal que la recta L_2. En este sentido, L_1 tiene mayor declive.

Para medir la inclinación de una recta, se utiliza la noción de *pendiente*. En la Figura 5.2, conforme se avanza a lo largo de la recta L desde (2, 1) hasta (4, 5), la coordenada x aumenta de 2 a 4 y la coordenada y aumenta de 1 a 5. La tasa promedio de variación de y con respecto a x es la razón.

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Esto significa que para cada aumento unitario en x se tiene un *aumento* de 2 unidades en y. Por ello, la recta *asciende* de izquierda a derecha. Se dice que la *pendiente* de la

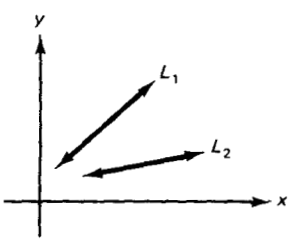


FIGURA 5.1

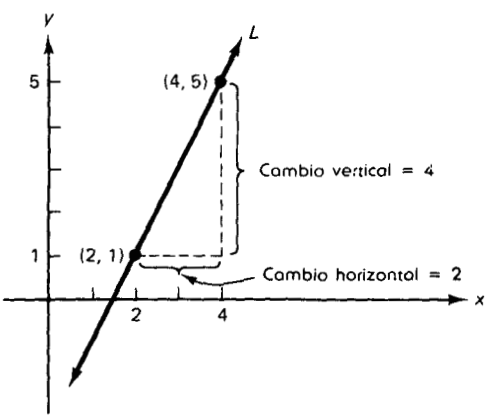


FIGURA 5.2.

recta es 2. Si $(x_1$ y $y_1)$ y (x_2, y_2) son otros dos puntos diferentes en L, entonces se puede probar que el cociente $\dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}$, o bien $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, es también 2.

DEFINICIÓN

Sean (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *dos puntos sobre una recta en donde* $x_1 \neq x_2$. *La* **pendiente** *de la recta es el número dado por*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left(= \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}\right). \tag{1}$$

No se define la pendiente de una recta vertical, pues dos puntos cualesquiera sobre una recta como ésta tienen que $x_1 = x_2$ (véase la Figura 5.3). Por consiguiente, el denominador en (1) es cero. Para una recta horizontal, dos puntos cualesquiera tienen $y_1 = y_2$, [véase la Figura 5.3(b)]. Por lo tanto, el numerador (1) es cero, de modo que $m = 0$.

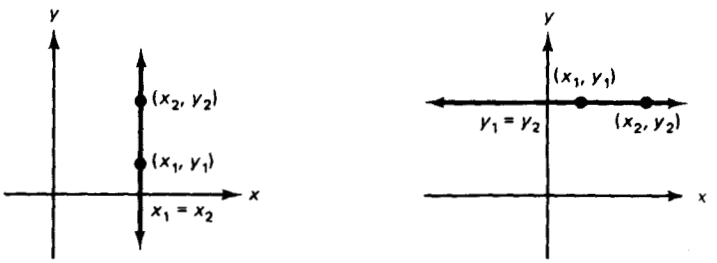


FIGURA 5.3

EJEMPLO 1

La recta que aparece en la Figura 5.4 *muestra la relación entre el precio p de un producto y la cantidad q en (millares) que los consumidores comprarían a ese precio. Calcular e interpretar la pendiente.*

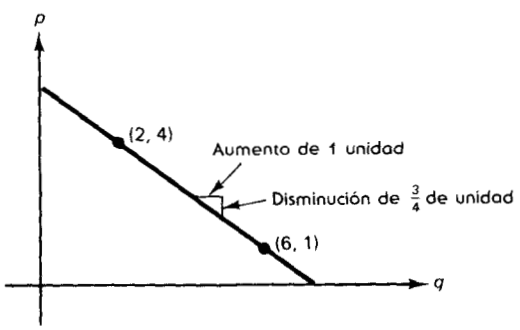


FIGURA 5.4

Se reemplazan en la fórmula de la pendiente (1) los valores de x por los de q, y los de y por los de p. Se puede elegir cualquier punto de la Figura 5.4 como el (q_1, p_1). Haciendo que $(2, 4) = (q_1, p_1)$ y $(6, 1) = (q_2, p_2$, se tiene que

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1 - 4}{6 - 2} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

La pendiente es negativa, $-\frac{3}{4}$. Esto significa que para cada aumento unitario en la cantidad (mil productos), se ocasiona una **disminución** en el precio de $\frac{3}{4}$ (unidades monetarias por producto). Debido a esta reducción, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

En resumen, se puede caracterizar la colocación o situación de una recta mediante su pendiente:

Pendiente cero:	Recta horizontal,
Pendiente indefinida:	Recta vertical,
Pendiente positiva:	La recta asciende de izquierda a derecha,
Pendiente negativa:	La recta desciende de izquierda a derecha.

En la Figura 5.5 se muestran rectas con diferentes pendientes. Obsérvese que, *conforme más cercana es la pendiente a 0, tanto más horizontal es la recta. Conforme mayor es el valor absoluto de la pendiente, más vertical es la recta.* **Se debe señalar que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales.**

Si se dan un punto y una recta, y también la pendiente de ésta, puede encontrarse una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Supóngase que la recta L tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1). Si (x, y) es *cualquier* otro punto sobre L (véase la Figura 5.6), se puede hallar una relación algebraica entre x y y. Utilizando la fórmula de la pendiente para los puntos (x_1, y_1) y (x, y) se debe cumplir que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2}$$

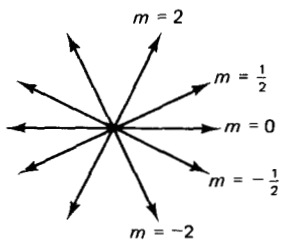


FIGURA 5.5

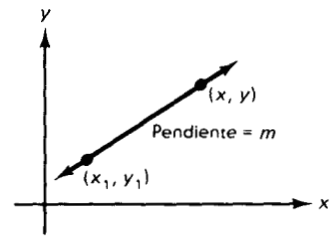


FIGURA 5.6

Es decir, todo punto que se encuentre sobre L satisface la Ecuación (2). También es cierto que todo punto que satisface la Ecuación (2) debe estar sobre la recta L. En consecuencia, la Ecuación (2) es una ecuación de L y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la **forma punto-pendiente** de una ecuación de la recta cuya pendiente es m y pasa por el punto (x_1, y_1).

EJEMPLO 2

Hállese la ecuación de la recta que tiene pendiente de 2 *y pasa por* (1, 3).

Aquí $m = 2$ y $(x_1, y_1) = (1, -3)$. Utilizando la forma punto-pendiente, se tiene que

$$y - (-3) = 2(x - 1),$$

lo cual se simplifica a

$$y + 3 = 2x - 2.$$

Es posible expresar la respuesta de la siguiente manera:

$$2x - y - 5 = 0.$$

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados puede encontrarse en forma sencilla, como se muestra en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 8)$ *y* $(4, -2)$.

Esta recta tiene la pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}.$$

Eligiendo $(-3, 8)$ como (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - 8 = -\tfrac{10}{7}[x - (-3)],$$

$$y - 8 = -\tfrac{10}{7}(x + 3).$$

$$7y - 56 = -10x - 30,$$

o bien

$$10x + 7y - 26 = 0.$$

Escogiendo $(4, -2)$ como (x_1, y_1) se hubiera obtenido el mismo resultado.

Recuérdese que el punto $(0, b)$ en el cual una recta corta al eje y se denomina intercepción y (Figura 5.7). En ocasiones, simplemente se dice que el número b es la ordenada en el origen). Si se conocen la pendiente y la ordenada en el origen de una recta, la ecuación es (utilizando la forma punto-pendiente):

$$y - b = m(x - 0).$$

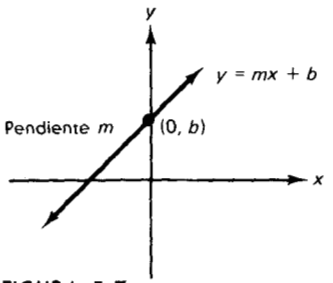


FIGURA 5.7

Despejando y se obtiene $y = mx + b$, que se denomina la *forma pendiente-intercepción* y de la ecuación de una recta.

> $$y = mx + b$$
>
> es la **forma pendiente-intercepción** y de la ecuación de una recta cuya pendiente es m y su ordenada en el origen b.

EJEMPLO 4

a. La ecuación de una recta con pendiente 3 y ordenada en el origen -4 es

$$y = mx + b,$$
$$y = 3x + (-4),$$
$$y = 3x - 4.$$

b. La ecuación $y = 5(x - 3)$ puede escribirse como $y = 5x - 15$, que tiene la forma $y = mx + b$ con $m = 5$ y $b = -15$. Consecuentemente, su gráfica es una recta con pendiente 5 y ordenada en el origen de -15.

Si una recta *vertical* pasa por el punto (a, b) (véase la Figura 5.8), entonces cualquier otro punto (x, y) queda sobre la recta si y sólo si $x = a$. La coordenada y puede tener cualquier valor. Así, la ecuación de la recta es $x = a$. De manera similar, la ecuación de una recta *horizontal* que pasa por el punto (a, b) es $y = b$ (véase la Figura 5.9). Aquí, la coordenada x puede tener cualquier valor.

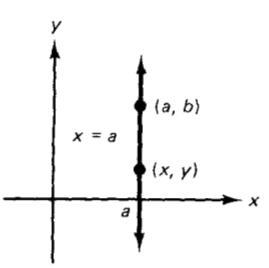


FIGURA 5.8

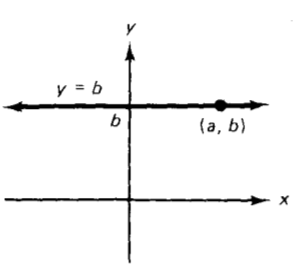


FIGURA 5.9

EJEMPLO 5

a. La ecuación de la recta vertical que pasa por $(-2, 3)$ es $x = -2$. La ecuación de la recta horizontal que pasa por $(-2, 3)$ es $y = 3$.

b. Los ejes x y y son, respectivamente, rectas horizontal y vertical. Dado que $(0, 0)$ queda en ambos ejes, la ecuación del eje x es $y = 0$ y la ecuación para el eje y es $x = 0$.

Del análisis anterior se puede demostrar que toda recta es la gráfica de una ecuación que tiene la forma $Ax + By + C = 0$, en donde A, B y C son constantes, y A y B no son nulas simultáneamente. A tal expresión se le denomina **ecuación lineal general** (o *ecuación de primer grado*) **en las variables x y y**, y se dice que x y y se **relacionan linealmente**. Por ejemplo, una ecuación lineal general para $y = 7x - 2$ es $(-7)x + (1)y + (2) = 0$. Por otra parte, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta. Por ejemplo, $3x + 4y + 5 = 0$ es equivalente a $y = (-\frac{3}{4})x + (-\frac{5}{4})$ y por consiguiente su gráfica es una recta que tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ y ordenada en el origen $-\frac{5}{4}$.

EJEMPLO 6

Trace la gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$.

Puesto que ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una recta. Por lo tanto, sólo es necesario determinar dos puntos diferentes de la gráfica para poder trazarla. Si $x = 0$, entonces $y = 2$. Si $y = 0$, entonces $x = -3$. Ahora, se traza la recta que pasa por los puntos $(-3, 0)$ (véase la Figura 5.10). El punto $(-3, 0)$ es la abscisa en el origen. El punto $(0, 2)$ es una intercepción y, y $(-3, 0)$ es una intercepción x.

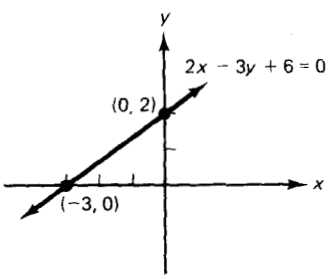


FIGURA 5.10

En la Tabla 5.1 se presentan las diversas formas de las ecuaciones de las rectas.

TABLA 5.1
Formas de ecuaciones de rectas

Forma punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-intercepción y	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

EJERCICIOS 5.1

En los Problemas **1-8**, *determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.*

1. (4, 1), (7, 10). **2.** (−3, 11), (2, 1). **3.** (4, −2), (−6, 3). **4.** (2, −4), (3, −4).

5. (5, 3), (5, −8). **6.** (0, −6), (3, 0). **7.** (5, −2), (4, −2). **8.** (1, −6), (1, 0).

En los Problemas **9-24**, *determine la ecuación general lineal* ($Ax + By + C = 0$) *de la recta que tiene las propiedades que se señalan y trace cada una de ellas.*

9. Pasa por (2, 8) y tiene pendiente 6.

10. Pasa por el origen y su pendiente es −5.

11. Pasa por (−2, 5) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$.

12. Pasa por $(\frac{1}{2}, 5)$ y tiene pendiente de $\frac{1}{3}$.

13. Pasa por (1, 4) y (8, 7).

14. Pasa por (7, 1) y (7, −5).

15. Pasa por (3, −1) y (−2, −9).

16. Pasa por (0, 0) y (2, 3).

17. Tiene pendiente 2 y ordenada en el origen 4.

18. Tiene pendiente 7 y su intercepción y es igual a −5.

19. Tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen −3.

20. Tiene pendiente 0 y su intercepción y es igual a $-\frac{1}{2}$.

21. Es horizontal y pasa por (−3, −2).

22. Es vertical y pasa por (−1, 4).

23. Pasa por (2, −3) y es vertical.

24. Pasa por el origen y es horizontal.

En los Problemas **25-34**, *obtenga, si es posible, la pendiente y la ordenada en el origen de la recta determinada por la ecuación, y trace la gráfica.*

25. $y = 2x - 1$. **26.** $x - 1 = 5$. **27.** $x + 2y - 3 = 0$. **28.** $y + 4 = 7$.

29. $x = -5$. **30.** $x - 1 = 5y + 3$. **31.** $y = 3x$. **32.** $y - 7 = 3(x - 4)$.

33. $y = 1$. **34.** $2y - 3 = 0$.

En los Problemas **35-40**, *obtenga la forma lineal general y la forma pendiente-ordenada en el origen de la ecuación dada.*

35. $2x = 5 - 3y$. **36.** $3x + 2y = 6$. **37.** $4x + 9y - 5 = 0$.

38. $2(x - 3) - 4(y + 2) = 8$. **39.** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -4$. **40.** $y = \frac{1}{300}x + 8$.

41. Una recta pasa por (1, 2) y (−3, 8). Halle el punto que tiene como primera coordenada 5.

42. Una recta tiene pendiente de 2 e intercepción y (0, 1). ¿El punto (−1, − 1) está sobre la recta?

5.2 Aplicaciones y funciones lineales

Muchas situaciones en Economía pueden describirse utilizando gráficas rectilíneas, como se muestra en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Supóngase que un fabricante dispone de 100 libras de material con el cual puede fabricar dos productos, A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respecti-

vamente. Si x y y denotan el número de unidades de A y B que se fabrican, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación.

$$4x + 2y = 100, \text{ en donde } x, y \geq 0.$$

En consecuencia, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Despejando y, se obtiene la forma pendiente-ordenada en el origen.

$$y = -2x + 50,$$

y por lo tanto la pendiente es -2. Este valor refleja la tasa de variación del nivel de producción de B con respecto al nivel de producción de A. Por ejemplo, si se fabricara una unidad más de A, se requerirían 4 libras más de material, lo que daría por resultado $\frac{4}{2} = 2$ unidades *menos* de B. Por consiguiente, al aumentar x en 1 unidad, el correspondiente valor de y disminuye en 2 unidades. Para trazar la gráfica de $y = -2x + 50$, puede utilizarse la intercepción y (0, 50) y el hecho de que cuando $x = 10$, $y = 30$ (véase la Figura 5.11).

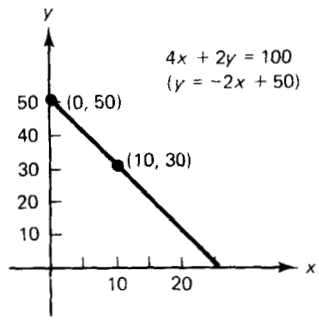


FIGURA 5.11

Para cada nivel de precios de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandan (es decir, compran) en determinado periodo. Por lo general, conforme mayor es el precio, menor es la cantidad que se demanda; al reducirse el precio, aumenta la cantidad demandada. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por q, entonces a la ecuación que relaciona a p y q se le denomina **ecuación de demanda**. A su gráfica se le denomina **gráfica de demanda**.

En la Figura 5.12(a) se muestra una gráfica de demanda. De acuerdo con la práctica de la mayor parte de los economistas, el eje horizontal es el eje q y el vertical es el eje p. Se supone que el precio por unidad está dado en unidades monetarias (u.m.) y que el intervalo es 1 semana. Por lo tanto, el punto (a, b) de la Figura 5.12(a) indica que a un precio de b u.m. por unidad, los consumidores demandarían a unidades a la semana. Puesto que no tienen sentido los precios negativos o las cantidades negativas, tanto a como b deben ser no negativas. Para la mayor parte de los productos, un aumento en la cantidad de demanda corresponde a una disminución en el precio. Consecuentemente, es típico que las gráficas lineales de demanda tengan pendientes negativas, tal como la de la Figura 5.12(a).

En respuesta a diversos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los *fabricantes* están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún periodo específico.

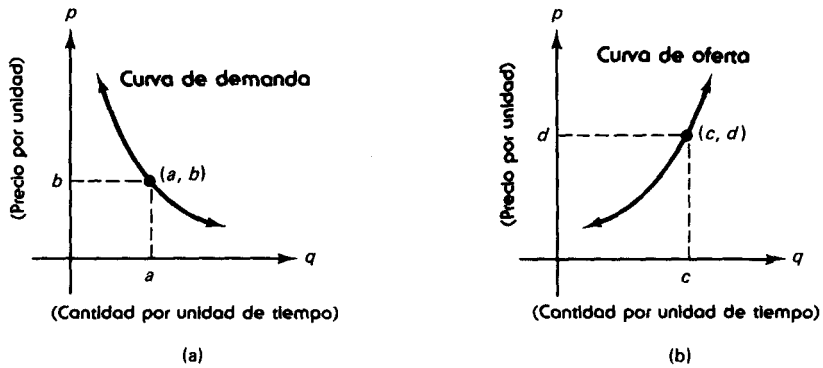


FIGURA 5.12

Por lo general, cuanto mayor es el precio unitario, tanto mayor será la cantidad que los fabricantes están dispuestos a ofrecer; al reducirse el precio, se reduce también la cantidad de oferta. Si p denota el precio por unidad, y q, la cantidad ofrecida correspondiente, entonces a la ecuación que relaciona p y q se le denomina **ecuación de oferta** y a su gráfiica se le denomina **gráfica de oferta.** En la Figura 5.12(b) se presenta una gráfica de oferta. Si P está dado en u.m. y el periodo es 1 semana, entonces el punto (c, d) indica que a un precio de d u.m. por producto, los fabricantes ofrecerán c unidades por semana. Como antes se mencionó c y d son no negativas. Por lo general, una gráfica de oferta asciende de izquierda a derecha, es decir, tiene pendiente positiva como en la Figura 5.12(b). Esto indica que los fabricantes ofrecerán más de un producto a precios más elevados.

Ahora se hará hincapié en curvas de demanda y oferta que son líneas rectas (Figura 5.13). Se las denomina gráficas *lineales* de demanda y de oferta. Tales gráficas tienen ecuaciones en las que p y q están relacionadas de manera lineal. Como normalmente las curvas de demanda bajan de izquierda a derecha, las gráficas lineales de demanda tienen pendiente negativa [Figura 15.13(a)]. Sin embargo, la pendiente de las gráficas lineales de oferta es positiva, porque este tipo de gráficas ascienden de izquierda a derecha [Figura 5.13(b)].

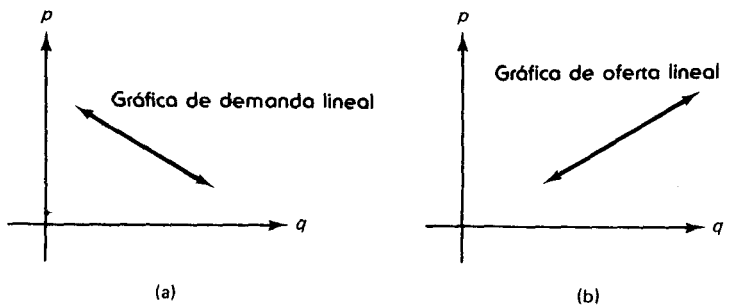


FIGURA 5.13

EJEMPLO 2

Supóngase que la demanda semanal de un producto es de 100 *unidades cuando el precio es de* \$58 *por unidad, y de* 200 *unidades, con precio de* \$51 *cada uno. Determínese la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.*

Dado que la ecuación de demanda es lineal, la gráfica de demanda debe ser una recta. Se entiende que la cantidad q y el precio p tienen una relación lineal tal que $p = 58$ cuando $q = 100$ y $p = 51$ cuando $q = 200$. Por ello, los datos proporcionados pueden representarse en un plano coordenado q,p (véase la Figura 5.12) mediante los puntos (100, 58) y (200, 51), que están en una recta que tiene como pendiente

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}.$$

Una ecuación de la recta (en su forma punto-pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1),$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100).$$

Simplificando, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65. \tag{1}$$

Se acostumbra expresar en las ecuaciones de demanda (al igual que en las ecuaciones de oferta) p en términos de q, definiendo de esta manera una función de q. Por ejemplo, la Ecuación (1) define a p como función de q y se le denomina *función de demanda* para el producto.

En la Sección 4.2 se describió una *función lineal.* En términos más formales, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una función f es una ***función lineal*** *si, y sólo si $f(x)$ se puede expresar en la forma $f(x) = ax + b$, en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.*

Supóngase que $f(x) = ax + b$ es una función lineal y que se fija $y = f(x)$. Entonces, $y = ax = b$, en la ecuación de una recta con pendiente a y ordenada en el origen b. Por consiguiente, **la gráfica de una función lineal es rectilínea**. Se dice que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente a.

EJEMPLO 3

Graficar las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x - 1$.

Aquí f es una función lineal (con pendiente 2), así que su gráfica es una recta. Dado que dos puntos determinan una línea recta, sólo se requiere ubicar dos puntos y después dibujar la línea que los une [véase la Figura 5.14(a)]. Obsérvese que uno de los puntos situados es la intersección con el eje vertical -1, que ocurre cuando $x = 0$.

b. $g(t) = \dfrac{15 - 2t}{3}$.

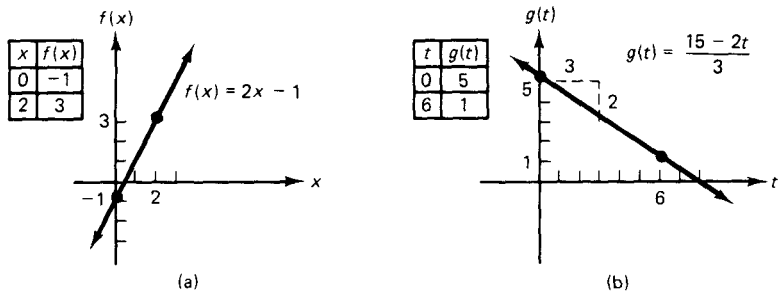


FIGURA 5.14

Nótese que

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5.$$

Por lo tanto, g es una función lineal [véase la Figura 5.14(b)]. Obsérvese que, dado que la pendiente es $-\frac{2}{3}$, entonces al aumentar t en 3 unidades, $g(t)$ disminuye en 2.

EJEMPLO 4

Supóngase que f es una función lineal con pendiente 2 y que $f(4) = 8$. Determinar $f(x)$.

Puesto que f es lineal, tiene la forma $f(x) = ax + b$. La pendiente es 2, de modo que $a = 2$:

$$f(x) = 2x + b. \tag{2}$$

Ahora se determinará b. Dado que $f(4) = 8$, se reemplaza x por 4 en la Ecuación (2) y se despeja b.

$$f(4) = 2(4) + b,$$
$$8 = 8 + b,$$
$$0 = b.$$

De donde $f(x) = 2x$.

EJEMPLO 5

Si $y = f(x)$ es una función lineal tal que $f(-2) = 6$ y $f(1) = -3$, hallar $f(x)$.

La condición de que $f(-2) = 6$ significa que cuando $x = -2$, $y = 6$. En consecuencia, $(-2, 6)$ es un punto en la gráfica de f, la cual es una recta. De manera similar, $f(1) = -3$ implica que $(1, -3)$ también está sobre la recta. Si $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ y $(x_2, y_2) = (1, -3)$, entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Se puede obtener la ecuación en la forma punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
$$y - 6 = -3[x - (-2)],$$
$$y - 6 = -3x - 6.$$
$$y = -3x.$$

Debido a que $y = f(x)$, entonces $f(x) = -3x$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si se fija $(x_1, y_1) = (1, -3)$.

En muchos estudios se recopilan datos y se grafican en sistemas coordenados. Un análisis de los resultados puede señalar que existe una relación funcional entre las variables implicadas. Por ejemplo, los puntos que representan los datos pueden aproximarse por medio de puntos sobre una recta. Esto indicaría que existe una relación funcional lineal, tal como la que se presenta en el Ejemplo 6 que aparece enseguida.

EJEMPLO 6

En pruebas de dietas experimentales para gallinas, se determinó que el peso promedio w *(en gramos) de una gallina en pie era estadísticamente una función lineal del número* d *de días posteriores al inicio de la dieta, en donde* $0 \leq d \leq 50$. *Supóngase que el peso promedio de una gallina al principio de la dieta fue de* 40 *gramos y de* 675 *gramos a los* 25 *días.*

a. *Determinar w como función lineal de d.*

b. *Calcular el peso promedio de una gallina cuando* $d = 10$

a. Dado que w es una función lineal de d, su gráfica es una recta. Cuando $d = 0$ (al comienzo de la dieta) entonces $w = 40$. Consecuentemente, (0, 40) está en la gráfica (véase la Figura 5.15). De modo semejante, (25, 675) está en la gráfica. Si $(d_1, w_1) = (0, 40)$ y $(d_2, w_2) = (25, 675)$, entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}.$$

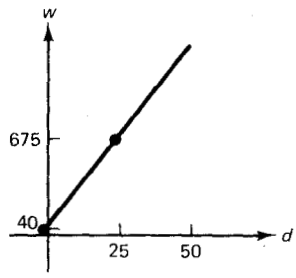


FIGURA 5.15

Utilizando la fórmula punto-pendiente, se obtiene

$$w - w_1 = m(d - d_1),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}d,$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40,$$

que expresa a w como función lineal de d.

b. Cuando $d = 10$, $w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$. Por ello, el peso promedio de una gallina a los díez días de comenzar la dieta es 294 gramos.

EJERCICIOS 5.2

En los Problemas **1-6**, *determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal, y trace la gráfica.*

1. $y = f(x) = -4x$.

2. $y = f(x) = x + 1$.

3. $g(t) = 2t - 4$.

4. $g(t) = 2(4 - t)$.

5. $h(q) = \frac{7 - q}{2}$.

6. $h(q) = 0.5q + 0.25$.

En los Problemas **7-14**, *calcule $f(x)$ si f es una función lineal que tiene las propiedades que se indican.*

7. pendiente $= 4$, $f(2) = 8$.

8. $f(0) = 3$, $f(4) = -5$.

9. $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.

10. pendiente $= -6$, $f(\frac{1}{2}) = -2$.

11. pendiente $= -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$.

12. $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

13. $f(-2) = -1$, $f(-4) = -3$.

14. pendiente $= 0.01$, $f(0.1) = 0.01$.

15. Supóngase que los consumidores demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad, y de 25 unidades cuando el precio es de \$18. Halle la ecuación de demanda suponiendo que es lineal. Calcule el precio por unidad cuando se demandan 30 unidades.

16. Supóngase que un fabricante de zapatos colocaría en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 cuando su precio es de 30. Obtenga la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q tienen una relación lineal.

17. Considérese que se requieren \$40 (dólares) de costos para fabricar 10 unidades de un producto, y que el costo de 20 unidades es de \$70. Si el costo c está relacionado en forma lineal con la producción q, determine la ecuación lineal que relaciona c y q. Calcule el costo para fabricar 35 unidades.

18. Una persona que padece cáncer va a recibir tratamientos con radiación y medicinas. Cada centímetro cúbico de medicamento que va a utilizarse contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a radiaciones ofrece 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades. Si se administran d centímetros cúbicos del fármaco y r minutos de irradiación, determine una ecuación que relacione d y r. Grafique la ecuación para $d \geq 0$ y $r \geq 0$; considere que d es el eje horizontal.

19. Supóngase que el valor de cierta maquinaria disminuye en 10% anual con respecto a su valor original. Si este es de \$8000, obtenga una ecuación que exprese el valor v de la maquinaria después de t años de haberse comprado, en donde $0 \leq t \leq 10$. Trace la ecuación, utilizando a t como el eje horizontal y a b como el vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta

resultante? A este método de considerar el valor del equipo se le denomina *depreciación en línea recta.*

20. Para el ganado ovino que se mantiene en temperaturas ambientales elevadas, la tasa respiratoria r (por minuto) aumenta al reducirse la longitud de la lana l (en centímetros).* Supóngase que el ganado que tiene lana de 2 centímetros de largo tiene también una tasa respiratoria promedio de 160, y que en el que hay lana de 4 centímetros se tiene una tasa respiratoria de 125. Supóngase que r y l tienen una relación lineal. (a) Obtenga una ecuación que dé como resultado a r en términos de l. (b) Halle la tasa respiratoria de ovejas cuya lana tiene una longitud de 1 centímetro.

21. En análisis de producción, una línea *de isocosto* (o *de costo equivalente*) es una cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden adquirirse por la misma cantidad. Supóngase que un granjero ha asignado \$20,000 (dólares) para la adquisición de x toneladas de fertilizantes (que cuestan \$200 por tonelada) y y acres de terreno (que cuestan \$2000 por acre). Obtenga una ecuación de la línea de costo equivalente que describa las diversas combinaciones que pueden adquirirse por \$20,000. Observe que ni x ni y pueden ser negativas.

22. Un fabricante elabora los productos X y Y, que tienen utilidades unitarias de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden x unidades de X y y unidades de Y, entonces la utilidad total P está dada por $P = 4x + 6y$, en donde $x, y \geq 0$. (a) Trace la gráfica de esta ecuación para $P = 240$. Al resultado se le puede denominar *línea de isoutilidad* (o *de utilidad equivalente*) y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para $P = 240$. (c) Si $P = 600$, calcule la pendiente. (d) ¿Son paralelas las líneas de utilidad equivalente de los productos X y Y?

23. Con propósito de comparar, un profesor desea cambiar la escala de las calificaciones que se obtuvieron en un conjunto de exámenes, para que la calificación máxima siga siendo 100, pero que el promedio (media aritmética) sea de 80 en vez de 56. (a) Obtenga una ecuación lineal que logre esto. [*Sugerencia:* Se desea que 56 se convierta en 80 y que 100 siga siendo 100. Considere los puntos (56, 80) y (100, 100) o, en términos más generales, (x, y), en donde x es la calificación anterior y y es la nueva. Halle la pendiente y utilice una forma punto-pendiente. Exprese y en términos de x.] (b) Si en la nueva escala 60 es la calificación mínima aprobatoria, ¿cuál era la calificación mínima de aprobación en la escala original?

24. El resultado del experimento psicológico de Sternberg† sobre recuperación de información es que el tiempo de reacción de una persona, R, en milisegundos, es estadísticamente función lineal del tamaño del conjunto de memoria N en los siguientes términos:

$$R = 38N + 397.$$

Trace la gráfica para $1 \leq N \leq 5$. ¿Cuál es la pendiente?

25. En cierto experimento de aprendizaje que implica repetición y memoria,‡ se estimó que la proporción p de elementos recordados tenía una relación lineal con el tiempo efectivo de estudio t (en segundos), en donde t se encuentra entre 5 y 9. Para un tiempo efectivo de estudio de 5 segundos la proporción de elementos recordados puede ser de 0.32. Por cada aumento de 1 segundo en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentó en 0.059. (a) Obtenga una ecuación que dé p en términos de t. (b) ¿Qué proporción de elementos fueron recordados con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

26. En pruebas de dietas experimentales para cerdos, se determinó que el peso (promedio), w (en kilogramos) de un cerdo era, estadísticamente función lineal del número de días d posteriores al inicio de la dieta, en donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo fue de 20 kg al comienzo de la dieta y después subió 6.6 kg cada diez días, determine w como función de d y evalúe el peso de un cerdo 50 días después de haber comenzado la dieta.

27. Los biólogos han descubierto que el número de chirridos que los grillos de cierta especie emiten por

* Adaptado de G.E. Folk, Jr., *Texbook of Environmental Physiology,* 2a ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974).

† G.R. Loftus y E.F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (New York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

‡ D.L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, Vol. 10, ed. G.H. Bower (New York: Academic Press, Inc., 1976), p. 77.

minuto está relacionado con la temperatura. La relación es casi lineal. A 68°F los grillos chirrían aproximadamente 124 veces por minuto. A 80°F, lo hacen más o menos 172 veces por minuto. Obtenga una ecuación que dé la temperatura Fahrenheit t, en términos del número de chirridos c por minuto. (b) Si se contaran los chirridos durante sólo 15 segundos, ¿cómo se podría estimar la temperatura rápidamente?

5.3 Funciones cuadráticas

En la Sección 4.2 (Ejemplo 2) se describió una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. En seguida se presenta una definición formal.

DEFINICIÓN

Una función f es una ***función cuadrática*** *si, y sólo si, se puede expresar $f(x)$* en la forma $f(x) = ax_2 + bx + c$, *en donde, a, b y c son constantes y $a \neq 0$.*

Por ejemplo, las funciones $f(x) = x_2 - 3x + 2$ y $F(t) = -3t^2$ son cuadráticas. Sin embargo, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *no* es cuadrática porque no se puede expresar en la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se denomina **parábola** y su forma es como la de las curvas de la Figura 5.16. Si $a > 0$, la gráfica se extiende en forma indefinida hacia arriba y se dice que la parábola *abre hacia arriba* [Figura 5.16(a)]. Si $a < 0$, la parábola *abre hacia abajo* [Figura 5.16(b)].

Las parábolas de la Figura 5.16 son *simétricas* con respecto a una recta vertical, denominada **eje de simetría** de la parábola. Es decir, si se doblara la página sobre una de estas rectas, coincidirían las dos mitades de la parábola correspondiente. El eje (de simetría) *no* forma parte de la parábola, pero es un auxiliar útil al trazar la parábola.

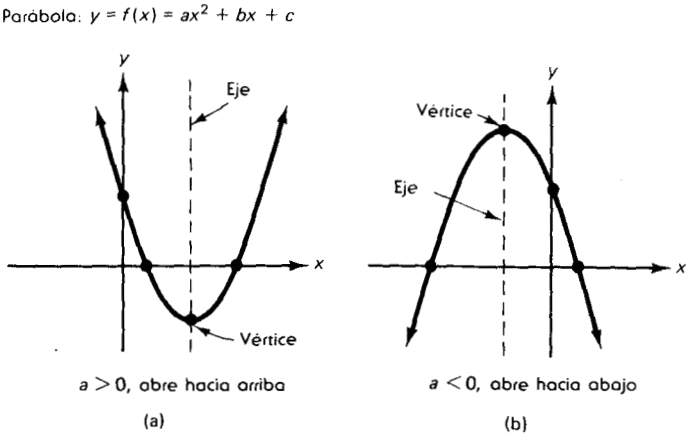


FIGURA 5.16

En la Figura 5.16 se muestran también los puntos a los que se denomina **vértice**, que es el punto en donde el eje corta la parábola. Si $a > 0$, el vértice es el punto "más bajo" de la parábola. Esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo en ese punto. Llevando a cabo manipulaciones algebraicas sobre $ax^2 + bx + c$ (a las que se les deno-

mina *completar el cuadrado*), puede determinarse no sólo este valor mínimo, sino también en dónde aparece.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c.$$

Sumando y restando $\frac{b^2}{4a}$ se obtiene

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Puesto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $a > 0$, se sigue que $f(x)$ tiene un valor mínimo cuando $x + \frac{b}{2a} = 0$, es decir, cuando $x = -\frac{b}{2a}$. La coordenada que corresponde a este valor de x es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Por ello, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Este es también el vértice de la parábola que abre hacia abajo ($a < 0$), pero en este caso $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor *máximo* de $f(x)$ [véase la Figura 5.16(b)].

El punto en el que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje y (es decir, el de la ordenada en el origen) ocurre cuando $x = 0$. La coordenada y de este punto es c, de modo que la intercepción y es $(0, c)$ o mejor dicho, c. En resumen, se tiene lo siguiente:

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
   Si $a < 0$, la curva abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
3. La ordenada en el origen (intercepción y) es c.

También se puede trazar en forma sencilla la gráfica de una función cuadrática ubicando primero el vértice, la ordenada en el origen y unos pocos puntos adicionales,

como los puntos en donde la parábola corta al eje x. Estas *abscisas en el origen* se calculan haciendo $y = 0$ y despejando x. Una vez que se encuentran esas intercepciones y el vértice, resulta relativamente sencillo trazar la parábola correspondiente a través de ellos. En el caso de que tales intercepciones con el eje x se encuentren muy cercanas al vértice, o que no existan puede encontrarse un punto a ambos lados del vértice que permita obtener una imagen razonable de la parábola. Debe tenerse presente que el trazar una recta vertical (punteada) a través del vértice proporciona el eje de simetría. Ubicando puntos a uno de los lados del eje se puede utilizar la simetría para obtener los puntos correspondientes del otro lado.

EJEMPLO 1

Graficar la ecuación cuadrática $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

Aquí $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Dado que $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2.$$

La coordenada y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Por consiguiente, el vértice (el punto más alto) es $(-2, 16)$. Puesto que $c = 12$, la ordenada en el origen es 12. Para determinar las abscisas en el origen, se iguala y a 0 en $y = -x^2 - 4x + 12$ y se determina el valor de x.

$$0 = -x^2 - 4x + 12,$$
$$0 = -(x^2 + 4x - 12),$$
$$0 = -(x + 6)(x - 2).$$

Por lo tanto, $x = -6$ o bien $x = 2$; así, las intercepciones sobre el eje x son -6 y 2. Luego se ubica el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes [véase la Figura 5.17(a)]. Puesto que (0, 12) se encuentra a *dos* unidades a la *derecha* del eje de simetría, existe un punto correspondiente a *dos* unidades a la *izquierda* del mismo con igual ordenada. En consecuencia, se obtiene el punto $(-4, 12)$. Se traza a través de todos estos puntos una parábola que abre hacia arriba [véase la **Figura 5.17(b)**].

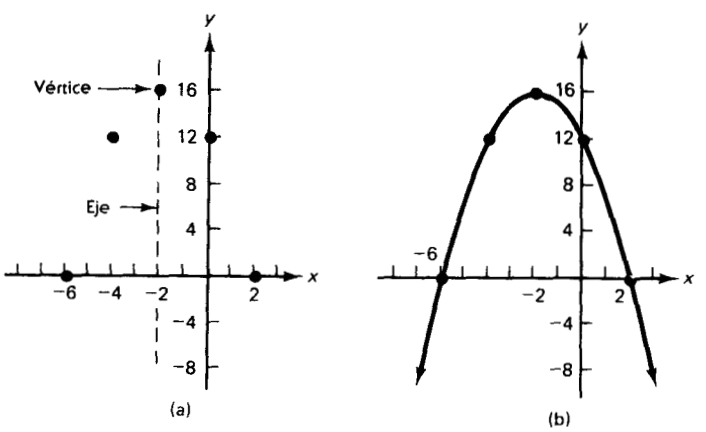


FIGURA 5.17

EJEMPLO 2

Graficar $p = 2q^2$.

Aquí p es función cuadrática de q, en donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Dado que $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada q del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0,$$

y la coordenada p es $2(0)^2 = 0$. Así, el vértice es (0, 0). En este caso, el eje p es el eje de simetría. Una parábola que abre hacia arriba con vértice en (0, 0) no puede tener ninguna otra intercepción. Consecuentemente, para trazar una gráfica razonable se determina un punto a uno y otro lado del vértice. Si $q = 2$, entonces $p = 8$. Esto determina el punto (2, 8) y, por simetría, el punto (−2, 8) (véase la Figura 5.18).

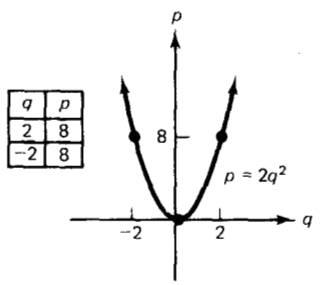


FIGURA 5.18

EJEMPLO 3

Graficar $g(x) = x^2 - 6x + 7$

Aquí, g es una función cuadrática en donde $a = 1$, $b = -6$ y $c = 7$. La parábola abre hacia arriba porque $a > 0$. La abscisa del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3,$$

y $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$. Por ello, el vértice es (3, −2). Dado que $c = 7$, la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intercepciones con el eje x se hace $g(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 6x + 7.$$

No es fácil factorizar el lado derecho, por lo que se utiliza la fórmula cuadrática a fin de encontrar los valores de x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Por consiguiente, las intersecciones con el eje x son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$. Después de situar el vértice, las intercecciones y (por simetría) el punto (6, 7), se dibuja una parábola que abre hacia arriba, como la que aparece en la Figura 5.19.

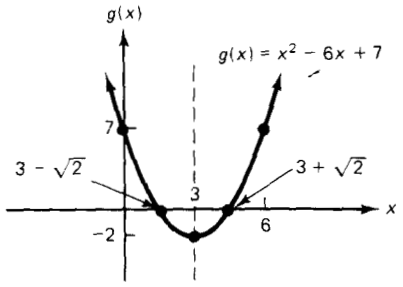


FIGURA 5.19

EJEMPLO 4

Graficar $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$. *Hallar el ámbito o contradominio de* f.

Esta función es cuadrática con $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$. Puesto que $a > 0$, la gráfica es una parábola que abre hacia arriba. La abscisa del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2},$$

y la ordenada es $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$. Por lo tanto, el vértice es $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Como $c = 3$, la ordenada en el origen es 3. Una parábola que abre hacia arriba y cuyo vértice está por encima del eje x no tiene intercepciones con dicho eje. En la Figura 5.20 se situaron la ordenada en el origen, el vértice y un punto adicional $(-2, 7)$ a la izquierda del vértice. Por simetría, se puede obtener también el punto $(1, 7)$. Trazando la parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Puede verse en la Figura 5.20 que el ámbito de f es todas las $y \geq \frac{5}{2}$.

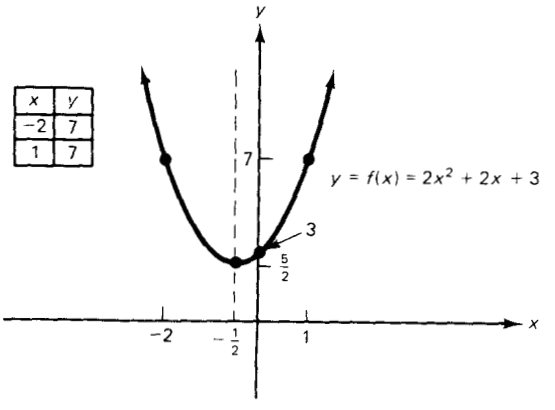


FIGURA 5.20

EJEMPLO 5

La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000 - 2q$, *en donde* p *es el precio (en dólares) por unidad cuando existe una demanda semanal* q *por parte de los consumidores. Obtener el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determinar dichos ingresos.*

Los ingresos totales, r, estan dados por

$$\textbf{ingresos totales} = \textbf{(precio)(cantidad)}.$$

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q \\ r &= 1000q - 2q^2. \end{aligned}$$

Obsérvese que r es una función cuadrática de q, con $a = -2$, $b = 1000$, y $c = 0$. Dado que $a < 0$ (la parábola abre hacia abajo), r es máxima cuando

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250.$$

El valor máximo de r es

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250{,}000 - 125{,}000 = 125{,}000. \end{aligned}$$

Así, los ingresos máximos que el fabricante puede recibir son \$125,000, que ocurren con un nivel de producción de 250 unidades. En la Figura 5.21 se muestra la gráfica de la función de ingresos. Sólo se ilustra la porción para la cual $q \geq 0$ y $r \geq 0$, debido a que la cantidad y los ingresos no pueden ser negativos.

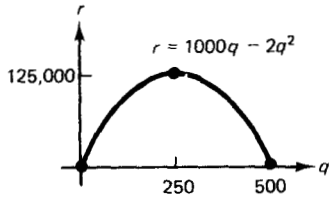


FIGURA 5.21

EJERCICIOS 5.3

En los Problemas **1-8**, *establezca si la función es cuadrática o no.*

1. $f(x) = 5x^2$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$.

3. $g(x) = 7 - 6x$.

4. $h(s) = 2s^2(s^2 + 1)$.

5. $h(q) = (q + 4)^2$.

6. $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$.

7. $f(s) = \dfrac{s^2 - 4}{2}$.

8. $g(t) = (t^2 - 1)^2$.

En los Problemas **9-12,** *no incluya la gráfica.*

9. Para la parábola $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$, (a) determine el vértice. (b) ¿Corresponde el vértice al punto más alto o al punto más bajo de la gráfica?

10. Resuelva de nuevo el Problema 9 si $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$.

11. Para la parábola $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$, halle (a) la ordenada en el origen, (b) las intercepciones x y (c) el vértice.

12. Resuelva de nuevo el Problema 11 si $y = f(x) = 3 + x - 2x^2$.

En los Problemas **13-22,** *grafique cada una de las funciones. Proporcione el vértice y las intercepciones, y diga cuál es el ámbito (o contradominio).*

13. $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$.

14. $y = f(x) = -3x^2$.

15. $y = g(x) = -2x^2 - 6x$.

16. $y = f(x) = x^2 - 1$.

17. $s = h(t) = t^2 + 2t + 1$.

18. $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2$.

19. $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2$.

20. $y = H(x) = 1 - x - x^2$.

21. $t = f(s) = s^2 - 8s + 13$.

22. $t = f(s) = s^2 + 6s + 11$.

En los Problemas **23-26,** *diga si $f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo, y obtenga ese valor.*

23. $f(x) = 100x^2 - 20x + 25$.

24. $f(x) = -2x^2 - 16x + 3$.

25. $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2$.

26. $f(x) = x(x + 3) - 12$.

27. La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = f(q) = 1200 - 3q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se tiene una demanda semanal de q unidades. Calcule el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determine el ingreso.

28. Una empresa comercializadora estima que n meses después de la introducción del producto nuevo de un cliente, $f(n)$ millares de hogares lo estarán utilizando, en donde

$$f(n) = \tfrac{10}{9}n(12 - n), \qquad 0 \le n \le 12.$$

Calcuar el número máximo de casas en las que se empleará dicho producto.

29. Algunos biólogos estudiaron los efectos nutricionales en ratas que se alimentaron con una dieta que contenía 10% de proteína.* La proteína consistió en yema de huevo y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de yema en la mezcla de proteínas, el grupo de investigadores estimó que el aumento promedio en peso (en gramos) de un animal durante un cierto periodo fue $f(P)$, en donde

$$f(P) = -\tfrac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \qquad 0 \le P \le 100.$$

Halle el aumento máximo de peso.

30. La altura s de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo está dada por

$$s = -4.9t^2 + 58.8t,$$

en donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos. ¿A los cuántos segundos alcanza la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

5.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando es necesario describir en términos matemáticos una situación, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, supóngase que el director de una fábrica está elaborando un programa de producción para dos modelos de un producto nuevo.

* Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R.I. Mateles y S.R. Tannenbaum (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

El primer modelo requiere de 4 piezas A y nueve piezas B. El segundo requiere de 5 piezas A y 14 piezas B. La fábrica recibe 335 piezas A y 850 piezas B de sus proveedores cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe planearse fabricar cada día, de manera que se utilicen todas las piezas A y las piezas B?

Resulta conveniente formar una tabla en la que se resuman los datos importantes. En la Tabla 5.2 se muestra el número de piezas A y piezas B que se requieren para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 5.2

	Primer modelo	Segundo modelo	Total disponible
Piezas A	4	5	335
Piezas B	9	14	850

Supóngase que x es el número de los primeros modelos que se fabrican cada día, y y, el número de los segundos modelos. Se requiere entonces un total de $4x + 5y$ piezas A y $9x + 14y$ piezas B. Puesto que se dispone de 335 piezas A y 850 piezas B, se tiene que

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (1) \\ 9x + 14y = 850. & (2) \end{cases}$$

A este grupo de ecuaciones se le denomina **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema consiste en encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones se verifiquen en *forma simultánea*. A dichos valores se les denomina *soluciones* del sistema.

Debido a que las Ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son rectas; se les identifica como L_1 y L_2. Ahora bien, las coordenadas de cualquier punto que se encuentren en una recta satisfacen su ecuación; es decir, hacen que la ecuación resulte cierta. Por ello, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfarán ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección contiene la solución del sistema.

Si se trazan L_1 y L_2 en el mismo plano, se presentarán tres casos.

1. L_1 y L_2 pueden cortarse exactamente en un punto, por ejemplo, (x_0, y_0) (véase la Figura 5.22). Si esto es así, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.

2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener ningún punto común (véase la Figura 5.23). En este caso no existe ninguna solución.

3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la Figura 5.24). Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto que se encuentre sobre la recta serán una solución del sistema. En consecuencia, existe una cantidad infinita de soluciones.

Lo que resulta de principal importancia aquí, son los métodos algebraicos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En esencia, se reemplaza el sistema en forma sucesiva por otros sistemas que tienen la misma solución (es decir, por *sistemas equivalentes*), pero cuyas ecuaciones tengan una forma cada vez más deseable para determinar la solución. En términos más precisos, se busca un sistema equivalente que

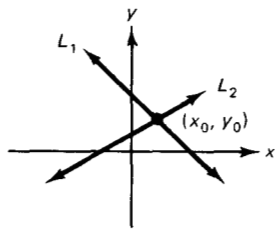


FIGURA 5.22

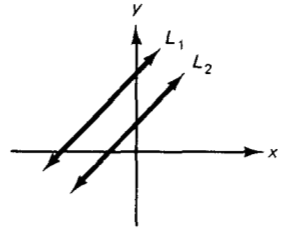


FIGURA 5.23

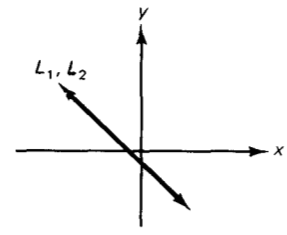


FIGURA 5.24

contenga una ecuación en la cual una de las variables no aparezca (es decir, *se elimina* una de las variables). En seguida se ilustra este procedimiento.

En el problema planteado originalmente,

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (3) \\ 9x + 14y = 850, & (4) \end{cases}$$

se obtiene un sistema equivalente en el que no aparece x en una de las ecuaciones. Primero, se halla un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x de cada ecuación sean iguales, excepto por el signo. Multiplicando por 9 la Ecuación (3) [es decir, multiplicando ambos lados de la Ecuación (3) por 9] y multiplicando por -4 la Ecuación (4), resulta

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & (5) \\ -36x - 56y = -3400. & (6) \end{cases}$$

Los dos miembros de la Ecuación (6) son iguales, de modo que puede *sumarse* cada uno de ellos al lado correspondiente de la Ecuación (5). Se obtiene así

$$-11y = -385,$$

que tiene una sola variable, tal como se planeaba. La resolución da

$$y = 35,$$

así que resulta el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & (7) \\ -36x - 56y = -3400. & (8) \end{cases}$$

Reemplazando y por 35 en la Ecuación (8), resulta

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el sistema original equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Se puede verificar la respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en las *dos* ecuaciones originales. En la Ecuación (3) se tiene $4(40) + 5(35) = 335$, o bien $335 = 335$. En la Ecuación (4), $9(40) + 14(35) = 850$, o bien $850 = 850$. Consecuentemente, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

El director debe planear la fabricación de 40 unidades diarias del primer modelo y 35 del segundo. El procedimiento que se utilizó se denomina **eliminación por adición**. Aunque se decidió eliminar x en primer lugar, pudo haberse hecho lo mismo con y mediante un procedimiento similar.

EJEMPLO 1

Utilizar la eliminación por adición para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Alineando por conveniencia los términos en x y y, da

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y se multiplica por 3 la Ecuación (9) y por 4 la Ecuación (10):

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la Ecuación (11) a la Ecuación (12), resulta $17x = 51$, de donde $x = 3$. Se obtiene así el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Reemplazando x por 3 en la Ecuación (13) queda

$$\begin{aligned} 9(3) - 12y &= 39, \\ -12y &= 12, \\ y &= -1, \end{aligned}$$

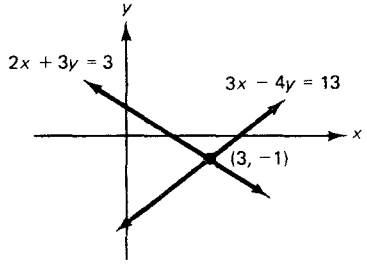


FIGURA 5.25

de manera que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. En la Figura 5.25 se presenta una gráfica del sistema.

Existe otra forma de resolver el sistema del Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3. & (16) \end{cases}$$

En primer lugar, se elige una de las ecuaciones, por ejemplo, la Ecuación (15) y se despeja una de las incógnitas en términos de la otra, por ejemplo, x en términos de y. Así, la Ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o bien

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y se obtiene

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la Ecuación (17) en la Ecuación (18), da, para la Ecuación (18),

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \quad (19)$$

De esta manera, se elimina la x. Resolviendo la Ecuación (19) se tiene

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \quad \text{(eliminación de las fracciones)},$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Reemplazando por -1 y en la Ecuación (17) resulta $x = 3$, y el sistema original equivale a

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1, \end{cases}$$

al igual que antes. A este método se le denomina **eliminación por sustitución.**

EJEMPLO 2

Utilizar la eliminación por sustitución para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Es fácil despejar x en la primera ecuación. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (20) \\ 2x + 4y + 4 = 0. & (21) \end{cases}$$

Sustituyendo x por $-2y + 8$ en la Ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$
$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Lo anterior se simplifica a $20 = 0$.

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (22) \\ 20 = 0. & (23) \end{cases}$$

Como la Ecuación (23) *nunca* se verifica, **no existe solución** para el sistema original. La razón resulta evidente si se observa que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada en el origen, de la siguiente manera:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones corresponden a rectas con pendiente igual a $-\frac{1}{2}$, pero con diferentes ordenadas en el origen, 4 y -1. Esto es, determinan rectas paralelas diferentes (véase la Figura 5.26).

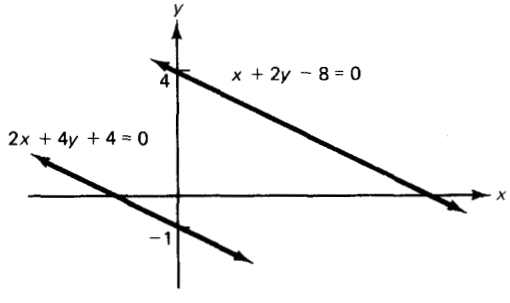


FIGURA 5.26

EJEMPLO 3

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & (24) \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & (25) \end{cases}$$

Multiplicando por -2 La Ecuación (25), se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & (26) \\ -x - 5y = -2. & (27) \end{cases}$$

Sumando la Ecuación (26) a la Ecuación (27) resulta

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & (28) \\ 0 = 0. & (29) \end{cases}$$

Debido a que la Ecuación (29) *siempre* se verifica, cualquier solución de la Ecuación (28) lo es también del sistema. Considerándolo desde otro punto de vista, expresando las Ecuaciones (24) y (25) en la forma pendiente-ordenada en el origen se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan la misma recta. Por lo tanto, las rectas coinciden (véase la Figura 5.27) y las Ecuaciones (24) y (25) son equivalentes. La solución al sistema consiste en las coordenadas de cualquier punto que se encuentre en la recta $x + 5y = 2$, y por consiguiente, existe una cantidad infinita de soluciones. Por ejemplo, $x = 0$ y $y = \frac{2}{5}$, es una solución.

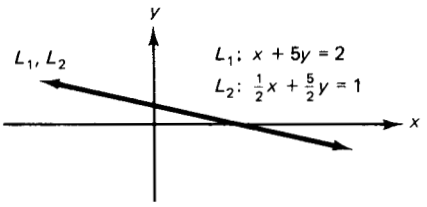


FIGURA 5.27

Una ecuación de la forma $Ax + By + Cz = D$, en donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas nulas al mismo tiempo, se denomina **ecuación lineal general en las variables x, y, z.** En el Ejemplo 4 se muestra la forma de resolver un sistema de tres ecuaciones como éstas.

EJEMPLO 4

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & (30) \\ -x + 2y + 2z = 1, & (31) \\ x - y - 3z = -6. & (32) \end{cases}$$

Este sistema consta de tres ecuaciones lineales en tres variables. De la Ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo x en las Ecuaciones (30) y (31), da

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3, \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1, \\ x = y + 3z - 6. \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5, & (34) \\ x = y + 3z - 6. & (35) \end{cases}$$

Obsérvese que x no aparece en las Ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier ecuación del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), se considera la resolución de éstas en primer lugar:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5. & (34) \end{cases}$$

De la Ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que se puede reemplazar la Ecuación (33) por $3(z - 5) + 7z = 15$ o bien $z = 3$. Dado que z es 3, se puede sustituir la Ecuación (34) por $y = -2$. En consecuencia, el sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se convierte en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de donde $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$ y $z = 3$, lo cual se puede verificar.

EJEMPLO 5

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = -2, & (36) \\ x - 2y = \dfrac{13}{2}, & (37) \\ 3x + 2y - 2z = -\dfrac{9}{2}. & (38) \end{cases}$$

Dado que es posible expresar la Ecuación (37) como $x - 2y + 0z = \frac{13}{2}$, pueden considerarse las Ecuaciones (36) a (38) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la Ecuación (37), $x = 2y + \frac{13}{2}$. Sustituyendo x en las Ecuaciones (36) y (38) y simplificando, se tiene que

$$\begin{cases} 2\left(2y + \dfrac{13}{2}\right) + y + z = -2 \\ x - 2y = \dfrac{13}{2}, \\ 3\left(2y + \dfrac{13}{2}\right) + 2y - 2z = -\dfrac{9}{2}, \end{cases}$$

o, en términos más simples,

$$\begin{cases} 5y + z = -15, & (39) \\ x = 2y + \dfrac{13}{2}, & (40) \\ 4y - z = -12. & (41) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones (39) y 41),

$$\begin{cases} 5y + z = -15, \\ 4y - z = -12, \end{cases}$$

resulta que $y = -3$ y $z = 0$. Sustituyendo estos valores en la Ecuación (40) queda $x = \frac{1}{2}$. Así que la solución al sistema original es $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$ y $z = 0$.

EJEMPLO 6

Una empresa fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 500 litros de una solución ácida al 25% (esto significa que 25% del volumen es ácido). Si se tienen disponibles en el almacén soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una de ellas se deben mezclar para cumplir con el requisito del pedido?

Sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y al 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500. \quad (42)$$

Obsérvese la Figura 5.28. En 500 litros de una solución al 25% habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30%, y $0.18y$ litros de la solución al 18%. Consecuentemente

$$0.30x + 0.18y = 125. \quad (43)$$

Las Ecuaciones (42) y (43) forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Despejando x en la Ecuación (42), resulta $x = 500 - y$. Sustituyendo esto en la Ecuación (43), da

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125. \quad (44)$$

Encontrando el valor de y en la Ecuación (44), se halla que y $208\frac{1}{3}$ litros. Por ello, $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros.

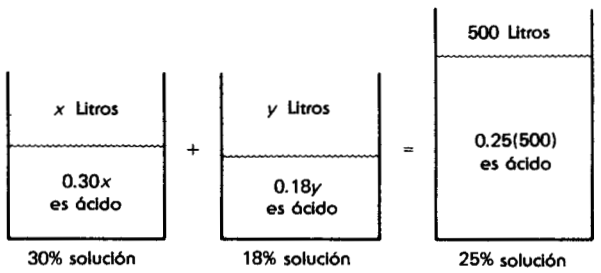


FIGURA 5.28

EJERCICIOS 5.4

En los Problemas **1-16,** *resuélvanse en forma algebraica los sistemas.*

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p + q = 3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

17. Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución ácida al 24%. Se tienen disponibles soluciones al 20% y al 30% ¿Cuántos galones de cada solución se deben mezclar para surtir el pedido?

18. Una compañía tiene ingresos gravables por \$312,000 (dólares). Los impuestos federales son el 25% de la porción que quede después de haber pagado los impuestos estatales. Los impuestos estatales son el 10% de la porción que quede después de haber pagado los impuestos federales. Halle el valor de ambos impuestos federal y estatal.

19. Un fabricante de muebles para comedor produce dos estilos, norteamericano clásico y contemporáneo. De experiencias pasadas, los administradores han determinado que se puede vender 20% más del estilo norteamericano clásico que del estilo contemporáneo. Se obtienen utilidades de \$250 sobre cada conjunto de estilo norteamericano clásico que se venda y de \$350 sobre cada uno de los contemporáneos. Si, para el año siguiente, los administradores desean obtener utilidades totales de \$130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben vender?

20. A una empresa de encuestas se le otorgó un contrato para llevar a cabo un trabajo de evaluación de producto para una firma. Se entrevistó a un total de 250 personas. La empresa reportó que la gente a la que le gustaba el producto era 62.5% más que aquella a la que no le gustaba. Sin embargo, el reporte no señaló que 16% de las personas entrevistadas no dieron respuesta. ¿Cuántas personas entrevistadas gustaban del producto? ¿A cuántas no les gustaba? ¿Cuántas personas no dieron respuesta?

21. Una compañía fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de \$7000 al mes y el costo de fabricar cada calculadora es \$7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de \$8800 mensuales y se requieren \$6.00 para fabricar cada unidad. El siguientes mes, la compañía debe fabricar 1500 calculadoras. ¿Cuántas deben fabricarse en cada planta para que sean iguales los costos totales en cada una?

22. Un vendedor mayorista de café mezcla tres tipos de producto que se venden en \$2.20 (dólares), \$2.30 y \$2.60 por libra para obtener 100 libras de café que cuesta \$2.40 la libra. Si el vendedor utiliza la misma cantidad de los dos cafés de mayor precio, ¿qué cantidad debe utilizar de cada tipo en la mezcla?

23. Una compañía paga a sus vendedores con base en cierto porcentaje de los primeros \$100,000 de ventas, más otro porcentaje sobre el excedente de los \$100,000 de ventas. Si un vendedor ganó \$8,500 en ventas de \$175,000 y otro vendedor, \$14,800 en ventas de \$280,000, determine los dos porcentajes.

24. En algunos reportes noticiosos, se comparan las utilidades de alguna compañía durante este año (T)

con los del año pasado (L), pero no siempre se proporcionan los valores reales de T y L. Este año una compañía obtuvo utilidades por 20,000,000 por encima de las obtenidas el año anterior. Las utilidades aumentaron en 25%. A partir de estos datos, determine T y L.

25. Una empresa fabrica unidades de control industrial. Sus nuevos modelos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, utilizan 6 piezas M y 3 piezas N. Para fabricar cada unidad de Argón II utilizan 10 piezas M y 8 piezas N. La compañía recibe un total de 760 piezas M y 500 piezas N de su proveedor cada día. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede fabricar la compañía diariamente? Supóngase que se utilizan todas las partes.

26. Una persona realizó dos inversiones y el porcentaje de rendimiento anual que recibió sobre cada una de ellas fue igual. De la cantidad total invertida $\frac{3}{10}$ de ella más \$600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final del primer año la persona recibió un rendimiento de \$384. Si el rendimiento general después del primer año fue de \$1120, halle la cantidad total invertida.

27. Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla que aparece enseguida. La compañía tiene en almacén 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Para su corrida de producción de final de la temporada, la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

28. Se invirtió un total de \$35,000 a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés para el primer año fue de \$2,830, que no se reinvirtió. En el segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% obtuvo no ese porcentaje, sino el 10%, y las demás tasas permanecieron igual. El interés total para el segundo año fue de \$2,960. ¿Cuánto se invirtió a cada una de las tasas?

29. Una compañía paga \$8 (dólares) por hora a sus trabajadores calificados de su departamento de ensamble. A los trabajadores semicalificados de ese departamento se les pagan \$4 por hora. A los empleados del departamento de envíos se les paga \$5 por hora. Debido a un aumento en los pedidos, la compañía necesita tener un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamble y de envíos. Pagará un total de \$370 por hora a estos empleados. Debido a una cláusula del contrato de trabajo, debe haber el doble de trabajadores semicalificados, en comparación con los calificados. ¿Cuántos trabajadores calificados, semicalificados y empleados del departamento de envíos debe contratar la compañía?

30. Se va a llenar un carro tanque de ferrocarril con capacidad de 10,000 galones con un solvente proveniente de dos tanques de almacenamiento, el A y el B. El solvente del tanque A se bombea a un ritmo de 20 galones por minuto. El solvente del tanque B se bombea a 30 galones por minuto. Por lo general, las dos bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, debido a un fusible fundido de la bomba A, se ocasionó en ésta una demora de 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada uno de los tanques de almacenamiento se utilizarán para llenar el carro tanque?

5.5 Sistemas no lineales

Un sistema de ecuaciones en el cual cuando menos una de sus ecuaciones no es lineal se denomina **sistema no lineal**. Con frecuencia es posible encontrar las soluciones de este tipo de sistemas en forma algebraica, por medio de sustitución, tal como se hizo con los sistemas lineales. Se ilustra lo anterior en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & (1) \\ 3x - y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Despejando y en la Ecuación (2) se obtiene

$$y = 3x + 1. \tag{3}$$

Sustituyendo en la Ecuación (1) y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 &= 0, \\ x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x + 3)(x - 2) &= 0, \\ x = -3 \quad \text{o bien} \quad x &= 2. \end{aligned}$$

De la Ecuación (3), si $x = -3$, entonces $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Se debe verificar que ambos pares de valores satisfacen el sistema dado. Así, las soluciones son $x = -3, y = -8$ y $x = 2, y = 7$. Estas soluciones se pueden observar en forma geométrica en la gráfica del sistema que aparece en la Figura 5.29. Obsérvese que la gráfica de la Ecuación (1) es una parábola y la de la Ecuación (2) es una recta. La soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

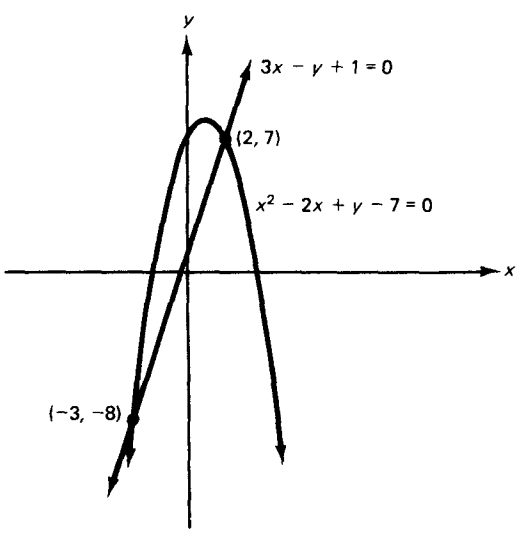


FIGURA 5.29

EJEMPLO 2

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 2}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación resulta

$$y = 4 - x. \tag{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación

$$4 - x = \sqrt{x + 2},$$

$$16 - 8x + x^2 = x + 2 \qquad \text{(elevando ambos miembros al cuadrado),}$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0,$$

$$(x - 2)(x - 7) = 0.$$

En consecuencia, $x = 2$ o bien $x = 7$. De la Ecuación (4), si $x = 2$, $y = 2$; y si $x = 7$, $y = -3$. Aunque $x = 2$ y $y = 2$ satisfacen las ecuaciones originales, no es el caso para $x = 7$ y $y = -3$. Por lo tanto, la solución es $x = 2$ y $y = 2$.

EJERCICIOS 5.5

Resuelva los siguientes sistemas no lineales.

1. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 4 - q, \\ p = q + 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28, \\ x - y = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q = 0, \\ 3q - 2p - 1 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q}, \\ p = q^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w, \\ 3z = 2w + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 14, \\ y = x^2 - 16. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = 3\sqrt{x + 4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x - 1} + 1, \\ y = \dfrac{1}{x - 1}. \end{cases}$

5.6 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

Recuérdese de la Sección 5.2 que una ecuación que relaciona el precio unitario con la cantidad de demanda (u oferta) se denomina *ecuación de demanda* (o *ecuación de oferta*). Supóngase que la ecuación lineal de demanda para el producto Z es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \tag{1}$$

y que su ecuación lineal de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8, \tag{2}$$

en donde $q, p \geq 0$. Las curvas de demanda y de oferta definidas por las Ecuaciones (1) y (2) se presentan en las Figuras 5.30 y 5.31. Al analizar la Figura 5.30 se observa

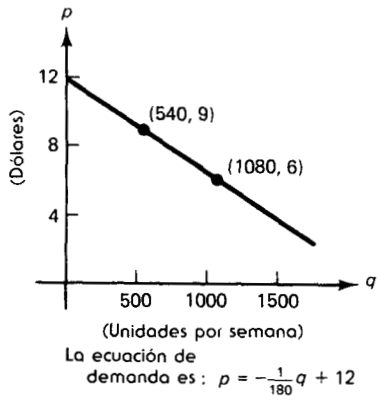


FIGURA 5.30

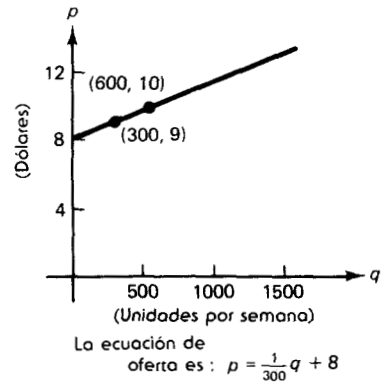


FIGURA 5.31

que los consumidores adquirirían 540 unidades semanales si el precio fuera de \$9 por unidad; 1,080 unidades con precio de \$6, etcétera. En la Figura 5.31 se muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los fabricantes colocarían en el mercado 300 unidades por semana; en \$10 ofrecerían 600 unidades, y así sucesivamente.

Cuando se representan en el mismo plano coordenado tanto la curva de oferta como la de demanda para un producto, el punto (m, n) en el que se intersecan las dos curvas se denomina **punto de equilibrio** (véase la Figura 5.32). Al precio n, se le denomina **precio de equilibrio**, y es el precio al cual los consumidores adquirirían la misma cantidad del producto que los fabricantes estarían dispuestos a vender a ese precio. En otros términos, n es el precio en el cual ocurre la estabilidad en la relación entre fabricantes y consumidores. A la cantidad m se le denomina **cantidad de equilibrio**.

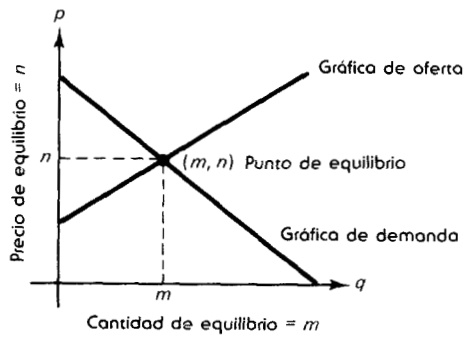


FIGURA 5.32

Para determinar en forma precisa el punto de equilibrio, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Enseguida se hace esto para los datos presentados antes, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda),} \\ p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta).} \end{cases}$$

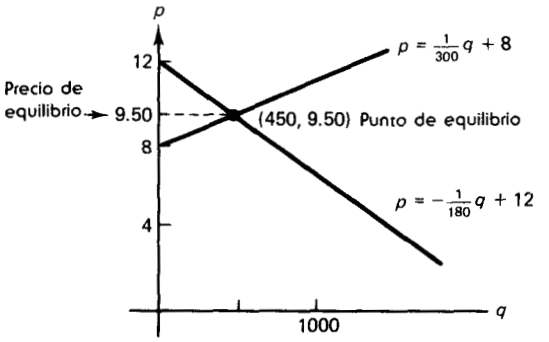


FIGURA 5.33

Sustituyendo p por $\frac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda,

$$\frac{1}{300}q + 8 = -\frac{1}{180}q + 12,$$

$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q = 4,$$

$$q = 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio).}$$

Por tanto

$$p = \frac{1}{300}(450) + 8$$

$$= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio),}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por consiguiente, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes elaborarán exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores adquirirán a ese precio (véase la Figura 5.33).

EJEMPLO 1

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ *la ecuación de oferta para cierto fabricante, y supóngase que la ecuación de demanda para su producto es* $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se carga un impuesto de* \$1.50 *por unidad al fabricante, ¿cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?*

b. *Determinar los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio, tanto antes como después del impuesto.*

a. Antes de los impuestos, el precio de equilibrio se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65. \end{cases}$$

No se toma en consideración $q = -800$ porque q representa cantidad. Eligiendo $q = 400$, se tiene que $p = (8000/400) = 20$ y el punto que se requiere es (400, 20) (véase la Figura 5.35).

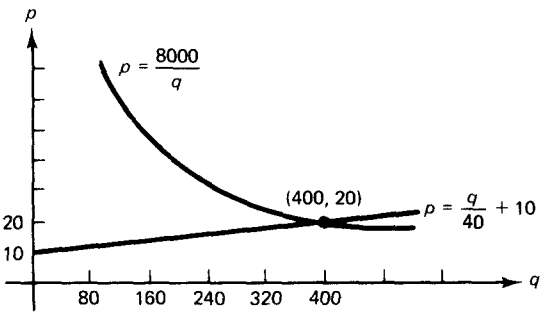


FIGURA 5.35

Supóngase que un fabricante elabora el producto A y lo vende en \$8,00 por unidad. Entonces, los ingresos totales, y_{TR} que recibe al vender q unidades son

$$y_{TR} = 8q \quad \text{(ingresos totales)}.$$

La diferencia entre los ingresos totales que se reciben por q unidades y los costos totales de las mismas unidades representan las utilidades (o pérdidas, si la diferencia es negativa) para el fabricante:

utilidad (o pérdida) = ingresos totales − costos totales.

Los **costos totales**, y_{TC}, son la suma de los costos variables totales, y_{VC} y los costos fijos totales y_{FC}.

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}.$$

Los **costos fijos** son los costos que en condiciones normales no dependen del nivel de producción; es decir, durante cierto intervalo de tiempo permanecen constantes a cualquier nivel de producción (algunos ejemplos son la renta, los salarios de los funcionarios y el mantenimiento normal). Los **costos variables** son los que varían con el nivel de producción (tales como el costo de materiales, de mano de obra, el mantenimiento debido a desgaste y descompostura, etc.). Supongáse que para q unidades del producto A

$$y_{FC} = 5000 \quad \text{(costos fijos)}$$

y

$$y_{VC} = \frac{22}{9}q \quad \text{(costos variables)}.$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \quad \text{(costos totales)}.$$

En la Figura 5.36 aparecen las gráficas de los costos fijos, los costos totales y los ingresos totales. El eje horizontal representa el nivel de producción q, y el eje vertical representa el valor total (en unidades monetarias) de los ingresos o costos. El **punto de**

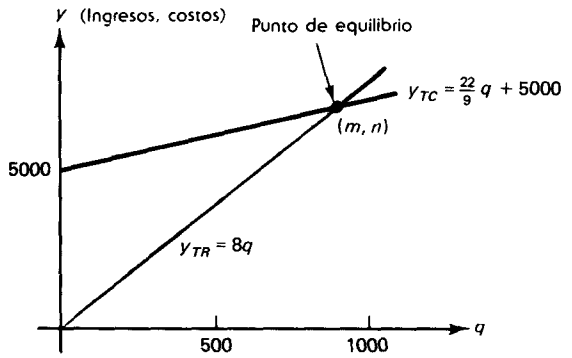


FIGURA 5.36

equilibrio es el punto en el cual ingresos totales = costos totales ($TR = TC$). Ocurre cuando los niveles de producción y de ventas dan como resultado que no hay pérdidas ni utilidades para el fabricante. En el diagrama, que se denomina *gráfica de punto de equilibrio*, es el punto (m, n) en el cual se intersecan las gráficas de $y_{TR} = 8q$ y $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$. Se denomina a m **cantidad de punto de equilibrio**, y a n, **ingresos de punto de equilibrio**. Cuando los costos variables y los ingresos están relacionados en forma lineal con la producción, como en el ejemplo, para cualquier nivel de producción mayor que m, los ingresos totales son mayores que los costos totales, lo que da como resultado utilidades. Sin embargo, a cualquier nivel inferior m unidades, los ingresos totales son menores que los costos totales, dando como resultado una pérdida. Con producción de m unidades, la utilidad es cero. En el siguiente ejemplo se examinan los datos con mayor detalle.

EJEMPLO 3

Un fabricante vende un producto a \$8 *por unidad, y vende todo lo que fabrica. Los costos fijos son de* \$5,000 *y los costos variables por unidad, de* $\frac{22}{9}$ *(dólares). Determinar lo siguiente:*

a. *Producción e ingresos totales en el punto de equilibrio.*

b. *Utilidades cuando se fabrican* 1,800 *unidades.*

c. *Pérdidas cuando se fabrican* 450 *unidades.*

d. *Producción requerida para obtener utilidades de* \$10,000.

a. Con un nivel de producción de q unidades, los costos variables son de $y_{VC} = \frac{22}{9}q$, y los ingresos totales, $y_{TR} = 8q$. Por ello,

$$y_{TR} = 8q,$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000.$$

En el punto de equilibrio, ingresos totales = costos totales. Así, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Dado que

$$y_{TR} = y_{TC},$$

se tiene

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000,$$

$$\frac{50}{9}q = 5000,$$

$$q = 900.$$

En consecuencia, la producción que se desea es 900 unidades y da como resultado ingresos totales (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200.$$

b. Dado que utilidades = ingresos totales − costos totales, cuando $q = 1800$ se tiene que

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$

$$= 5000.$$

Las utilidades que se obtienen al fabricar y vender 1,800 unidades son \$5,000.

c. Cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500.$$

Se presenta una pérdida de \$2,500 cuando el nivel de producción es de 450 unidades.

d. Con el objeto de obtener utilidades por \$10,000, se tiene

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales}.$$

$$10{,}000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right),$$

$$15{,}000 = \frac{50}{9}q,$$

$$q = 2700.$$

Para ello se deben fabricar 2,700 unidades.

EJEMPLO 4

Determinar la cantidad de punto de equilibrio de una empresa, dados los siguientes datos: costos fijos totales, \$1,200*; costos variables por unidad,* \$2*; ingresos totales por la venta de* q unidades, $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Para q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q},$$

$$y_{TC} = 2q + 1200.$$

Igualando los ingresos totales a los costos totales,

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200, \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 2)}$$
$$50\sqrt{q} = q + 600.$$

Elevando al cuadrado ambos lados,

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2,$$
$$0 = q^2 - 1300q + 360{,}000.$$

Mediante la fórmula cuadrática

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250{,}000}}{2},$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2},$$

$$q = 400 \quad \text{o bien} \quad q = 900.$$

Aunque tanto $q = 400$ = como $q = 900$ son cantidades de punto de equilibrio, obsérvese en la Figura 5.37 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, por lo que siempre habrá pérdida. Ocurre esto porque aquí el ingreso total no está linealmente relacionado con la producción. Por lo tanto, fabricar más unidades que la cantidad de punto de equilibrio no necesariamente garantiza obtener utilidades.

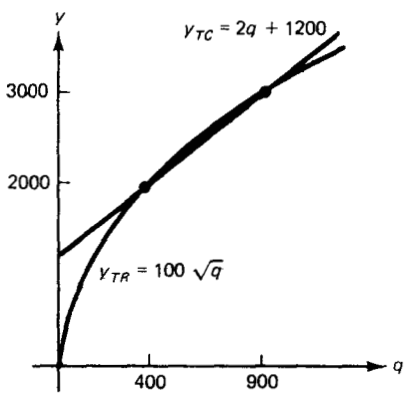


FIGURA 5.37

EJERCICIOS 5.6

En los Problemas **1-8,** *la primera ecuación es una ecuación de oferta, y la segunda, una ecuación de demanda para un producto determinado. Si p representa el precio por unidad y q representa el número de unidades por unidad de tiempo, encontrar el punto de equilibrio. En los Problemas* **1** *y* **2** *graficar el sistema.*

1. $p = \frac{3}{100}q + 2,$
$p = -\frac{7}{100}q + 12.$

2. $p = \frac{1}{2000}q + 3,$
$p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5}.$

3. $35q - 2p + 250 = 0,$
$65q + p - 537.5 = 0.$

4. $246p - 3.25q - 2460 = 0$,
$410p + 3q - 14{,}452.5 = 0$.

5. $p = 2q + 20$,
$p = 200 - 2q^2$.

6. $p = (q + 10)^2$,
$p = 388 - 16q - q^2$.

7. $p = \sqrt{q + 10}$,
$p = 20 - q$.

8. $p = \frac{1}{5}q + 5$,
$p = \dfrac{3000}{q + 20}$.

En los Problemas **9-14,** y_{TR} *representa los ingresos totales y* y_{TC} *representa los costos totales para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades que se fabrican como el número de unidades que se venden, halle la cantidad de punto de equilibrio. Trace la gráfica de punto de equilibrio en los Problemas* **9** *y* **10.**

9. $y_{TR} = 3q$,
$y_{TC} = 2q + 4500$.

10. $y_{TR} = 14q$,
$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$.

11. $y_{TR} = 0.05q$,
$y_{TC} = 0.85q + 600$.

12. $y_{TR} = 0.25q$,
$y_{TC} = 0.16q + 360$.

13. $y_{TR} = 100 - \dfrac{1000}{q + 10}$,
$y_{TC} = q + 40$.

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 7q$,
$y_{TC} = 2q + 500$.

15. Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son $3q - 200p + 1800 = 0$ y $3q + 100p - 1800 = 0$, respectivamente, en donde p representa el precio por unidad y q representa el número de unidades por intervalo.

a. Obtenga en forma algebraica el precio de equilibrio y dedúzcalo gráficamente.

b. Determine el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor un impuesto de 27 centavos por unidad.

16. El fabricante de un producto vende todo lo que produce. Los ingresos totales están dados por $y_{TR} = 7q$, y los costos totales, por $y_{TC} = 6q + 800$, en donde q representa el número de unidades que se fabrican y venden.

a. Halle el nivel de producción en el punto de equilibrio y trace la gráfica correspondiente.

b. Calcule el nivel de producción en el punto de equilibrio si los costos totales aumentan en 5%.

17. Un fabricante vende un producto en $8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de $2,116, y los variables, de $7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción obtendrá utilidades de $4,600? ¿A qué nivel de producción habrá pérdidas de $1,150? ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

18. El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se fabrican 13,500 unidades a un precio de $4.50 por unidad. El fabricante no hace oferta de unidades con precio de $1 y los consumidores no demandan unidades a $20. Obtenga las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. Un fabricante de artefactos está en equilibrio (no obtiene ni pérdidas ni utilidades) con un volumen de ventas de $200,000. Los costos fijos son de $40,000 y cada unidad se vende en $5. Determinar el costo variable por unidad.

20. Una empresa fabrica sandalias que tienen costo de materiales de $0.80 (dólares) por par y costo de mano de obra de $0.90. Los costos variables adicionales suman $0.30 por par. Los costos fijos son de $70,000. Si se vende cada par en $2.50, ¿cuántos pares deben venderse para que la compañía no gane ni pierda?

21. Encuentre el punto de equilibrio para una compañía que vende todo lo que fabrica, si sus costos variables por unidad son de $2, los costos fijos son de $1,050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, en donde q es el número de unidades de producción.

22. Una compañía ha determinado que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, en donde p es el precio por unidad para q unidades en cierto periodo. Determine la cantidad de demanda cuando el precio por unidad es: (a) $4; (b) $2 y (c) $0.50. Para cada uno de estos precios, evalúe los ingresos totales que recibirá la compañía. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Sugerencia:* Calcule los ingresos cuando el precio es p.)

23. Utilizando los datos del Ejemplo 1, determine la forma en que se verá afectado el precio original de equilibrio si la compañía recibe un subsidio gubernamental de $1.50 por unidad.

24. La Monroe Forging Company vende un producto de acero corrugado a la Standard Manufacturing

Company y compite en la venta de este producto con los demás proveedores de la Standard. El vicepresidente de ventas de la Monroe considera que reduciendo el precio del producto se podría obtener un aumento del 40% en el volumen de unidades que se venden a la Standard. Al gerente del departamento de costos y análisis se le ha pedido analizar la proposición del vicepresidente para que formule recomendaciones con respecto a si es financieramente benéfico este plan para la Monroe Forging Company.

De modo específico se solicita determinar lo siguiente.

(1) Pérdidas o utilidades netas con base en la propuesta de precio.

(2) Volumen de ventas que se requiere, con el precio propuesto, para obtener la mismas utilidades de $40,000 que se obtienen ahora con el precio y el volumen de ventas actuales.

Utilice en el análisis los datos de la tabla.

	Operaciones actuales	Propuesta del vicepresidente de ventas
Precio unitario	$2.50	$2.00
Volumen de ventas	200,000 unidades	280,000 unidades
Costos variables		
Total	$350,000	
Por unidad	$1.75	$1.75
Costos fijos	$110,000	$110,000
Utilidades	$40,000	?

25. Supóngase que los productos A y B tienen ecuaciones de oferta y demanda relacionadas entre sí. Si q_A y q_B son cantidades de A y B, respectivamente, y p_A y p_B son sus precios respectivos, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 26 + p_A - p_B,$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$

y

$$q_B = -4 - p_A + 3p_B.$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

5.7 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 5.1 pendiente la recta — forma punto-pendiente — forma pendiente-ordenada en el origen — ecuación lineal general en x y y — relación lineal

Sección 5.2 ecuación de demanda — gráfica de demanda — ecuación de oferta — gráfica de oferta — función lineal

Sección 5.3 función cuadrática — parábola — ejes de simetría — vértice

Sección 5.4 sistema de ecuaciones — sistemas equivalentes — eliminación por adición — eliminación por sustitución — ecuación general lineal en x, y, z

Sección 5.5 sistema no lineal

Sección 5.6 punto de equilibrio — precio de equilibrio — cantidad de equilibrio — utilidades — costos totales — costos fijos — costos variables — punto de equilibrio — cantidad de equilibrio — ingresos de equilibrio

RESUMEN

La orientación de una recta que no es vertical se caracteriza por su pendiente m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

en donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes que se encuentran sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida y la pendiente de una recta horizontal es cero. Las formas básicas de las ecuaciones de rectas son:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{(forma punto-pendiente)},$$

$$y = mx + b \quad \text{(forma pendiente-ordenada en el origen)},$$

$$x = a \quad \text{(recta vertical)},$$

$$y = b \quad \text{(recta horizontal)},$$

$$Ax + By + C = 0. \quad \text{(general)}.$$

La función lineal $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ tiene como gráfica una recta.

En Economía, las funciones de oferta y las funciones de demanda tienen la forma $p = f(q)$ y desempeñan un papel muy importante. Cada una de ellas proporciona la correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del mismo que los fabricantes (o los consumidores) ofrecerán (o comprarán) en el mercado a ese precio en algún periodo dado.

Una función cuadrática tiene la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0).$$

Su gráfica es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, y que abre hacia abajo si $a < 0$. El vértice está dado por

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right),$$

y la ordenada en el origen es c. El eje de simetría así como las intersecciones con el eje x y el eje y son útiles para trazar la gráfica.

Se puede resolver un sistema de ecuaciones lineales con los métodos de eliminación por adición o por sustitución. La sustitución es también útil para resolver sistemas no lineales.

Resolver un sistema formado por ecuaciones de oferta y de demanda de un producto proporciona el punto de equilibrio, el cual señala el precio al cual los consumidores adquirirían la misma cantidad del producto que los fabricantes estarían dipuestos a vender a ese precio.

Las utilidades son ingresos totales − costos totales, en donde los costos totales son la suma de los costos fijos y los variables. El punto de equilibrio es el punto en el que ingresos totales = costos totales.

PROBLEMAS DE REPASO

1. La pendiente de la recta que pasa por (2, 5) y (3, k) es 4. Determine k.
2. La pendiente de la recta que pasa por (2, 3) y (k, 3) es 0. Halle k.

En los Problemas **3-7**, *determine la forma pendiente-ordenada en el origen y una forma lineal general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades que se señalan.*

3. Pasa por (3, −2) y tiene ordenada en el origen 1.
4. Pasa por (−1, −1) y es paralela a la recta $y = 3x - 4$.
5. Pasa por (10, 4) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.
6. Pasa por (3, 5) y es vertical.
7. Pasa por (−2, 4) y es horizontal.
8. Determine si el punto (0, −7) está sobre la recta que pasa por (1, −3) y (4, 9).

En los Problemas **9-12**, *escriba cada ecuación en la forma pendiente-intercepción y, y grafíquela. ¿Cuál es la pendiente de la recta?*

9. $3x - 2y = 4$. **10.** $x = -3y + 4$. **11.** $4 - 3y = 0$. **12.** $y = 2x$.

En los Problemas **13-22**, *grafique cada función. Para las que sean lineales, indique también la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las que sean cuadráticas, señale todas las intersecciones y el vértice.*

13. $y = f(x) = 4 - 2x$. **14.** $s = g(t) = 8 - 2t - t^2$. **15.** $y = f(x) = 9 - x^2$.

16. $y = f(x) = 3x - 7$. **17.** $y = h(t) = t^2 - 4t - 5$. **18.** $y = h(t) = 1 + 3t$.

19. $p = g(t) = 3t$. **20.** $y = F(x) = (2x - 1)^2$. **21.** $y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3)$.

22. $y = f(x) = \dfrac{x}{3} - 2$.

En los Problemas **23-32**, *resuelva el sistema dado.*

23. $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 8x - 4y = 7, \\ y = 2x - 4. \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 6y = 9, \\ 4x + 8y = 12. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12}, \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x + \dfrac{2y + x}{6} = 14, \\ y + \dfrac{3x + y}{4} = 20. \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} x^2 - y + 2x = 7, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} y = \dfrac{18}{x + 4}, \\ x - y + 7 = 0. \end{cases}$

33. Suponga que a y b tienen relación lineal, de manera que $a = 1$ cuando $b = 2$, y $a = 2$ cuando $b = 1$. Halle una forma lineal general de la ecuación que relaciona a y b. Obtener también a cuando $b = 3$.

34. Cuando se reduce la temperatura T (en grados Celsius) de un gato, su ritmo cardiaco r (en latidos por minuto) disminuye. En condiciones de laboratorio, un gato a temperatura de 37°C tiene un ritmo cardiaco de 220 y a una temperatura de 32°C su ritmo es de 150. Si r se relaciona linealmente con T, en donde T se encuentra entre 26 y 38, (a) halle una ecuación para r en términos de T y (b) determine el ritmo cardiaco a una temperatura de 28°C.

35. Suponga que f es una función lineal tal que $f(1) = 5$, y $f(x)$ disminuye en 4 unidades por cada 3 unidades de aumento en x. Evalúe $f(x)$.

36. Si f es una función lineal tal que $f(-1) = 8$ y $f(2) = 5$, halle $f(x)$.

37. La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = f(q) = 200 - 2q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando existe una demanda de q unidades. Obtenga el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determine estos ingresos.

38. La diferencia en precio para dos artículos antes de aplicar un impuesto del 5% sobre ventas es de \$4. La diferencia en precio después del impuesto sobre ventas es de \$4.20. Halle el precio de cada uno de los artículos antes del impuesto.

39. Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son $125p - q - 250 = 0$ y $100p + q - 1100 = 0$, respectivamente, obtenga el precio de equilibrio.

40. El fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio si el producto se vende a \$16 por unidad, los costos fijos son de \$10,000 y los costos variables están dados por

$y_{VC} = 8q$, en donde q es el número de unidades que se fabrican (se expresa todo en dólares).

41. En Psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento que las personas tienen del significado y las relaciones entre palabras, así como con respecto a los significados a través de los cuales almacenamos y recordamos esa información.* En un modelo de redes de memoria semántica, existe una jerarquía de niveles en los cuales se almacena la información. En un experimento llevado a cabo por Collins y Quillian, con base en un modelo de redes, se obtuvieron datos sobre el tiempo de reacción (de respuesta) a preguntas simples acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que, en promedio, el punto de reacción R (en milisegundos) es una función lineal del nivel L al cual se almacena la propiedad característica del sustantivo. A un nivel de 0, el punto de reacción es 1,310; al nivel 2 el punto de reacción es 1,460. (a) Determine la función lineal. (b) Calcule el tiempo de reacción al nivel de 1. (c) Obtenga la pendiente y determine su significado.

42. La temperatura Celsius C es función lineal de la temperatura Fahrenheit, F. Utilice los hechos de que 32°F equivale a 0°C y que 212°F equivale a 100°C para encontrar esa función. También, determine C cuando F = 50.

* G.R. Loftus y E.F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (New York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

APLICACIÓN PRÁCTICA

¿Un juego de tenis?

Es posible que en alguna ocasión haya hecho usted una cita para ver a alguien o para realizar algo, sólo para tener que esperar un gran rato. Por ejemplo, las personas que tienen citas se quejan con frecuencia de las largas esperas necesarias para ver a médicos o para hacer que reparen su automóvil. Aun en los deportes, existen quejas con respecto a las esperas. Es posible que los jugadores de tenis tengan que esperar hasta las 10:00 para comenzar un juego programado a las 9:00. Y pasa lo mismo con los jugadores de golf y otros. Parece que la programación es la parte fundamental de todos estos problemas. Aquí, se aprenderá una forma de diseñar un programa de tiempo para llevar a cabo juegos en torneos de tenis*.

Supóngase que existen disponibles 11 campos para un torneo de tenis que comienza a las 8 de la mañana. Utilizando un tiempo promedio por juego de una hora y treinta minutos, lo común sería que el director del torneo programara 11 partidos a las 8:00, 11 partidos a las 9:30, 11 juegos a las 11:00, y así sucesivamente. Sin embargo, la duración real de los juegos varía. Algunos terminan después de 30 minutos; otros se llevan más de 2 horas. Debido a esto, los juegos programados hacia el final del torneo pueden sufrir retrasos de varias horas. Es posible que un mejor método de programación consista en hacer que empiecen 11 juegos a las 8:00 A.M., y después programar algunos otros juegos a las 8.30, algunos a las 9:00, otros a las 9:30, y continuando de esta forma, programar algunos juegos cada 30 minutos. Por conveniencia, se hará referencia a estos intervalos de 30 minutos como periodos 1, 2, 3, . . . ; el periodo 1 comienza a las 8:00 A.M. El problema consiste en determinar el número de juegos que se deben programar para cada periodo.

Con base en el historial de este torneo durante los últimos años, supóngase que se estima que el tiempo promedio de los juegos es de una hora y 37 minutos. Los registros del torneo también permiten elaborar la Tabla 4.3, que da el número promedio de los juegos así como también el total acumulado, que se juega en las canchas durante cada intervalo de 30 minutos. En la tabla 4.3 se puede apreciar que un programa con 11 juegos a las 8:00, un juego a las 8:30, 4 juegos a las 9:00, y así sucesivamente es más razonable que el programa típico de 11 juegos cada hora y media. En

* Adaptado de Brian Garman, "Applying a Linear Function to Schedule Tennis Matches," *The Mathematics Teacher*, 77, No. 7 Octubre 1984), 544-47. Con autorización de National Council of Teachers of Mathematics.

TABLA 5.3

PERIODO	HORA	JUEGOS POR PERIODO	TOTAL DE JUEGOS	PERIODO	HORA	JUEGOS POR PERIODO	TOTAL DE JUEGOS
1	8:00	11	11	13	2:00	3	51
2	8:30	1	12	14	2:30	4	55
3	9:00	4	16	15	3:00	3	58
4	9:30	5	21	16	3:30	2	60
5	10:00	4	25	17	4:00	3	63
6	10:30	3	28	18	4:30	4	67
7	11:00	3	31	19	5:00	4	71
8	11:30	3	34	20	5:30	3	74
9	12:00	3	37	21	6:00	4	78
10	12:30	3	40	22	6:30	4	82
11	1:00	4	44	23	7:00	3	85
12	1:30	4	48				

este caso, nadie tendría que esperar durante más de 30 minutos. Denotando al periodo por x y por y al correspondiente número total acumulado de juegos, en la Fig. 4.38 se da una representación geométrica de los puntos (x,y). Por ejemplo, el punto (2,12) indica que durante el periodo 2, fue de 12, el número total de juegos realizados en los campos desde el inicio del torneo.

Resulta evidente de la Fig. 4.38 que los puntos caen casi sobre una línea recta. Conocer la ecuación de esa recta permitiría pronosticar el número total de juegos que se pueden programar para

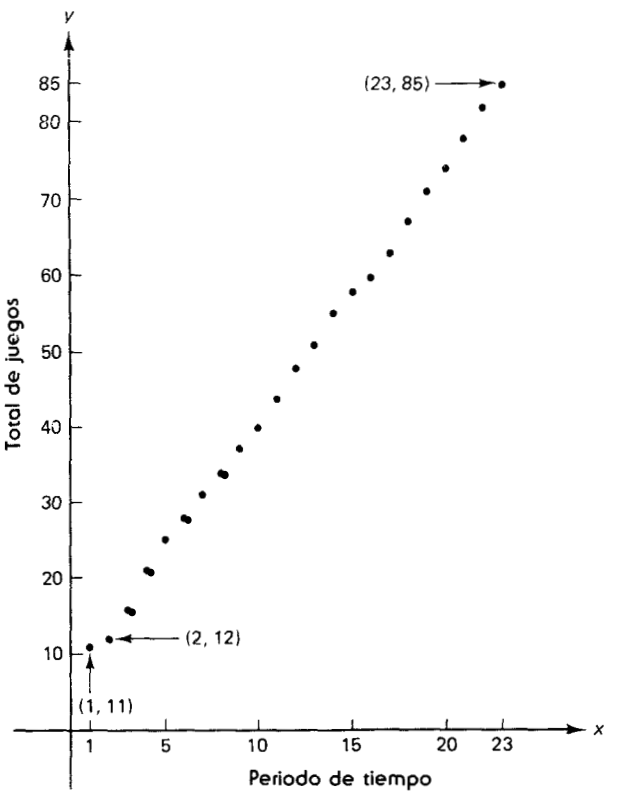


FIGURA 5.38

un periodo dado. Como se deben programar 11 juegos para el periodo 1, y el último juego, el octogésimoquinto, se debe programar para el periodo 23, es razonable elegir como línea "predictora" la que pasa por los puntos (1, 11) y (23, 85), como se muestra en la Figura 4.38. La pendiente m está dada por

$$m = \frac{85 - 11}{23 - 1} = \frac{74}{22} = \frac{37}{11}.$$

Una forma de punto y pendiente de una ecuación de la recta es

$$y - 11 = \frac{37}{11}(x - 1),$$

que puede reescribirse como

$$y = \frac{37}{11}(x - 1) + 11. \tag{1}$$

Por ejemplo si $x = 2$, entonces la Ec. (1) da $y = \frac{158}{11} \approx 14.36$. No tienen sentido, fracciones de juego, y se debe refinar la función de la Ecuación (1). Un método consiste en redondear los valores de y en (1) enteros, utilizando una función que se denomina *función mayor entero*, y que se denota por $[x]$. La notación $[x]$ significa el mayor entero menor que o igual a x. Por ejemplo,

$$[4] = 4, \qquad [4.1] = 4, [5.9] = 5.$$

Si se suma 0.5 a cualquier número dado y después se encuentra el mayor entero de la suma, el resultado será el número dado redondeado al entero más próximo. Por ejemplo, $[4.1 + 0.5] = [4.6] = 4$, que es 4.1 redondeado al entero más cercano $[5.9 + 0.5] = [6.4] = 6$, que es 5.9 redondeado al entero más próximo. La función refinada, por ejemplo f, que pronostica el número total de juegos hasta e incluyendo el periodo x está dada por

$$f(x) = \left[\frac{37}{11}(x - 1) + 11.5\right].$$

En particular si $x = 2$ entonces

$$\frac{37}{11}(x - 1) + 11.5 = \frac{37}{11}(2 - 1) + 11.5 \approx 14.86$$

y $[14.86] = 14$. Por ello, $f(2) = 14$. En la Tabla 4.4 se dan los totales pronosticados, $f(x)$, para $x = 1, 2, 3, \ldots, 23$, al igual que los totales reales. Obsérvese que f es un predictor muy aceptable de los totales citados. Sin embargo, f pronostica más juegos para los periodos 2 y 3 que lo observado según la experiencia. Existen discrepancias menores para otros periodos. Como una apropiada programación al principio del torneo es de enorme importancia, se puede ajustar los totales pronosticados para que muestren 12 juegos en el periodo 2 y 16 en el periodo 3. También se muestran en la Tabla 4.4 los totales ajustados. Resulta que un programa basado en los totales ajustados es razonable. La función, por ejemplo F, que describe este programa está dada entonces por

$$F(x) = \begin{cases} 12, & \text{si } x = 2, \\ 16, & \text{si } x = 3, \\ \left[\frac{37}{11}(x - 1) + 11.5\right] & \text{otra} \end{cases}$$

en donde $F(x)$ es el número total de juegos programados hasta el período x. Así, el número de juegos a los que se asigna el tiempo de inicio del periodo x es $f(x) - f(x - 1)$, en donde $x > 1$.

TABLA 4.4

PERIODO x	HORA	TOTAL REAL	TOTAL PRONOSTICADO $f(x)$	TOTAL AJUSTADO $F(x)$
1	8:00	11	11	11
2	8:30	12	14	12
3	9:00	16	18	16
4	9.30	21	21	21
5	10:00	25	24	24
6	10:30	28	28	28
7	11:00	31	31	31
8	11:30	34	35	35
9	12:00	37	38	38
10	12:30	40	41	41
11	1:00	44	45	45
12	1:30	48	48	48
13	2:00	51	51	51
14	2:30	55	55	55
15	3:00	58	58	58
16	3:30	60	61	61
17	4:00	63	65	65
18	4:30	67	68	68
19	5:00	71	72	72
20	5:30	74	75	75
21	6:00	78	78	78
22	6:30	82	82	82
23	7:00	85	85	85

Por supuesto, no todos los torneos de tenis implican 85 juegos en 11 campos. Además, el tiempo promedio de los juegos varía y depende, por ejemplo, de la clase de jugadores o del tipo de cancha. Por ello, para manejar estas situaciones, supóngase que se generaliza la función de programación anterior para un torneo que implica n juegos en c campos, con base en un tiempo promedio de juego de h horas y t minutos.

En primer lugar, es necesario determinar el número de periodo de 30 minutos que el problema implica. Supóngase que el torneo debe comenzar en el tiempo $T = 0$ y que E es el tiempo promedio (en minutos) que se utiliza una cancha durante el día. Entonces,

$$E = \frac{m(60h + t)}{c}$$

El último juego terminaría aproximadamente en el tiempo $T = E$, por lo que comenzaría aproximadamente a la hora o tiempo $(T = E - (60h + t)$. El número de intervalos de 30 minutos, desde $T = 0$ hasta el tiempo de inicio del último juego es

$$\frac{E - (60h + t)}{30} = \frac{\dfrac{m(60h + t)}{c} - (60h + t)}{30} = \frac{\dfrac{m(60h + t)}{c} - \dfrac{(60h + t)c}{c}}{30}$$

$$= \frac{(m - c)(60h + t)}{30c}.$$

Este número no incluye el periodo final. El número de periodos que se deben programar es el valor redondeado de

$$\frac{(m - c)(60h + t)}{30c} + 1. \tag{2}$$

Denotando el número de periodos por z, se otiene

$$z = \left[\frac{(m - c)(60h + t)}{30c} + 1.5\right].$$

Supóngase que el número total de juegos, y, programados hasta el periodo x es función lineal de x. Como se programan c juegos para el periodo 1, y hacia el periodo z se programa un total de m juegos, los puntos $(1, c)$ y (z, m) caen en la gráfica de esta función. La pendiente es

$$\frac{m - c}{z - 1},$$

por lo que una forma punto-pendiente de una ecuación de la recta es

$$y - c = \frac{m - c}{z - 1}(x - 1).$$

Simplificando, se obtiene

$$y = \frac{m - c}{z - 1}(x - 1) + c.$$

Se debe refinar esta función para que los valores de y se redondeen a enteros. Además, la experiencia señala que para los periodos 2 y 3, el número total de juegos asignados debe reflejar las mismas proporciones que en los datos originales basados en 11 canchas. Es decir, para el periodo 2, debe haber un total de $[\frac{12}{11}c + 0.5]0.5]$ juegos asignados, y para el periodo 3, debe haber $[\frac{10}{11}c + 0.5]$. La función, por ejemplo F, que describe este programa, es

$$F(x) = \begin{cases} [\frac{12}{11}c + 0.5], & \text{si } x = 2, \\ [\frac{10}{11}c + 0.5], & \text{si } x = 3, \\ \left[\dfrac{m - c}{z - 1}(x - 1) + c + 0.5\right] & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

en donde $F(x)$ es el número total de juegos programados hasta el periodo x; m es el número de juegos del torneo; c es el número de canchas, y z es le número de periodos, en donde z está dada por la Ecuación (2).

Esta función describe el sistema de programación de tenis conocido como el "Sistema Garman", que ahora se utiliza en muchos torneos tenísticos de campeonato.

EJERCICIOS

En los siguientes Problemas, utilice el sistema Garman de programación para un torneo de tenis que implica 16 juegos, con un tiempo promedio de una hora y 45 minutos por juego, y con 4 campos.

1. Determine (a) el valor de z, el número de periodos de 30 minutos, (b) $F(x)$, y (c) los valores de $F(x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots z$.

2. Si el torneo comenzará a las 10:00 A.M., indique para cada periodo la hora de inicio y el número de juegos que se deben llevar a cabo durante el mismo.

CAPÍTULO 6

Funciones exponenciales y logarítmicas

6.1 Funciones exponenciales

Existe una función que juega un papel importante no sólo en las Matemáticas sino también en Administración, Economía y otras áreas. Implica una constante elevada a un exponente variable, tal como $f(x) = 2^x$. A funciones como ésta se les denomina *funciones exponenciales.*

DEFINICIÓN

A la función f, definida por

$$f(x) = b^x,$$

en donde $b > 0$, $b \neq 1$, *y el exponente x es cualquier número real, se le denomina* ***función exponencial,*** *con base b*.*

No se debe confundir la función exponencial $y = 2^x$ con la *función potencia* $y = x^2$, que tiene base variable y exponente constante.

Dado que el exponente de b^x puede ser cualquier número real, resulta interesante preguntarse cómo se ha de asignar valor a algo como $2^{\sqrt{3}}$, en donde el exponente es un número irracional positivo. En términos simples, se usan aproximaciones. En primer lugar, $2^{\sqrt{2}}$ es aproximadamente igual a $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$, que sí *está* definido. Otras aproximaciones aún mejores son $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$, etcétera. De esta forma, se aclara el significado de $2^{\sqrt{2}}$

Cuando se trabaja con funciones exponenciales, puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas son las que aparecen enseguida, en donde m y n son números reales, y a y b son positivos.

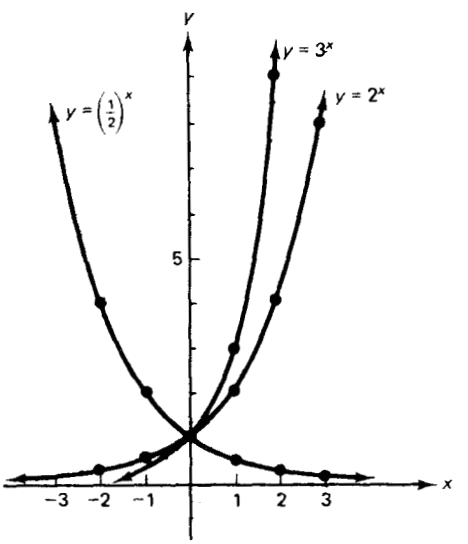
* Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función tiene tan poco interés que no se le considera función exponencial.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.	**2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.	**4.** $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.	**6.** $a^1 = a$.
7. $a^0 = 1$.	**8.** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial b^x pueden ponerse en tal forma aplicando las reglas anteriores. Por ejemplo, $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$ y $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$.

En la Figura 6.1 se muestran las gráficas de algunas funciones exponenciales. Se debe observar lo siguiente:

1. El dominio de una función exponencial son todos los números reales.
2. El ámbito (o contradominio) son todos los números reales positivos.
3. Puesto que $b^0 = 1$, para toda base b, cada una de las gráficas tiene como intersección con el eje y a (0, 1). No existe intersección con el eje x.



x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	4
−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2
0	1	1	1
1	2	3	$\frac{1}{2}$
2	4	9	$\frac{1}{4}$
3	8	27	$\frac{1}{8}$

FIGURA 6.1

También se observa en la Figura 6.1 que $y = b^x$ tiene dos formas básicas, dependiendo de si $b > 1$ o bien $0 < b < 1$.

4. Si $b > 1$, entonces la gráfica de $y = b^x$, *asciende* de izquierda a derecha; es decir, al aumentar x también se incrementa y. Pero y también puede tomar valores muy

cercanos a cero. (Véase el cuadrante II.) Nótese también que en el cuadrante I, conforme mayor es el valor de b, con mayor rapidez asciende la gráfica. (Compárense las gráficas de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$.)

5. Si $0 < b < 1$, entonces la gráfica de $y = b^x$ *desciende* de izquierda a derecha. [Véase la gráfica de $y = (\frac{1}{2})^x$.] Al aumentar x, entonces y disminuye y toma valores cercanos a 0.

Se encuentran funciones exponenciales en el **interés compuesto**, en el cual el interés que percibe una suma de dinero invertida **(capital o monto especial)** se reinvierte, de manera que este interés también gana interés. Es decir, el interés *se compone* o convierte en capital y, por ello, hay "interés sobre intereses".*

Por ejemplo, supóngase que se invierten \$100 (dólares a cualquier otra unidad monetaria) a la tasa de 5% compuesto anualmente. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100) más el interés generado por éste [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.5) = \$105.$$

Esta es la cantidad sobre la cual se genera interés para el segundo año. Al final del segundo periodo anual, el valor de la inversión es el capital que se tenía al final del primer año, (\$105) más el interés producido por esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25.$$

Así, el capital se incrementa en 5% cada año. Los \$110.25 representan el capital original, más todo el interés acumulado; se le denomina **monto acumulado** o **monto compuesto.** La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se denomiona **interés compuesto**. Así, el interés compuesto aquí es 100.25 - 100 = \$10.25.

En términos más generales, si se invierte un capital P a una tasa de $100r$ por ciento compuesto anualmente (por ejemplo, al 5%, r es (0.05), el monto compuesto después de 1 año será $P + Pr$ o bien $P(1 + r)$. Al final del segundo año, el monto compuesto es

$$\begin{aligned} & P(1 + r) + [P(1 + r)]r \\ &= P(1 + r) + [1 + r] \qquad \text{factorizando} \\ &= P(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Esta operación continúa. Después de tres años, el monto compuesto es $P(1 + r)^3$. En general, **el monto compuesto S de un capital P al final de n años, a la tasa de r compuesta anualmente,** está dado por

$$S = P(1 + r)^n. \qquad (1)$$

En el Apéndice D se proporcionan algunos valores aproximados de $(1 + r)^n$. Obsérvese en la Ecuación (1) que para un capital y una tasa dados, S es función de n. De hecho, S incluye una función exponencial con base $1 + r$.

* **(N. del T.)** En México se expresa por lo común, en forma lógica que *se capitaliza* el interés; no obstante se habla también de composición y *tasa compuesta*.

EJEMPLO 1

Supóngase que se invierten $1000 durante 10 años al 6% anual (o sea, compuesto anualmente).

a. *Calcular el monto compuesto.*

Se usa la Ec. (1) con $P = 1000$, $r = 0.06$ y $n = 10$.

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10}.$$

En el apéndice D se obtiene $(1.06)^{10} \approx 1.790848$. Así,

$$S \approx 1000(1.790848) \approx \$1790.85.$$

b. *Evaluar el interés compuesto.*

Utilizando el resultado obtenido en la parte (a), se tiene

$$\begin{aligned} \text{interes compuesto} &= S - P \\ &= 1790.85 - 1000 \\ &= \$790.85. \end{aligned}$$

Supóngase que el capital de $1000 del Ejemplo 1, se invierte durante 10 años igual que antes, pero en esta ocasión, la *capitalización* (o composición) tiene lugar cada tres meses (es decir, *trimestralmente*) a la tasa del 1 1/2% *por trimestre*. Existen, entonces cuatro **periodos de interés** o **periodos de capitalización** por año, y en 10 años existen $10(4) = 40$ periodos de interés. Así, el monto compuesto para $r = 0.015$ es ahora

$$\begin{aligned} 1000(1.015)^{40} &\approx 1000(1.814018) \\ &\approx \$1814.02, \end{aligned}$$

y el interés (compuesto) es $814.02. Por lo general, la tasa de interés por periodo de capitalización se plantea como tasa anual. En este caso, se hablaría de una tasa anual de 6% compuesto trimestralmente, de manera que la tasa por periodo de interés, o tasa periódica o **tasa por periodo**, es $6\%/4 = 1.5\%$. A esta tasa anual partida, de 6%, se le denomina **tasa nominal** o **tasa anual (T.A.)**. A menos que se exprese de otra manera, se supone que todas las tasas de interés son tasas nominales anuales. Por ello, a una tasa de 15% compuesto anualmente le corresponde una tasa por periodo de $15\%/12 = 1.25\%$.

Con base en este análisis, se puede generalizar la Ecuación (1). La fórmula

$$S = P(1 + r)^n \qquad (2)$$

da **el monto acumulado S de un capital P al final de n periodos de interés, a la tasa periódica de r.**

Ya se ha visto que para un capital de $1000 a una tasa nominal de 6% durante un periodo de 10 años, la capitalización anual da como resultado un interés compuesto

de $790.85, y con capitalización trimestral, el interés compuesto es $814.02. Es común que, para una tasa nominal dada, cuanto más frecuente sea la capitalización, tanto mayor será el interés compuesto. Sin embargo, al aumentar el número de periodos de interés, el efecto tiende a ser menos importante. Por ejemplo, con capitalización semanal, el interés compuesto es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49,$$

y con capitalización diaria es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{10(365)} - 1000 \approx \$822.03.$$

En este caso, la diferencia no es muy significativa.

ADVERTENCIA

Una tasa nominal de 6% anual no necesariamente significa que una inversión aumenta de valor en 6% en el lapso de un año.

En ocasiones, se utiliza la frase "valor del dinero" para expresar una tasa anual de interés. Así, decir que el dinero vale 6% compuesto trimestralmente, se refiere a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto trimestralmente.

EJEMPLO 2

Se coloca la cantidad de $3000 en una cuenta de ahorros. Si el dinero vale 6% compuesto semestralmente, ¿cuál es el saldo de la cuenta después de 7 años? (Supóngase que no se hace ningún otro depósito ni retiro.)

Aquí, $P = 3000$. Con dos periodos de interés al año, se tiene $n = 7(2) = 14$, y la tasa por periodo r es $0.06/2 = 0.03$. De acuerdo con la Ecuación (2),

$$S = 3000(1.03)^{14} \approx 3000(1.512590) = \$4537.77$$

En el Capítulo 6 se presenta un análisis más detallado del interés compuesto y las matemáticas financieras.

Uno de los números que son más útiles como base para las funciones exponenciales es cierto número irracional denotado por la letra e en honor del matemático suizo Leonardo Euler (1707-1783):

e es aproximadamente igual a 2.71828.

A la función exponencial con base e se le denomina la **función exponencial natural.**

Aunque pudiera parecer que e es una base extraña para una función exponencial, surge en forma natural en el Cálculo (como se verá posteriormente). También se presenta

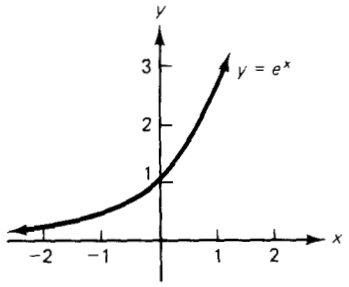


FIGURA 6.2.

en análisis económico y en problemas que implican crecimiento o decrecimiento, como en estudios de población, interés compuesto y desintegración radiactiva. En el Apéndice B se presenta una tabla de valores (aproximados) de e^x y de e^{-x}. También se pueden obtener estos valores con muchas calculadoras. En la Figura 6.2 se muestra la gráfica de $y = e^x$.

EJEMPLO 3

La población proyectada P de una ciudad está dada por

$$P = 1000\ 000e^{0.05t}$$

en donde t es el número de años después de 1985. *Pronosticar la población para el año* 2010.

El número de años que van de 1985 a 2005 es 20, de manera que $t = 20$. Entonces

$$P = 100\ 000e^{0.05(20)} = 100\ 000e^1 = 100\ 000e.$$

Dado que $e \approx 2.71828$,

$$P \approx 100\ 000(2.71828) = 271\ 828.$$

Muchos pronósticos económicos se basan en estudios de población.

Los elementos radiactivos son de tal naturaleza que su cantidad disminuye con respecto al tiempo. Se dice que el elemento *decrece* o *decae*. Si N es la cantidad al tiempo t, entonces se puede demostrar que

$$N = N_0e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

en donde N_0 y λ (la letra griega lambda minúscula) son constantes positivas. Obsérvese que N implica una función exponencial de t. Se dice que N sigue una **ley exponencial de decrecimiento.** Si $t = 0$, entonces $N = N_0e^{-\lambda(0)} = N_0e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 representa la cantidad del elemento que está presente al tiempo $t = 0$ y se le denomina **cantidad inicial.** La constante λ depende del elemento particular implicado y se llama **constante de decrecimiento** (o **de decaimiento**).

Como N disminuye al transcurrir el tiempo, supóngase, desígnese por T el tiempo

necesario para que el elemento radiactivo se reduzca a la mitad de su cantidad inicial. En este caso, al tiempo $t = T$, se tiene $N = N_0/2$. La Ecuación (3) implica que

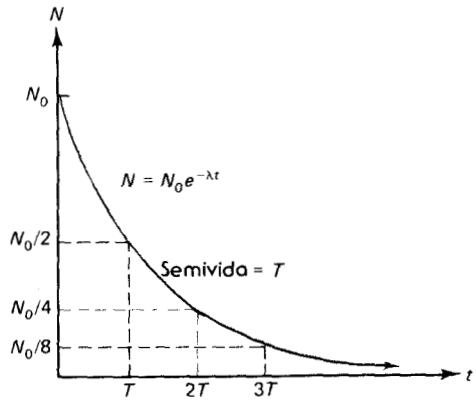
$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Se puede ahora utilizar este hecho para mostrar que un intervalo T, se reduce a la mitad la cantidad del elemento. Considérese el intervalo de tiempo de t a $t + T$, cuya magnitud es T. Al tiempo t, la cantidad del elemento es $N_0 e^{-\lambda t}$, y en el tiempo $t + T$ es

$$N_0 e^{-\lambda(t+T)} = N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(N_0 e^{-\lambda t}),$$

que es la mitad de la cantidad en el tiempo t. Esto significa que si la cantidad inicial presente N_0 fuera de 1 g (gramo), entonces al tiempo T se tendría sólo 0.5 g; al tiempo $2T$, se tendría 0.25 g, y así sucesivamente. A T se le denomina **semi-vida*** del elemento radiactivo. En la Figura 5.3 se muestra una gráfica del decrecimiento radiactiva.



Decrecimiento radiactivo

FIGURA 6.3

EJEMPLO 4

Un elemento radiactivo decrece o decae de manera que después de t días, el número de miligramos (mg) presente, N, está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}.$$

a. *¿Cuántos miligramos había inicialmente?*

Esta ecuación tiene la misma forma que la (3); $N = N_0 e^{-\lambda t}$, en donde $N_0 = 100$ y $\lambda = 0.062$; N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Por ello, había inicialmente 100 mg.

*(N. del R) Se le llama también erróneamente "vida media".

b. *¿Cuántos miligramos hay después de 10 días?*

Cuando $t = 10$,

$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62}$$
$$\approx 100(0.53794) \approx 53.8.$$

Así, a los 10 días habrá aproximadamente 53.8 mg.

En Estadística, se utiliza una importante función como modelo para describir fenómenos que ocurren en la naturaleza, y es la **función de distribución de Poisson:**

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

El símbolo μ la letra griega mi o mu. En ciertos casos, $F(x)$ da la probabilidad de que ocurran exactamente x eventos en un intervalo. La constante μ es la media, o número promedio, de ocurrencias en el intervalo. En el siguiente ejemplo se ilustra la distribución de Poisson.

EJEMPLO 5

Un hemacitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados y se utiliza para estudiar el número de estructuras microscópicas de un líquido. En un conocido experimento, se diluyeron células de yema de huevo y se mezclaron en forma completa en un líquido; la mezcla se colocó luego en un hemacitómetro. Con un microscopio, se contó el número de células que había en cada cuadrado. Se encontró que la probabilidad de que hubiera exactamente x células en un cuadrado del hemacitómetro se ajustaba a una distribución de Poisson con* $\mu = 1.8$. *Evaluar la probabilidad de que haya exactamente cuatro células por cuadrado.*

Se utiliza la función de distribución de Poisson, con $\mu = 1.8$ y $x = 4$.

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}.$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^4}{4!}.$$

En la tabla del Apéndice B se encuentra que $e^{-1.8} \approx 0.16530$, por lo que

$$f(4) \approx \frac{(0.16530)(10.4976)}{24} \approx 0.072.$$

Esto significa que en 400 cuadrados, *se esperaría* encontrar $400(0.072) \approx 29$ cuadrados con exactamente cuatro células. (En el experimento el número real observado fue de 30.)

---

* R.R. Sokal y F.J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1973).

EJERCICIOS 6.1

En los Problemas **1-10** *grafique cada función.*

1. $y = f(x) = 4^x$. **2.** $y = f(x) = 3^x$. **3.** $y = f(x) = (\frac{1}{3})^x$. **4.** $y = f(x) = (\frac{1}{4})^x$.

5. $y = f(x) = 2^{-x}$. **6.** $y = f(x) = 3 \cdot 2^x$. **7.** $y = f(x) = 2(\frac{1}{4})^x$. **8.** $y = f(x) = 2^{x-1}$.

9. $y = f(x) = 2^x - 1$. **10.** $y = f(x) = \frac{1}{2}(3^{x/2})$.

En los Problemas **11-18**, *calcule (a) el monto y (b) el interés compuesto para la inversión y la tasa anual dadas.*

11. $4000 durante 7 años al 6% compuesto anualmente
12. $5000 durante 20 años al 5% compuesto anualmente
13. $700 durante 15 años al 7% compuesto semestralmente
14. $4000 durante 12 años al 6% compuesto semestralmente
15. $10 000 durante 8½ años al 8% compuesto trimestralmente
16. $900 durante 11 años al 10% compuesto trimestralmente
17. $5000 durante 2½ años al 9% compuesto mensualmente
18. $1000 durante 3¾ años al 6% compuesto mensualmente

En los problemas **19-22** *utilice calculadora para determinar el monto compuesto para la inversión dada.*

19. $4000 durante 15 años al 8 1/2% compuesto trimestralmente
20. $500 durante 5 años al 11% compuesto semestralmente
21. $8000 durante 3 años al 6 1/4% compuesto diariamente. (Supóngase que existen 365 días en un año.)
22. $1000 durante 2 años al 12% compuesto cada hora. (Supóngase que existen 365 días en un año.)

23. Se adquiere un certificado de depósito por $6000 y se conserva durante 7 años. Si el certificado gana 8% compuesto trimestralmente, ¿cuál es su valor al final de ese periodo?

24. Supóngase que se colocan $1000 en una cuenta de ahorros que gana interés a la tasa de 15% compuesto semestralmente. (a) ¿cuál es el valor del ahorro al final de 4 años? (b) Si la cuenta hubiera ganado interés a la tasa de 5% compuesto anualmente, ¿cuál sería el valor después de 4 años?

En los Problemas **25-28**, *utilice la tabla del Apéndice B para obtener el valor aproximado de cada expresión.*

25. $e^{1.5}$. **26.** $e^{3.4}$.

27. $e^{-0.4}$. **28.** $e^{-3/4}$.

29. La población proyectada P de una ciudad está dada por $P = 125\,000(1.12)^{t/20}$, en donde t es el número de años después de 1990. ¿Cuál es la magnitud de la población proyectada para 2010?

30. Para cierta ciudad, la población P crece a razón de 2% anual. La fórmula $P = 1\,000\,000(1.02)^t$ proporciona el valor de la población t años después de 1990. Determine la población en (a) 1991 y (b) 1992.

31. La probabilidad P de que una operadora de teléfono reciba exactamente x llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}.$$

Obtener la probabilidad de que la operadora reciba exactamente tres llamadas. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

32. En un experimento sicológico sobre aprendizaje,* se pidió a los sujetos dar respuestas específicas después de someterlos a ciertos estímulos. Cada estímulo consistía en un par de letras, y cada respuesta era el número 1 o el número 2. Después de cada contestación se decía al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje, al que se denomina

* D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

de *asociación en pares*, la probabilidad teórica P de que un sujeto proporcione una respuesta correcta en el n-ésimo ensayo está dada por

$$P = 1 - \tfrac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \qquad n \geq 1,\ 0 < c < 1.$$

Evalúe P cuando $n = 1$.

33. Una importante función que se utiliza en decisiones económicas y de negocios es la *función densidad de la distribución normal*, que en su forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Evaluar $f(0)$, $f(-1)$ y $f(1)$, utilizando $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.399$. Proporcione las respuestas con tres cifras decimales.

34. Exprese e^{kt} en la forma b^t.

35. Un elemento radiactivo es de tales características que restan N gramos después de t horas, en donde

$$N = 10e^{-0.028t}$$

(a) ¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente? redondeando a décimos, ¿cuántos gramos se conservan después de (b) 10 horas? (c) 50 horas? (d) Con base en su respuesta a la parte (c), ¿cuál es su estimación de la vida media de este elemento?

36. En cierto momento, existen 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Declina de manera que después de t años el número de miligramos A, que se encuentran presentes, está dado por $A = 100e^{-0.035t}$. ¿Cuántos miligramos habrá después de 20 años? Proporcionar la respuesta redondeando a miligramos.

37. Si una sustancia radiactiva tiene una semivida de 8 años, ¿cuánto tardará 1 g. de la sustancia en reducirse a 1/16 de gramo?

38. La ecuación de demanda para un nuevo juguete es $q = 10{,}000(0.95123)^p$. Se desea evaluar q cuando $p = 10$. Para convertir la ecuación a una forma más deseable para efectos de cálculo, utilice el Apéndice B para mostrar que $q = 10{,}000e^{-0.05p}$. Después, realice la evaluación y proporcione la respuesta redondeando a enteros. (*Sugerencia:* Obtenga un número x tal que $0.95123 \approx e^{-x}$.)

39. Suponga que el número de pacientes que se admiten en la sala de emergencias de un hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson con media igual a 4. Evaluar la probabilidad de que durante esa hora haya exactamente dos pacientes en la sala de emergencias. Proporcione la respuesta con cuatro cifras decimales.

40. Una compañía que trabaja con base en pedidos por correo se anuncia en una revista de alcance nacional. La compañía encuentra que de todas las poblaciones pequeñas, el porcentaje (dado como decimal) en las que exactamente x personas responden al anuncio se ajusta a una distribución de Poisson con $\mu = 0.5$. ¿En qué porcentaje de poblaciones pequeñas puede la compañía esperar exactamente que respondan dos personas? Proporcione la respuesta con cuatro cifras decimales.

6.2 Funciones logarítmicas

La siguiente función que interesa examinar en este capítulo es la *función logarítmica*, que tiene relación con la exponencial. En la Figura 6.3(a) se muestra la gráfica de la función exponencial $s = f(t) = 2^t$. En este caso, f envía un número de entrada t a un número de salida *positivo* s:

$$f\colon \quad t \to s \quad \text{donde} \quad s = 2^t.$$

Por ejemplo, f envía 2 a 4.

Observando la misma gráfica de la Figura 6.4(b), se puede ver por las flechas pequeñas, que a cada número positivo s que se encuentra en el eje vertical se puede asociar exactamente un valor de t. A $s = 4$ se le asocia $t = 2$. Considerando a s como entrada (o insumo) y a t como salida (o producto), se obtiene una función que envía las s hacia las t. Se denotará esta función mediante f^{-1} (que se lee "f inversa"):*

$$f^{-1}\colon \quad s \to t, \qquad \text{donde } s = 2^t.$$

* El -1 de f^{-1} no es un exponente, y por ello, f^{-1} *no* significa $\dfrac{1}{f}$.

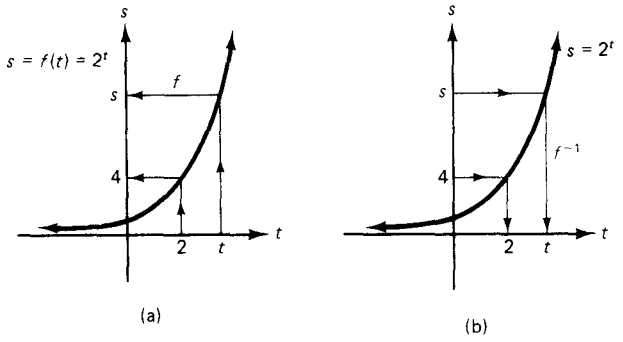


FIGURA 6.4

Por tanto, $f^{-1}(s) = t$. El dominio de f^{-1} es el ámbito o contradominio de f (todos los números reales positivos), y su ámbito es el dominio de f (todos los números reales).

Las funciones f y f^{-1} están relacionadas entre sí. En la Figura 6.4 se muestra que f^{-1} *invierte* la acción de f, y viceversa. Por ejemplo,

$$f \text{ envía 2 a 4} \qquad \text{y} \qquad f^{-1} \text{ envía 4 a 2.}$$

En términos más generales, $f(t) = s$ y $f^{-1}(s) = t$. En términos de composición, cuando se aplica $f^{-1} \circ f$ o bien $f \circ f^{-1}$ a un número de entrada, tal número se obtiene como de salida debido a los efectos de inversión de f y f^{-1}. Es decir,

$$(f^{-1} \circ f)(t) = f^{-1}(f(t)) = f^{-1}(s) = t$$

y

$$(f \circ f^{-1})(s) = f(f^{-1}(s)) = f(t) = s.$$

Se le da un nombre especial a f^{-1}, que es el de **función logarítmica con base 2** y se expresa como $\log_2$ [que se lee "logaritmo base 2"]. Por consiguiente, $f^{-1}(4) = \log_2 4 = 2$, y se dice que el *logaritmo base 2* de 4 es 2.

En resumen,

$$\text{si} \quad s = 2^t, \quad \text{entonces} \quad t = \log_2 s. \tag{1}$$

Enseguida, se generalizará este análisis a otras bases. En la Ecuación (1), remplazando 2 por b, s por x y t por y, se obtiene la siguiente definición.

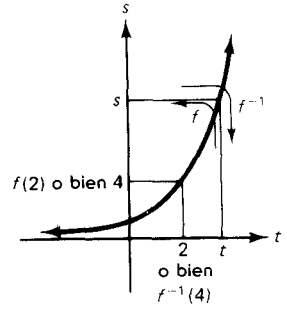


FIGURA 6.5

DEFINICIÓN

*La **función logarítmica** de base b, en donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota mediante* $\log_b$ *y se define como:*

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^y = x.$$

El dominio de $\log_b$ *es todos los números reales positivos y su ámbito es todos los números reales.*

Función logarítmica invierte la acción de la función, y viceversa. A toda función logarítmica se le denomina *inversa* de su correspondiente función exponencial, y esa función exponencial es la inversa de su correspondiente función logarítmica.

Se debe tener presente que cuando se dice que el logaritmo base b de x es y, ello significa también que b elevada al exponente y es x.

$$y = \log_b x \text{ significa } b^y = x.$$

En este sentido, el *logaritmo de un número es un exponente.* Es el de la potencia a la que se debe elevar la base para obtener el número. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8.$$

Se dice que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$.

EJEMPLO 1

	FORMA EXPONENCIAL		FORMA LOGARÍTMICA
a. Dado que	$5^2 = 25$,	entonces	$\log_5 25 = 2$.
b. Dado que	$3^4 = 81$,	entonces	$\log_3 81 = 4$.
c. Dado que	$10^0 = 1$,	entonces	$\log_{10} 1 = 0$.

EJEMPLO 2

FORMA LOGARÍTMICA		FORMA EXPONENCIAL
a. $\log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000$.
b. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa	$64^{1/2} = 8$.
c. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \frac{1}{16}$.

EJEMPLO 3

Graficar la función $y = \log_2 x$.

Puede resultar molesto introducir valores de x y después encontrar los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = 3$, entonces $y = \log_2 3$, lo cual no es fácil determinar. Una forma más sencilla para situar puntos es usar la forma exponencial equivalente, $x = 2^y$. Se eligen valores de y y se encuentran los correspondientes valores de x. Por ejemplo, si $y = 0$, entonces $x = 1$. Esto da el punto (1, 0). En la Figura 6.5 se muestran otros puntos. A partir de esa gráfica, puede observarse que el dominio es todos los números reales positivos.

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

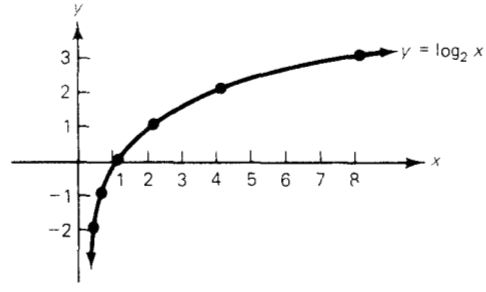


FIGURA 6.6

Por tanto, los números negativos y el 0 no tienen logaritmos. El ámbito (o contradominio) son todos los números reales. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos, y conforme más cercano es el número a 0, tanto más negativo es su logaritmo. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección con el eje x (1, 0). No existe ordenada en el origen. Esta gráfica es típica para las funciones logarítmicas en las que $b > 1$.

A los logaritmos que tienen al 10 como base se les denomina **logaritmos comunes**. Antes de la era de las calculadoras se les utilizaba con frecuencia con fines operacionales de cálculo. Por lo general se omite el subíndice 10 en la notación:

$$\log x \quad \text{significa} \quad \log_{10} x.$$

Los logaritmos de base e son importantes en Cálculo, y se les denomina **logaritmos naturales.** Se utiliza la notación "ln" para tales logaritmos:

$$\ln x \quad \text{significa} \quad \log_e x.$$

El símbolo $\ln x$ suele leerse como "ele-ene de x". En el Apéndice C se presenta una tabla de valores aproximados para los logaritmos naturales, e incluye instrucciones sobre cómo

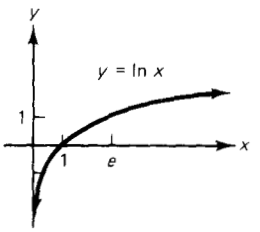


FIGURA 6.7

utilizarla. Por ejemplo, se puede ver que $\ln 2 \approx 0.69315$. Esto significa que $e^{0.69315} \approx 2$. En la Figura 6.7 se muestra la gráfica de $y = \ln x$. Tiene la misma forma que la de la Figura 6.6. Muchas calculadoras permiten determinar los logaritmos naturales y los comunes.

EJEMPLO 4

Determinar cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $\log 100$.
Aquí, la base es 10. Por tanto, log 100 es el exponente de la potencia a la que se debe elevar 10 para obtener 100. Puesto que $10^2 = 100$, $\log 100 = 2$.

b. $\ln 1$.
Aquí, la base es e. Puesto que $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. $\log 0.1$.
Dado que $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\log 0.1 = -1$.

d. $\ln e^{-1}$.
Dado que $\ln e^{-1}$ es el exponente de la potencia a la que se debe elevar e para obtener e^{-1}, resulta claro que $\ln e^{-1} = -1$.

e. $\log_{36} 6$.
Como $36^{1/2}$ (o bien $\sqrt{36}$) es 6, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 5

Despejar en cada ecuación el valor de x.

a. $\log_2 x = 4$.
En forma exponencial, $2^4 = x$, por lo que $x = 16$.

b. $\ln (x + 1) = 7$.
La forma exponencial es $e^7 = x + 1$. Por tanto $x = e^7 - 1$.

c. $\log_x 49 = 2$.
En forma exponencial, $x^2 = 49$, y así $x = 7$. Se rechaza $x = -7$ al resolver $x^2 = 49$ porque un número negativo no puede ser base de una función logarítmica.

d. $e^{5x} = 4$.
En forma logarítmica, $\ln 4 = 5x$. Por ello, $x = \dfrac{\ln 4}{5}$.

Del análisis que se hizo del decrecimiento de un elemento radiactivo en la Secc. 6.1, se sabe que la cantidad del elemento que está presente al tiempo t está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{2}$$

en donde n_0 es la cantidad inicial (la cantidad al tiempo $t = 0$) y λ es la constante de decrecimiento. Se procede ahora a determinar la semi-vida T del elemento. En el tiempo T existe la mitad de la cantidad inicial. Es decir, cuanto $t = T$, entonces $N = N_0/2$. Por ello, de la Ecuación (2),

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Despejando T se obtiene

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

$$2 = e^{\lambda T} \quad \text{(tomando recíprocos en ambos lados).}$$

$$\lambda T = \ln 2 \quad \text{(forma logarítmica)}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Resumiendo, se tiene lo siguiente.

Si un elemento radiactivo tiene una constante de decrecimiento λ entonces la semivida T del elemento está dada por

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{3}$$

EJEMPLO 6

Una muestra de 10 mg (miligramos) de polonio radiactivo 210 (^{210}Po) *decrece de acuerdo con la ecuación*

$$N = 10e^{-0.00501t},$$

en donde N es el número de miligramos presentes después de t días. Determine la semivida del ^{210}Po.

Aquí, la constante de decrecimiento λ vale 0.00501. Mediante la Ecuación (3) la semi-vida T está dada por

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días}.$$

EJERCICIOS 6.2

En los Problemas **1-8**, *exprese en forma exponencial las logarítmicas y en forma logarítmica las exponenciales.*

1. $10^4 = 10{,}000$. **2.** $2 = \log_{12} 144$. **3.** $\log_2 64 = 6$. **4.** $8^{2/3} = 4$.

5. $e^2 = 7.3891$. **6.** $e^{0.33647} = 1.4$. **7.** $\ln 3 = 1.09861$. **8.** $\log 5 = 0.6990$.

En los Problemas **9** *y* **10**, *graficar las funciones.*

9. $y = f(x) = \log_3 x$. **10.** $y = f(x) = \log_{1/2} x$.

En los Problemas **11-22**, *evaluar.*

11. $\log_6 36$. **12.** $\log_2 32$. **13.** $\log_3 27$. **14.** $\log_{16} 4$.

15. $\log_7 7$. **16.** $\log 10{,}000$. **17.** $\log 0.01$. **18.** $\log_2 \sqrt{2}$.

19. $\log_5 1$. **20.** $\log_5 \frac{1}{25}$. **21.** $\log_2 \frac{1}{8}$. **22.** $\log_4 \sqrt[5]{4}$.

En los Problemas **23-40**, *encontrar x.*

23. $\log_3 x = 2$. **24.** $\log_2 x = 4$. **25.** $\log_5 x = 3$. **26.** $\log_4 x = 0$.

27. $\log x = -1$. **28.** $\ln x = 1$. **29.** $\ln x = 2$. **30.** $\log_x 100 = 2$.

31. $\log_x 8 = 3$. **32.** $\log_x 3 = \frac{1}{2}$. **33.** $\log_x \frac{1}{6} = -1$. **34.** $\log_x y = 1$.

35. $\log_3 x = -4$. **36.** $\log_x(2x - 3) = 1$. **37.** $\log_x(6 - x) = 2$. **38.** $\log_8 64 = x - 1$.

39. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$. **40.** $\log_3(x + 2) = -2$.

En los Problemas **41-44**, *obtener x y expresar la respuesta en términos de logaritmos.*

41. $e^{3x} = 2$. **42.** $0.1e^{0.1x} = 0.5$. **43.** $e^{2x-5} + 1 = 4$. **44.** $3e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$.

En los Problemas **45-48**, *utilice el Apéndice C para encontrar el valor aproximado de cada expresión.*

45. ln 5. **46.** ln 3.12. **47.** ln 7.39. **48.** ln 9.98.

49. El costo c de un producto, para una empresa que fabrica q unidades, está dado por la ecuación de costos $c = (2q \ln q) + 20$. Evalúe el costo cuando $q = 6$. (Plantee la respuesta con dos cifras decimales.)

50. La ecuación de oferta de un fabricante es

$$p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right),$$

en donde q es el número de unidades ofrecidas a un precio π por unidad. ¿A qué precio ofrecería el fabricante 1980 unidades?

51. La magnitud M de un terremoto y su energía E, están relacionadas mediante la ecuación*

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right).$$

Aquí, M está dada en términos de la escala de preferencia de Richter de 1958 y E está en ergs. Despeje E de esta ecuación.

52. Para cierta población de células, el número N de células en el tiempo t está dado por $N = N_0(2^{t/k})$, en donde N_0 es el número de células en $t = 0$ y k es una constante positiva. (a) Halle N cuando $t = k$. (b) ¿Cuál es la significancia de k? (c) Demuestre que el tiempo que se requiere para que se crezca hasta una población N_1 puede escribirse como

$$t = k \log_2 \frac{N}{N_0}.$$

53. En un análisis de un bien determinado, Persky† resuelve una ecuación de la forma

$$u_0 = A \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

* K.E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge at the University Press, 1963).

† A.L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (Primavera 1985).

para evaluar x_1, en donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, u_0 es una medida de utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

54. Una muestra de 1 g. de plomo radiactivo 211 (^{211}Pb) degenera de acuerdo con la ecuación $N = e^{-0.01920t}$, en donde N es el número de gramos existentes después de t minutos. Calcule la semivida del ^{211}Pb, redondeando a décimos de minuto.

55. Una muestra de 100 mg. de actinio radiactivo 227 (^{227}Ac) decrece de acuerdo con la ecuación $N = 100e^{-0.03194t}$, en donde N es el número de miligramos presentes después de t años. Determine la semi-vida del ^{227}Ac redondeando a décimos de año.

6.3 Propiedades de los logaritmos

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo, el logaritmo del producto de dos números es la suma de sus logaritmos. En símbolos, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$. Para demostrar esto, sean $x = \log_b m$ y $y = \log_b n$. Entonces $b^x = m$, $b^y = n$, y

$$mn = b^x b^y = b^{x+y}.$$

Por tanto, $mn = b^{x+y}$. En forma logarítmica, esto significa que $\log_b(mn) = x + y$. Por lo tanto, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

1. $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

El logaritmo de un producto es una suma de logaritmos.

No se demostrarán las dos propiedades siguientes, puesto que sería similar a la utilizada para la Propiedad 1.

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$.

El logaritmo de un cociente es una diferencia de logaritmos.

3. $\log_b m^r = r \log_b m$.

El logaritmo de la potencia de un número es igual al exponente multiplicando a un logaritmo.

ADVERTENCIA

Es necesario asegurarse de comprender bien las Propiedades 1 a 3. No se aplican al logaritmo de una suma $[\log_b (m + n)]$, al logaritmo de una diferencia, $[\log_b(m - n)]$, o a un cociente de logaritmos $\left[\dfrac{\log_b m}{\log_b n}\right]$. Por ejemplo,

$$\log_b(m + n) \neq \log_b m + \log_b n,$$

$$\log_b(m - n) \neq \log_b m - \log_b n,$$

$$\frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b(m - n), \qquad \text{y} \qquad \frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b\left(\frac{m}{n}\right).$$

En la Tabla 6.1 se dan valores de algunos logaritmos comunes. La mayor parte de las anotaciones son aproximadas. Por ejemplo, $\log 4 \approx 0.6021$, lo cual significa que $10^{0.6021} \approx 4$. En los ejemplos y ejercicios que aparecen enseguida se utiliza esta tabla.

TABLA 6.1
Logaritmos comunes

x	$\log x$	x	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	e	0.4343

EJEMPLO 1

Evaluar los logaritmos siguientes.

a. $\log 56$.

El valor de $\log 56$ no está en la Tabla 6.1, pero se puede escribir 56 como el producto $8 \cdot 7$. Por tanto, mediante la Propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482.$$

b. $\log \frac{9}{2}$.

Mediante la Propiedad 2,

$$\log \tfrac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532.$$

c. $\log 64$.

Dado que $64 = 8^2$, mediante la Propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062.$$

d. $\log \sqrt{5}$.

$$\log\sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \tfrac{1}{2} \log 5 \approx \tfrac{1}{2}(0.6990) = 0.3495.$$

e. $\log \dfrac{16}{21}$.

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7) \\ &= 2 \log 4 - [\log 3 + \log 7] \\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180.\end{aligned}$$

Obsérvese el uso de corchetes en la segunda línea. No es correcto escribir $2 \log 4 - \log 3 + \log 7$.

EJEMPLO 2

Expresar lo siguiente en términos de log x.

a. $\log \frac{1}{x^2}$.

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{(Propiedad 3).}$$

b. $\log \frac{1}{x}$.

Mediante la Propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x.$$

Del Ejemplo 2(b), se observa que $\log (1/x) = -\log x$. Generalizando, se obtiene la siguiente propiedad:

4. $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m.$

El logaritmo del recíproco de un número es menos el logaritmo del numero.

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3

a. *Escribir* $\ln \frac{x}{zw}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln z$ *y* $\ln w$.

$$\ln \frac{x}{zw} = \ln x - \ln(zw) \qquad \text{(Propiedad 2)}$$

$$= \ln x - (\ln z + \ln w) \qquad \text{(Propiedad 1)}$$

$$= \ln x - \ln z - \ln w.$$

b. *Expresar* $\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln(x-2)$, y $\ln(x-3)$.

$$\sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} = \ln\left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}$$

$$= \frac{1}{3}\{\ln[x^5(x-2)^8] - \ln(x-3)\}$$

$$= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)]$$

$$= \frac{1}{3}[5\ln x + 8\ln(x-2) - \ln(x-3)].$$

EJEMPLO 4

Escribir como un solo logaritmo.

a. $\ln x - \ln(x+3)$.

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln\frac{x}{x+3} \qquad \text{(Propiedad 2).}$$

b. $\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$.

$$\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$$

$$= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) \qquad \text{(Propiedad 3)}$$

$$= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)]$$

$$= \ln(3 \cdot 7) - \ln(2 \cdot 4^2) \qquad \text{(Propiedad 1).}$$

$$= \ln 21 - \ln 32$$

$$= \ln\frac{21}{32} \qquad \text{(Propiedad 2).}$$

Dado que $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, convirtiendo a formas logarítmicas, se obtienen las siguientes propiedades:

5. $\log_b 1 = 0$.

6. $\log_b b = 1$.

Por la Propiedad 3, $\log_b b^r = r \log_b b$. Pero mediante la Propiedad 6, $\log_b b = 1$. Por tanto, se tiene la siguiente propiedad.

7. $\log_b b^r = r$.

EJEMPLO 5

Evaluar los siguientes logaritmos.

a. $\ln e^{3x}$.

Por la Propiedad 7, con $b = e$, se tiene $\ln e^{3x}$. En forma alternativa, mediante las Propiedades 3 y 6.

$$\ln e^{3x} = 3x \ln e = 3x(1) = 3x.$$

b. $\log 1 + \log 1000$.

Por la Propiedad 5, $\log 1 = 0$. Así que,

$$\begin{aligned} \log 1 + \log 1000 &= 0 + \log 10^3 \\ &= 0 + 3 \qquad \text{(Propiedad 7, con } b = 10\text{)} \\ &= 3. \end{aligned}$$

c. $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \tfrac{8}{9}.$$

d. $\log_3(\frac{27}{81})$.

$$\log_3\left(\frac{27}{81}\right) = \log_3\left(\frac{3^3}{3^4}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1.$$

e. $\ln e + \log \frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} \ln e + \log \tfrac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1} \\ &= 1 + (-1) = 0. \end{aligned}$$

No se debe confundir $\ln x^2$ con $(\ln x)^2$. Se tiene que

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x),$$

$$\text{pero} \quad (\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x),$$

lo cual se puede escribir como $\ln^2 x$. Por tanto, en $\ln x^2$, se eleva x al cuadrado; en $(\ln x)^2$, o bien $\ln^2 x$, se eleva al cuadrado $\ln x$.

La siguiente propiedad es:

8. $b^{\log_b m} = m$ y, en particular, $10^{\log x} = x$ y $e^{\ln x} = x$.

La Propiedad 8 se verifica porque establece, en forma logarítmica, que $\log_b m = \log_b m$.

EJEMPLO 6

a. *Evaluar* $e^{\ln x^2}$.

Por la Propiedad 8, $e^{\ln x^2} = x^2$.

b. *Encontrar el valor de x en* $10^{\log x^2} = 25$.

$$10^{\log x^2} = 25,$$
$$x^2 = 25 \quad \text{(Propiedad 8)},$$
$$x = \pm 5.$$

EJEMPLO 7

Evaluar $\log_5 2$.

No se dispone de tablas de logaritmos de base 5. Por ello, se procede a convertir el planteamiento a una base más común. En primer lugar, sea $x = \log_5 2$. Entonces, $5^x = 2$. Como se tiene disponible una tabla de logaritmos comunes (Tabla 6.1), tomando logaritmos comunes en ambos lados de $5^x = 2$, se obtiene.

$$\log 5^x = \log 2,$$
$$x \log 5 = \log 2,$$
$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx \frac{0.3010}{0.6990} \approx 0.4306.$$

Si se hubieran tomado logaritmos naturales de ambos miembros, el resultado hubiera sido $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.69315/1.60944 \approx 0.43068$. Esto difiere del resultado anterior debido a la precisión de las tablas que se utilizaron.

Generalizando el método que se utilizó en el Ejemplo 7, se tiene que:

9. $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$.

A la Propiedad 9 se le denomina **fórmula del cambio de base.** Permite la conversión de los logaritmos de una base (a) a otra (b).

EJEMPLO 8

Expresar $\log x$ *en términos de logaritmos naturales.*

Se debe transformar de base 10 a base e. Por ello, se usa la fórmula del cambio de base (Propiedad 10), con $b = 10$, $m = x$ y $a = e$.

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

EJERCICIOS 6.3

En los Problemas **1-18**, *obtener el valor de lo que se indica. Donde sea necesario, utilizar la Tabla 6.1.*

1. $\log 15$.
2. $\log 16$.
3. $\log \frac{8}{3}$.
4. $\log \frac{7}{10}$.
5. $\log 36$.
6. $\log 0.0001$.
7. $\log 2000$.
8. $\log 900$.
9. $\log_7 7^{48}$.
10. $\log_5(5\sqrt{5})^5$.
11. $\ln e^{5.01}$.
12. $\log_7 4$.
13. $\log_2 3$.
14. $\ln e$.
15. $\ln \frac{1}{e}$.
16. $\log_2 4$.
17. $\log 10 + \ln e^3$.
18. $e^{\ln 6}$.

En los Problemas **19-30**, *escriba la expresión en términos de ln x,* $\ln(x + 1)$, *y/o* $\ln(x + 2)$.

19. $\ln[x(x + 1)^2]$.
20. $\ln\dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$.
21. $\ln\dfrac{x^2}{(x + 1)^3}$.
22. $\ln[x(x + 1)]^3$.
23. $\ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^3$.
24. $\ln\sqrt{x(x + 1)}$.
25. $\ln\dfrac{x}{(x + 1)(x + 2)}$.
26. $\ln\dfrac{x^2(x + 1)}{x + 2}$.
27. $\ln\dfrac{\sqrt{x}}{(x + 1)^2(x + 2)^3}$.
28. $\ln\dfrac{1}{x(x + 1)(x + 2)}$.
29. $\ln\left[\dfrac{1}{x + 2}\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{x + 1}}\right]$.
30. $\ln\sqrt{\dfrac{x^4(x + 1)^3}{x + 2}}$.

En los Problemas **31-38**, *exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.*

31. $\log 7 + \log 4$.
32. $\log_3 10 - \log_3 5$.
33. $\log_2(2x) - \log_2(x + 1)$.
34. $2 \log x - \frac{1}{2}\log(x - 2)$.
35. $9 \log 7 + 5 \log 23$.
36. $3(\log x + \log y - 2 \log z)$.
37. $2 + 10 \log 1.05$.
38. $\frac{1}{2}(\log 215 + 8 \log 6 - 3 \log 121)$.

En los Problemas **39-42**, *determine x.*

39. $e^{\ln(2x)} = 5$.
40. $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$.
41. $10^{\log x^2} = 4$.
42. $e^{3 \ln x} = 8$.

En los Problemas **43-46**, *escriba cada una de las expresiones en términos de logaritmos naturales.*

43. $\log(x + 8)$.
44. $\log_2 x$.
45. $\log_3(x^2 + 1)$.
46. $\log_5(9 - x^2)$.

47. En Estadística, se reduce la ecuación de regresión muestral $y = ab^x$ a una forma lineal tomando logaritmos de ambos lados. Evalúe $\log y$ en términos de x, $\log a$ y $\log b$.

48. En un estudio de reclutamiento militar, Brown* considera a la compensación militar total C como la suma de la compensación militar básica B (que incluye el valor de la asignación para gastos, las exenciones fiscales y el salario básico) y las prestaciones educativas E. Por lo tanto, $C = B + E$. Brown establece que

$$\ln C = \ln B + \ln\left(1 + \frac{E}{B}\right).$$

Verifique esto.

49. De acuerdo con Richter† la magnitud M de un terremoto que ocurre a 100 km de distancia de cierto

* C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?" *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 228-34.

†C.F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

tipo de sismómetro está dada por $M = \log(A) + 3$, en donde A es la amplitud de la traza registrada (en milímetros) del temblor. (a) Obtenga la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de traza de 1 mm. (b) Si un sismo en particular tiene una amplitud A_1 y una magnitud M_1, determine la magnitud de un sismo con amplitud $100A_1$. Exprese la respuesta de (b) en términos de M_1.

6.4 Ecuación Logarítmica y exponenciales

En lo que sigue se resolverán *ecuaciones logarítmicas y exponenciales*. Una **ecuación logarítmica** es una que implica el logaritmo de una expresión que contiene una incógnita, Por ejemplo, $2\ln(x + 4) = 5$ es una ecuación logarítmica. Por otro lado, en una **ecuación exponencial**, la incógnita aparece en un exponente, tal como en $2^{3x} = 7$.

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, se utiliza una propiedad de los logaritmos que se procede ahora para desarrollar.

Para muchas funciones f, si $f(m) = f(n)$, esto no implica que $m = n$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = f(-2)$, pero $2 \neq -2$. No es este el caso para las ecuaciones logarítmicas. En la Fig. 6.8 resulta evidente que si x_1 y x_2 son diferentes, entonces sus logaritmos (valores de y) son diferentes. Esto significa que si $\log_2 m = \log_2 n$, entonces $m = n$. Generalizando a la base b, se tiene la siguiente propiedad:

> Si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$.

Existe una propiedad similar para las exponenciales:

> Si $b^m = b^n$, entonces $m = n$.

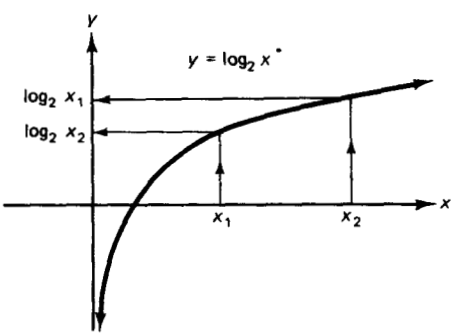


FIGURA 6.8

EJEMPLO 1

Se realizó un experimento con un determinado tipo de animal pequeño. Se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora para varios de los animales*

*R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

y se graficó contra los logaritmos de sus correspondientes pesos. Se encontró que

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x,$$

en donde y fue el número de microlitros de oxígeno por hora, y x fue el peso del animal (en gramos). Determinar y.

En primer lugar, se combinan los términos del lado derecho en un solo logaritmo.

$$\begin{aligned} \log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} && \text{(Propiedad 3 de la Secc. 6.3).} \\ \log y &= \log(5.934x^{0.885}) && \text{(Propiedad 1 de la Secc. 6.3).} \end{aligned}$$

De acuerdo con la anterior propiedad de la igualdad de los logaritmos se tiene

$$y = 5.934x^{0.885}.$$

EJEMPLO 2

Evaluar x si $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$.

Como $25 = 5^2$, se pueden expresar ambos lados de la ecuación como potencias de 5.

$$(25)^{x+2} = 5^{3x-4},$$
$$(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4},$$
$$5^{2x+4} = 5^{3x-4}.$$

De acuerdo con la propiedad de la igualdad de las exponenciales vista antes,

$$2x + 4 = 3x - 4,$$
$$x = 8.$$

Es posible resolver algunas ecuaciones exponenciales tomando logaritmos en ambos lados después de haber puesto la ecuación en forma deseable. Se ilustra esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Resuelva $5 + (3)4^{x-1} = 12$.

En primer lugar, se aísla la expresión exponencial 4^{x-1}, en un lado de la ecuación.

$$5 + (3)4^{x-1} = 12,$$
$$(3)4^{x-1} = 7,$$
$$4^{x-1} = \frac{7}{3}.$$

Ahora, se sacan los logaritmos naturales de ambos lados.

$$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}.$$

Simplificando, se obtiene

$$(x - 1) \ln 4 = \ln \frac{7}{3}, \quad x - 1 = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4}, \quad x = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1$$

$$= \frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln 4} + 1 \approx \frac{1.94591 - 1.09861}{1.38629} + 1$$

$$\approx 1.61120.$$

En el Ejemplo 3 se utilizaron logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, se pueden utilizar logaritmos con cualquier base. Por lo general, se utilizan los logaritmos naturales o los comunes si se desea que la solución tenga forma decimal. Esto se debe a que las tablas de esos logaritmos son fácilmente accesibles y muchas calculadoras tienen teclas para obtener logaritmos naturales y comunes. Si se utilizaran logaritmos comunes para resolver la Ecuación del Ejemplo 3 se obtendría

$$x = \frac{\log \frac{7}{3}}{\log 4} + 1 = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4} + 1$$

$$\approx \frac{0.8451 - 0.4771}{0.6021} + 1 \approx 1.6112.$$

EJEMPLO 4

Una ecuación de demanda para un producto es $p = 12^{1-0.1q}$. *Utilizando logaritmos comunes, expresar* q *en términos de* p.

Tomando logaritmos comunes en ambos lados de $p = 12^{1-0.1q}$, se obtiene

$$\log p = \log(12^{1-0.1q}),$$

$$\log p = (1 - 0.1q) \log 12,$$

$$\frac{\log p}{\log 12} = 1 - 0.1q,$$

$$0.1q = 1 - \frac{\log p}{\log 12},$$

$$q = 10\left(1 - \frac{\log p}{\log 3 + \log 4}\right),$$

$$q \approx 10\left(1 - \frac{\log p}{1.0792}\right).$$

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que implican la base e o la base 10, tales como $10^{2x} = 3$, en vez de sacar los logaritmos de ambos lados, puede resultar más sencillo transformar en primer lugar la ecuación a una forma logarítmica equivalente.

$$10^{2x} = 3,$$

$$2x = \log 3 \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$x = \frac{\log 3}{2} \approx \frac{0.4771}{2} \approx 0.2386.$$

EJEMPLO 5

En un artículo sobre depredadores y presas, Holling hace referencia a una ecuación de la forma*

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

en donde x es la densidad de la población de presas, y es el número de presas atacadas, y K y a son constantes. Verificar la afirmación de que

$$\ln \frac{K}{K - y} = ax.$$

Para encontrar ax, en primer lugar se aísla e^{-ax} en la ecuación dada.

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

$$\frac{y}{K} = 1 - e^{-ax},$$

$$e^{-ax} = 1 - \frac{y}{K},$$

$$e^{-ax} = \frac{K - y}{K}.$$

Ahora, se convierte a forma logarítmica

$$\ln \frac{K - y}{K} = -ax,$$

$$-\ln \frac{K - y}{K} = ax,$$

$$\ln \frac{K}{K - y} = ax \qquad \text{(Propiedad 4 de la Secc. 6.3)},$$

que era lo que se trataba de demostrar.

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse reescribiéndolas en forma exponencial.

*C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism," *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), 385-98.

EJEMPLO 6

Resolver $\log_2 x = 5 - \log_2(x + 4)$.

En primer lugar, se colocan todos los logaritmos a un lado, de manera que puedan combinarse.

$$\log_2 x + \log_2(x + 4) = 5,$$

$$\log_2[x(x + 4)] = 5.$$

En forma exponencial se tiene que

$$x(x + 4) = 2^5,$$

$$x^2 + 4x = 32,$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática)}$$

$$(x - 4)(x + 8) = 0,$$

$$x = 4 \text{ o bien } x = -8.$$

Como la ecuación original no está definida para un valor negativo de x, -8 no es una solución. Sin embargo, 4 satisface la ecuación original, como se puede fácilmente verificar, Por ello sólo 4 es una solución.

EJERCICIOS 6.4

En los Problemas **1-34** *encuentre x. Proporcione las respuestas con tres cifras decimales.*

1. $\log(2x + 1) = \log(x + 6)$.

2. $\log x + \log 3 = \log 5$.

3. $\log x - \log(x - 1) = \log 4$.

4. $\log_2 x + 3 \log_2 2 = \log_2 \dfrac{2}{x}$.

5. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$.

6. $(e^{5x+1})^2 = e$.

7. $(16)^{3x} = 2$.

8. $(27)^{2x+1} = \dfrac{1}{3}$.

9. $e^{2x} = 5$.

10. $e^{4x} = \frac{3}{4}$.

11. $3e^{3x+1} = 15$.

12. $6e^{1-x} + 1 = 25$.

13. $10^{4/x} = 6$.

14. $\dfrac{4(10)^{0.2x}}{5} = 3$.

15. $\dfrac{5}{10^{2x}} = 7$.

16. $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$.

17. $2^x = 5$.

18. $4^{x+3} = 7$.

19. $5^{2x-5} = 9$.

20. $4^{x/2} = 20$.

21. $2^{-2x/3} = \dfrac{4}{5}$.

22. $5(3^x - 6) = 10$.

23. $(4)5^{3-x} - 7 = 2$.

24. $\dfrac{8}{3^x} = 4$.

25. $\log(x - 3) = 3$.

26. $\log_2(x + 1) = 4$.

27. $\log_4(3x - 4) = 2$.

28. $\log_4(2x + 4) - 3 = \log_4 3$.

29. $\log(3x - 1) - \log(x - 3) = 2$.

30. $\log x + \log(x - 15) = 2$.

31. $\log_3(2x + 3) = 4 - \log_3(x + 6)$.

32. $\log(x + 2)^2 = 2$, en donde $x > 0$.

33. $\log_2\left(\dfrac{2}{x}\right) = 3 + \log_2 x$.

34. $\ln x = \ln(3x + 1) + 1$.

35. En un estudio sobre las plantas arraigadas en cierta región geográfica,* se determinó que en lotes de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies que se presentaban era S. Cuando se graficó $\log S$ como función de $\log A$, el resultado fue una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A.$$

Determinar S.

36. En un artículo, Taagepera y Hayes hacen referencia a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 \log^2 P.$$

Aquí, T es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país que corresponde al comercio exterior (exportaciones más importaciones), y P es la población del país (en unidades de 100,000).† Verifique la afirmación de que

$$T = 50P^{(0.2068 \; - \; 0.1334 \log P)}.$$

Se puede suponer que $\log 50 = 1.7$.

37. El número Q de miligramos de una substancia radiactiva que restan después de t años está dado por

$$Q = 100e^{-0.035t}$$

(a) ¿Cuántos miligramos quedan después de 0 años? (b) ¿Después de cuantos años habrá 20 mg? Proporcione su respuesta al año más cercano.

38. En la superficie de un portaobjetos de vidrio se tiene una cuadrícula que divide la superficie en 225 cuadros iguales. Supóngase que se distribuye en el portaobjetos una muestra de sangre que contiene N células rojas, y que las células se distribuyen en forma aleatoria. Entonces, el número de cuadros que no contienen células está dado (aproximadamente) por $225e^{-N/225}$. Si 100 de los cuadros no contienen células, estime el número de células que contenía la muestra de sangre.

39. Supóngase que la producción diaria de unidades q, de un producto nuevo en el t-ésimo día de una corrida de producción, está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t}$$

A una ecuación como ésta se le denomina *ecuación de aprendizaje* e indica que al paso del tiempo aumenta la producción por día. Esto puede deberse al aumento en la capacidad de los trabajadores para realizar su trabajo. Determine a la unidad completa más cercana, la producción en (a) el primer día y (b) el décimo día después del inicio de la corrida de producción. (c) ¿Después de cuantos días se alcanzará una corrida de producción diaria de 400 unidades? Proporcione su respuesta al día más cercano.

40. En un análisis de la penetración de mercado con nuevos productos, Hurter y Rubenstein* hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(p+q)Cp+q)t}}{q[1 + e^{-(p+q)Cp+q)t}]},$$

en donde p, q y C son constantes. Los autores afirmas que si $F(0) = 0$, entonces

$$C = -\frac{1}{p + q} \ln \frac{q}{p}.$$

Pruebe que su afirmación es cierta.

41. La población P, de una ciudad crece a una tasa de 2% anual. La ecuación $P = 1000000(1.02)^t$ da la población t años después de 1990. Calcule el valor de p para el que la población es 1 500 000.

42. La ecuación $A = P(1.1)^t$ da el valor A al final de t años de una inversión P compuesta anualmente, a una tasa anual de interés de 10%. ¿Cuántos años se requerirán para que una inversión se duplique? Proporcione su respuesta al año más cercano.

43. La ecuación de demanda para cierto producto es $q = 80 - 2^p$. Despeje p y exprese la respuesta en términos de logaritmos comunes, como se hizo en el Ejemplo 11. Evalúe p a dos cifras decimales cuando $q = 60$.

44. Después de t años, el número de unidades, q, que se venden anualmente de un producto está dado por $q = 1000(\frac{1}{2})^{0.8^t}$. Una ecuación como ésta recibe el nombre de *ecuación de Gompertz* y describe el

* R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

† R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size, *Social Science Research*, 6 (1977), 108-32.

*A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature," *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Despeje t en esta ecuación, de la misma manera que en el Ejemplo 11, y demuestre que

$$t = \frac{\log \frac{3 - \log q}{\log 2}}{(3 \log 2) - 1}.$$

45. Un material translúcido tiene la propiedad de que, aunque la luz pasa a través del mismo, su intensidad se reduce. Un plástico translúcido tiene la propiedad de que una hoja de 1 mml de grosor reduce la intensidad de la luz en 10%. ¿Cuántas de esas láminas se requieren para reducir la intensidad de un rayo de luz a aproximadamente el 50% de su valor original?

6.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 6.1 función exponencial, b^x interés compuesto capital monto compuesto tasa periódica tasa nominal e función exponencial natural ley exponencial de decrecimiento monto inicial constante de decrecimiento semi-vida

Sección 6.2 función logarítmica, $\log_b x$ logaritmo común, $\log x$ logaritmo natural, $\ln x$

Sección 6.3 fórmula del cambio de base

Sección 6.4 ecuación logarítmica ecuación exponencial

RESUMEN

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$. Una función de este tipo está implícita en la fórmula del interés compuesto.

$$S = P(1 + r)^n,$$

en donde S es el monto compuesto de un capital P al final de n periodos de interés, a la tasa periódica r.

Una base que se utiliza con frecuencia en las funciones exponenciales es el número irracional e, en donde $e \approx 2.71828$. Esta base se presenta en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o decrecimiento, como en estudios de población y el decrecimiento radiactivo. Los elementos radiactivos siguen la ley exponencial de decrecimiento.

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

en donde N es la cantidad existente al tiempo t; N_0 es la cantidad inicial y λ es la constante de decrecimiento. Al tiempo requerido para que se reduzca a la mitad la cantidad inicial del elemento se le denomina semi-vida.

La función logarítmica es la función inversa de la exponencial, y viceversa. La función logarítmica con base b se denota por $\log_b$, y $y = \log_b x$ si y sólo si $b^y = x$. A los logaritmos con base e se les denomina logaritmos naturales y se denotan por ln; a los que tienen la base 10 se les denomina logaritmos y comunes y se les simboliza por log. La semivida (o "vida media") T de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y la constante de decaimiento: $T = (\ln 2)/\lambda$.

Algunas propiedades importantes de los logaritmos son:

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n,$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n,$$

$$\log_b m^r = r \log_b m,$$

$$\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m,$$

$$\log_b 1 = 0,$$

$$\log_b b = 1,$$

$$\log_b b^r = r,$$

$$b^{\log_b m} = m,$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

Además, si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$. De manera similar, si $b^m = b^n$, entonces $m = n$. Muchas de estas propiedades se utilizan para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas **1-6**, *escriba cada forma exponencial en términos logarítmicos y cada forma logarítmica de manera exponencial.*

1. $3^5 = 243$. **2.** $\log_7 343 = 3$. **3.** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$. **4.** $10^5 = 100{,}000$.

5. $e^4 = 54.598$. **6.** $\log_9 9 = 1$.

En los Problemas **7-12**, *determine el valor.*

7. $\log_5 125$. **8.** $\log_4 16$. **9.** $\log_2 \frac{1}{16}$. **10.** $\log_{1/3} \frac{1}{9}$. **11.** $\log_{1/3} 9$. **12.** $\log_4 2$.

En los Problemas **13-18**, *evalúe x.*

13. $\log_5 125 = x$. **14.** $\log_x \frac{1}{8} = -3$. **15.** $\log x = -2$. **16.** $\ln \frac{1}{e} = x$.

17. $\log_x(2x + 3) = 2$. **18.** $e^{\ln(x+4)} = 7$.

En los Problemas **19** *y* **20**, *utilice la Tabla 6.1 de la Secc. 6.3 para obtener los valores.*

19. $\log 2500$. **20.** $\log \frac{15}{\sqrt{2}}$.

En los Problemas **21-26**, *escriba cada expresión como un solo logaritmo.*

21. $2 \log 5 - 3 \log 3$. **22.** $6 \ln x + 4 \ln y$. **23.** $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$.

24. $\log_6 2 - \log_6 4 - 2 \log_6 3$. **25.** $\frac{1}{2} \log_2 x + 2 \log_2(x^2) - 3 \log_2(x + 1) - 4 \log_2(x + 2)$.

26. $3 \log x + \log y - 2(\log z + \log w)$.

En los Problemas **27-32**, *escriba la expresión en términos de* $\ln x$, $\ln y$ e $\ln z$.

27. $\ln \frac{x^2 y}{z^3}$. **28.** $\ln \frac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$. **29.** $\ln \sqrt[3]{xyz}$. **30.** $\ln \left[\frac{xy^3}{z^2}\right]^4$.

31. $\ln\left[\frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{z}}\right]$.

32. $\ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x}{z}\right)^3\right]$

33. Exprese $\log_3(x + 5)$ en términos de logaritmos naturales.

34. Exprese $\log_5(2x^2 + 1)$ en términos de logaritmos naturales.

35. Suponga que $\log_2 19 = 4.2479$ y $\log_2 5 = 2.3219$. Calcule $\log_5 19$.

36. Aplique logaritmos naturales para determinar el valor de $\log_4 5$.

37. Si $\log 3 = x$ y $\log 4 = y$, exprese $\log(16\sqrt{3})$ en términos de x y y.

38. Exprese $\log \frac{x^2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ en términos de $\log x$, $\log(x + 1)$, y $\log(x^2 + 2)$.

39. Simplifique $e^{\ln x} + \ln e^x + \ln 1$.

40. Simplifique $\log 10^2 + \log 1000 - 5$.

41. Si $\ln y = x^2 + 2$, determinar y.

42. Trace las gráficas de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$.

En los Problemas **43-48,** *determine x.*

43. $\log(4x + 1) = \log(x + 2)$.

44. $\log x + \log 2 = 1$.

45. $3^{4x} = 9^{x+1}$.

46. $4^{3-x} = \frac{1}{16}$.

47. $\log x + \log(10x) = 3$.

48. $\log_3(x + 1) = \log_3(x - 1) + 1$.

En los Problemas **49-54,** *evalúe x. De sus respuestas con tres cifras decimales.*

49. $e^{3x} = 2$.

50. $10^{3x/2} = 5$.

51. $3(10^{x+4} - 3) = 9$.

52. $7e^{3x-1} - 2 = 1$.

53. $4^{x+3} = 7$.

54. $5^{2/x} = 2$.

55. Si se invierten \$2,600 durante 6.5 años al 6% compuesto trimestralmente, obtenga (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.

56. Halle la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de 11/6% mensual

57. *Problema para calculadora.* Determine el monto compuesto de una inversión de \$4,000 durante 5 años a la tasa de 11% compuesto mensualmente.

58. Debido a una publicidad poco efectiva, una firma comercial encuentra que sus ingresos anuales se han reducido en forma notable. Además, los ingresos anuales R al final de t años de negocios satisfacen la ecuación $R = 200{,}000e^{-0.2t}$. Halle los ingresos anuales al final de 2 años y al término de 3 años.

59. Una sustancia radiactiva decrece de acuerdo con

$$N = 10e^{-0.41t},$$

en donde N es el número de miligramos presentes después de t horas. (a) Determine la cantidad inicial. (d) Al décimo de hora determine la semivida de la presente después de 2 horas. (c) Después de 10 horas. (d) Al décimo de hora determine la semi-vida de la sustancia y (e) el número de horas que se requiere para que quede sólo 1 mg.

60. Si una sustancia radiactiva tiene una semivida de 10 días, ¿en cuántos días restará 1/8 de la cantidad inicial?

61. Una compañía de investigación de mercados necesita determinar la forma en que las personas se adaptan al sabor de una nueva pastilla para la tos. En un experimento, se le dio a una persona una pastilla medicinal para la tos y se le pidió periódicamente asignar un número, en una escala de 0 a 10, al sabor que percibía. A este número se le denominó *magnitud de respuesta*. Se asignó el número 10 al sabor inicial. Después de llevar a cabo varias veces el experimento, la compañía estimó que la magnitud de respuesta, R, está dada por

$$R = 10e^{-t/40},$$

en donde t es el número de segundos después de que la persona recibe la pastilla para la tos. (a) Obtenga la magnitud de respuesta a los 20 segundos. Dé la respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos tiene una persona una magnitud de

respuesta de 5? Proporcione la respuesta redondeando al segundo.

62. El agua de un lago de medio oeste en Estados Unidos contiene sedimentos, y la presencia de éstos reduce la transmisión de la luz a través del agua. Algunos experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce al 10% al pasar a través de 20 cm. de agua. Supóngase que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimentos que contiene el agua. Un instrumento de medición puede detectar la luz a una intensidad de 0.17% del brillo total del Sol. Este instrumento se sumerge en el lago. ¿A qué profundidad dejará inicialmente de registrar la presencia de luz? Dé su respuesta redondeando a los 10 cm.

63. En un análisis de la tasa de enfriamiento de porciones aisladas del cuerpo humano cuando se les expone a temperaturas bajas, se presenta la siguiente ecuación:*

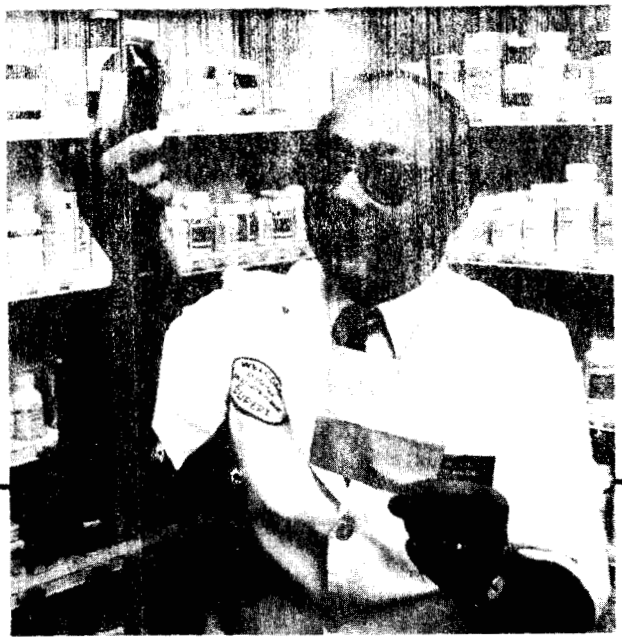
$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at}.$$

en donde T_t es la temperatura de una porción en el tiempo t, T_e es la temperatura ambiental, el subíndice o se refiere a la diferencia inicial de temperatura, y a es una constante. Demuestre que

$$a = \frac{1}{t} \ln \frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}.$$

* R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

APLICACIÓN PRÁCTICA



Dosificación de Medicamentos*

Determinar y recetar dosis de fármacos son aspectos sumamente importantes de la profesión médica. Con frecuencia se debe tener precaución debido al lado posiblemente adverso o a los efectos tóxicos de las medicinas (o drogas).

Muchos medicamentos son utilizados por el cuerpo humano de manera que la cantidad presente sigue una ley exponencial de disminución. Es decir, si N es la cantidad de fármaco presente en el cuerpo al tiempo t, entonces

$$N = N_0 e^{-kt}, \tag{1}$$

en donde k es una constante positiva y N_0 es la cantidad presente al tiempo $t = 0$. Si H es la semivida de tal medicamento, entonces $H = (\ln 2)/k$, o de manera equivalente, $H = (\ln 2)/H$.

Supóngase que se desea analizar el caso en que se administren a un paciente dosis iguales de un fármaco como ese, cada I unidades de tiempo, hasta que se logre un cierto nivel terapéutico. La razón de administrar dosis *reducidas* de mantenimiento se relaciona con frecuencia con los efectos tóxicos de los fármacos. En particular, supóngase que existen d dosis de P unidades cada una, que se aplican dosis en los tiempos $t = 0, I, 2I, \ldots,$ y $(d - 1)I$, y que el nivel terapeútico T, se alcanza en $t = dI$, lo cual se presenta un intervalo después de que se administra la última dosis. Se verá ahora cómo determinar una fórmula que dé el nivel terapéutico.

En el tiempo $t = 0$, el paciente recibe las primeras P unidades, de manera que la cantidad de medicamento en el cuerpo es P. Al tiempo $t = I$, la cantidad presente que proviene de la primera dosis es [de la Ecuación (1)] Pe^{-kI}. Además, a $t = I$ se administran las segundas P unidades. Por ello, la cantidad total de fármaco presente es

$$P + Pe^{-kI}.$$

*Adaptado de Gerald M. Armstrong and Calvin P. Midgley, "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages," *The Mathematics Teacher*, 80, No. 3 (Febrero 1987), 110-13. Con permiso del National Counsil of Teachers of Mathematics.

Al tiempo $t = 2I$, la cantidad que permanece, y que proviene de la primera dosis es Pe^{-2kI}, de la segunda dosis, que ha estado en el sistema durante sólo un intervalo, la cantidad presente es Pe^{-kI}. También, al tiempo $t = 2I$ se administra la tercera dosis de P unidades, de manera que la cantidad total de fármaco presente es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI}$$

Continuando de esta manera, la cantidad de fármaco presente en el sistema al tiempo dI, un intervalo de tiempo después de que se administra la última dosis, está dada por

$$T = Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \ldots + Pe^{-dkI}. \tag{2}$$

Se puede expresar el lado derecho de la Ec. (2) en forma distinta. En primer lugar, se multiplican ambos lados de la (2) por

e^{-kI}:

$$e^{-kI}T = e^{-kI}(Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \ldots + Pe^{-dkI}),$$

$$e^{-kI}T = Pe^{-2kI} + Pe^{-3kI} + \ldots + Pe^{-(d+1)kI}, \tag{3}$$

Restando los lados de la Ec. (3) de los correspondientes de la Ec. (2), se tiene

$$T - e^{-kI}T = Pe^{-kI} - Pe^{-(d+1)kI}.$$

Simplificando y despejando P,

$$(1 - e^{-kI})T = Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI}),$$

$$T = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}, \tag{4}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI}(1 - e^{-kI})}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI} - 1} \tag{5}$$

La Ecuación (5) permite determinar el nivel terapéutico T en términos de la dosis P, los intervalos I, el número de dosis d, y la semivida H, del medicamento [puesto que $k = (\ln 2)/H$]. Entre otras posibilidades, puede determinarse la dosis P si se conocen T, H, I y d.

El objetivo ahora es mantener el nivel terapéutico en el sistema del paciente. Para lograr esto, se administra una dosis reducida R, a los tiempos $t = dI$, $(d + 1)I$, $(d + 2)I$, y así sucesivamente. Puede determinarse una fórmula para R de la siguiente manera.

En el tiempo $t = (d + 1)I$, pero antes de administrar la segunda dosis reducida, la cantidad de fármaco en el sistema, proveniente de la primera dosis reducida es Re^{-kI}, y la cantidad que permanece, proveniente del nivel terapéutico, es Te^{-kI}. Supóngase que se requiere que la suma de esas cantidades sea el nivel terapéutico, T. Es decir,

$$T = Re^{-kI} + Te^{-kI}$$

Despejando R,

$$Re^{-kI} = T - Te^{-kI},$$

$$R = T(1 - e^{-kI})e^{kI}.$$

Reemplazando T por el lado derecho de la Ec. (4) se obtiene

$$R = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}(1 - e^{-kI})e^{kI},$$

o en términos más simples,

$$R = P(1 - e^{-dkI}). \tag{6}$$

Continuando con las dosis reducidas a intervalos I se asegura que el nivel de fármaco en el sistema nunca caiga por debajo de T. Además, se debe observar que como $-dkI < 0$, entonces $0 < e^{-dkI} < 1$. En consecuencia, el factor $1 - e^{-dkI}$ de la Ec. (6) se encuentra entre 0 y 1. Esto asegura que R sea menor que P, de donde R es en realidad una dosis *reducida*.

Es interesante observar que Armstrong y Midgley afirman que "la cantidad terapéutica T debe ser elegida de entre una gama de valores determinados en forma empírica. Se requieren discreción y experiencia médicas para seleccionar los intervalos y las duraciones o tiempos apropiados para administrar el fármaco. Incluso es posible que varíe la semi-vida de in fármaco entre pacientes distintos. Hay muchos otros factores que tienen incidencia, como los niveles de absorción de los medicamentos, su distribución en el sistema, las interacciones entre medicamentos, la edad de los pacientes, su salud en general y la salud de órganos vitales, como el hígado y los riñones.

EJERCICIOS

1. Resuelva la Ec. (5) anterior para determinar (a) P y (b) d.

2. Si I es la semivida del fármaco, pruebe que la Ec. (5) se puede escribir como

$$T = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right)P$$

Obsérvese que $0 < 1 - (1/2^d) < 1$ para $d > 0$. Por tanto, esta ecuación implica que cuando se administran dosis de T unidades a intervalos iguales a la semivida del fármaco, entonces a un intervalo después de que se administre cualquier dosis, pero antes de administrar la siguiente, el nivel total del fármaco en el sistema del paciente es menor que P.

3. La teofilina es un fármaco que se utiliza para tratar asma bronquial y tiene una semi-vida de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente saludable, que no fuma. Supóngase que un paciente como éste logra el nivel terapéutico deseado de este fármaco en 12 horas, cuando se administran 100 mg cada 4 horas. Aquí, $d = 3$. Debido a su toxicidad, debe reducirse la dosis después. Al miligramo más próximo, determine (a) el nivel terapéutico y (b) la dosis reducida.

4. Un componente principal de la hormona tiroidea es la tiroxina, que se denota como T_4. Se dice que una persona con deficiencia tiroidea padece de hipotiroidismo o mixedema. Suponga que a una persona en estas condiciones se le debe aumentar su nivel T_4 en 500 mg. Médicamente se recomienda que el aumento ocurra en forma lenta. Para lograr esto, se administra una dosis diaria de P microgramos de T_4 durante 28 días ($d = 28$). y que después se reduce la dosis a R microgramos por día. Supóngase que la semivida de T_4 es 9 días. Determine P y R al microgramo más próximo.

7

Matemáticas financieras

7.1 Interés compuesto

En este capítulo se revisan algunos temas seleccionados de modelos en finanzas que se refieren al valor del dinero en diferentes tiempos, tales como inversiones, préstamos, etc. En capítulos posteriores, cuando se disponga de mayores instrumentos matemáticos, se revisan y amplían ciertos temas.

Se comienza con algunos problemas que tratan sobre el interés compuesto. Recuérdese que se vio en la Secc. 5.1 que el monto compuesto, S, de un capital P, al final de n periodos de interés y a la tasa r por periodo, está dado por la fórmula

$$S = P(1 + r)^n. \tag{1}$$

EJEMPLO 1

¿Qué tiempo se requiere para que \$600 *se conviertan en* \$900 *a una tasa anual de* 8% *compuesto trimestralmente?*

La tasa por periodo es $r = 0.08/4 = 0.02$. Si n es el número de periodos de interés que se requiere para que un capital $P = 600$ se convierta en un monto $S = 900$, de la Ecuación (2),

$$\begin{aligned} 900 &= 600(1.02)^n, \\ (1.02)^n &= \frac{900}{600}, \\ (1.02)^n &= 1.5. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de n, primero se obtienen los logaritmos naturales de ambos lados.

$$\begin{aligned} \ln(1.02)^n &= \ln 1.5, \\ n \ln 1.02 &= \ln 1.5 \quad (\text{ya que } \ln m^r = r \ln m), \\ n &= \frac{\ln 1.5}{\ln 1.02} \approx \frac{0.40547}{0.01980} \approx 20.478. \end{aligned}$$

El número de años que corresponde a 20.478 periodos trimestrales de interés es $20.478/4 = 5.1195$, que es un poco más de 5 años y 1 mes. En realidad, el capital no alcanza los \$900 sino hasta que transcurran $5\frac{1}{4}$ años, debido a que el interés se capitaliza trimestralmente.

EJEMPLO 2

¿A qué tasa nominal de interés compuesto anual se duplica el dinero en 8 años?

Si r es la tasa que se desea, a la cual un capital P se duplica en 8 años, entonces el monto es $2P$. Por ello

$$\begin{aligned} P(1 + r)^8 &= 2P, \\ (1 + r)^8 &= 2, \\ 1 + r &= \sqrt[8]{2}, \\ r &= \sqrt[8]{2} - 1, \\ r &\approx 1.0905 - 1 = 0.0905. \end{aligned}$$

La tasa que se busca es 9.05%.

EJEMPLO 3

Supóngase que \$500 se convirtieron en \$588.38 en una cuenta de ahorros, después de 3 años. Si el interés se capitalizó semestralmente, encontrar la tasa nominal de interés capitalizable semestralmente, a la cual se invirtió el dinero.

Sea r la tasa semestral. Existen seis periodos de interés. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 500(1 + r)^6 &= 588.38, \\ (1 + r)^6 &= \frac{588.38}{500}, \\ 1 + r &= \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}}, \\ r &= \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}} - 1, \\ r &\approx 1.0275 - 1 = 0.0275. \end{aligned}$$

Entonces, la tasa semestral fue de 2.75%, de modo que la tasa nominal fue de $5\frac{1}{2}$ % compuesto semestralmente.

Si se invierte \$1 a una tasa nominal de 8% compuesto trimestralmente durante 1 año, esa suma obtendrá más del 8% en el año. El interés compuesto es $S - P = 1(1.02)^4 - 1 \approx 1.082432 - 1 = \$0.082432$, lo cual es aproximadamente 8.24% de la suma original. Es decir, 8.24% es la tasa de interés *compuesto anualmente*, que en rea-

lidad se obtiene, y se le denomina **tasa efectiva**. Siguiendo este procedimiento, se puede probar que **la tasa efectiva que es equivalente a una tasa nominal r compuesta n veces al año** está dada por

$$\text{tasa efectiva} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1. \tag{2}$$

EJEMPLO 4

¿Qué tasa efectiva es equivalente a una tasa nominal del 6% compuesto (a) semestralmente y (b) trimestralmente?

a. De la Ecuación (3) la tasa efectiva es

$$\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = (1.03)^2 - 1 = 0.0609 \quad \text{o sea} \quad 6.09\%.$$

b. La tasa efectiva es

$$\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = (1.015)^4 - 1 \approx 0.061364 \quad \text{o sea} \quad 6.14\%.$$

Para una tasa nominal dada r, el Ejemplo 4 ilustra que la tasa efectiva crece a medida que lo hace el número de periodos de interés por año (n). Sin embargo, en la Secc. 10.3 se demuestra independientemente del valor de n, la tasa efectiva máxima que se puede obtener es $e^r - 1$.

EJEMPLO 5

¿En qué monto se convertirán \$12,000 *en 15 años si se invierten a una tasa efectiva de 5%?*

Puesto que la tasa efectiva es la tasa real compuesta anualmente, se tiene

$$S = 12{,}000(1.05)^{15} \approx 12{,}000(2.078928)$$
$$\approx \$24{,}947.14.$$

EJEMPLO 6

¿Cuántos años deben transcurrir para que el dinero se duplique a la tasa efectiva de r?

Sea n el número de años que deben transcurrir para que el capital P se duplique. Entonces, el monto es $2P$. De aquí

$$2P = P(1 + r)^n,$$
$$2 = (1 + r)^n,$$
$$\ln 2 = n \ln(1 + r) \qquad \text{(tomando logaritmos en ambos lados).}$$

De donde

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)} \approx \frac{0.69315}{\ln(1 + r)}.$$

Por ejemplo, si $r = 0.06$, el número de años que se requiere para duplicar el capital es aproximadamente

$$\frac{0.69315}{\ln 1.06} \approx \frac{0.69315}{0.05827} \approx 11.9 \text{ años.}$$

Se debe destacar que las tasas efectivas se utilizan para comparar diferentes tasas de interés a fin de determinar cuál es "mejor". Por ejemplo, si se tuviera la alternativa de invertir dinero al 6% capitalizable diariamente o al $6\frac{1}{4}$% capitalizable semestralmente, ¿cuál es la mejor selección? Las respectivas tasas efectivas equivalentes son

$$\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} - 1 \approx 0.061831 \approx 6.18\%$$

y

$$\left(1 + \frac{0.06125}{4}\right)^{4} - 1 \approx 0.062671 \approx 6.27\%.$$

Resulta evidente que es mejor la segunda selección, aunque a primera vista resulta más atractiva la capitalización diaria.

EJERCICIOS 7.1

En los Problemas **1-2**, *calcule (a) el monto y (b) el interés compuesto para la inversión y la tasa anual dadas.*

1. $6000 durante 8 años a una tasa efectiva de 8%.

2. $750 durante 12 meses a una tasa efectiva de 10%.

En los Problemas **3** *a* **6**, *obtenga la tasa efectiva que corresponde a la tasa nominal dada. Utilice una calculadora para los Problemas* **5** *y* **6** *y dé la respuesta con cinco cifras decimales.*

3. 8% compuesto trimestralmente.

4. 12% compuesto mensualmente.

5. 8% compuesto diariamente.

6. 12% compuesto diariamente.

En los Problemas **7** *y* **8**, *determine los años que se requerirían para duplicar el capital a la tasa efectiva dada. Proporcione la respuesta con una cifra decimal.*

7. 8%.

8. 5%.

9. Se adquiere en $6000 un certificado de depósito por la misma cantidad y se conserva durante 7 años. Si el certificado obtiene el 8% compuesto trimestralmente, ¿cuál es su valor al final de ese periodo?

10. ¿Cuántos años se requieren para que el dinero se triplique a la tasa efectiva de r?

11. Supóngase que los costos del año escolar 1984-1985 para un estudiante residente que asiste a una universidad privada, que ofrece cursos de cuatro años, son de $9000. Esto incluye colegiatura, habitación y alimentos. Suponiendo una tasa efectiva de inflación del 6% para estos costos, determine cuál será el valor de estos costos educativos en el año escolar 1997-1998.

12. Repítase el Problema 11 para una tasa de inflación del 6% compuesto semestralmente.

13. Una compañía importante que ofrece tarjetas de crédito tiene un cargo financiero de $1\frac{1}{2}$ % mensual sobre saldos insolutos. (a) ¿Cuál es la tasa nominal compuesta mensualmente? (b) ¿Cual es la tasa efectiva?

14. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que un capital de P se duplique si el dinero vale 12% compuesto mensualmente? Proporcione la respuesta hasta el mes más cercano.

15. ¿Cuál será el monto de $2000, después de 8 años, si se invierten a una tasa efectiva de 6% durante los primeros 4 años y del 6% compuesto semestralmente en los restantes?

16. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que $500 se conviertan en $700, si se invierten al 8% compuesto trimestralmente?

17. Un inversionista puede invertir dinero al 8% compuesto anualmente, o al 7.8% compuesto semestralmente. ¿Cuál de las dos tasas es mejor?

18. ¿Qué tasa nominal de interés compuesto trimestralmente corresponde a una tasa efectiva del 4%?

19. Un banco anuncia que paga interés sobre cuentas de ahorros a razón del $5\frac{1}{4}$ % compuesto diariamente. Halle la tasa efectiva si el banco supone que el año tiene (a) 360 días o (b) 365 días para determinar la *tasa diaria*. Supóngase que la capitalización ocurre 365 veces al año, y proporcione la respuesta con cuatro cifras decimales.

20. Considere que $700 se convirtieron en $801.06 en una cuenta de ahorros, después de dos años. Si el interés se capitalizó trimestralmente, encontrar la tasa nominal de interés compuesto trimestralmente que se ganó con el dinero.

21. Como protección contra la inflación, un inversionista adquirió una pintura en 1976 en $100,000. La vendió en 1986 en $300,000. ¿A qué tasa efectiva aumentó el valor de la pintura?

22. Si la tasa de inflación de ciertos artículos es de $7\frac{1}{4}$ % compuesto diariamente, ¿cuántos años transcurrirán hasta que el precio promedio de esos artículos se duplique?

23. Un *bono de cupón cero* es aquel que se vende en una cantidad inferior a su valor nominal (es decir, se le *descuenta*) y no tiene pagos periódicos de interés. Más bien el valor se redime a su valor nominal al vencimiento. En consecuencia, en este sentido, el interés se paga al vencimiento. Supóngase que un bono de cupón cero se vende en $220 y que puede amortizarse después de 14 años a su valor nominal de $1000. ¿A qué tasa nominal compuesta semestralmente gana interés el bono?

7.2 Valor actual (o presente)

Supóngase que se depositan $100 en una cuenta de ahorros que paga el 6% anualmente. Después, al final de dos años, el valor de la cuenta es $100(1.06)^2 = \$112.36$. Para describir esto, se dice que el monto (compuesto) de $112.36 es el *valor futuro* de los $100 y que estos $100 son el *valor actual* de los $112.36. En general, hay ocasiones en las que se sabe el valor futuro de una inversión y se desea encontrar su valor actual. Para obtener una fórmula para esto, se despeja P en la ecuación $S = P(1 + r)^n$. Esto da $P = S/(1 + r)^n$. Consecuentemente

$$P = S(1 + r)^{-n} \qquad (1)$$

arroja **el capital P que debe invertirse a la tasa por periodo r durante n periodos de interés para que el monto sea S.** A P se le denomina el **valor actual** de S. En el Apéndice D se proporcionan valores aproximados de $(1 + r)^{-n}$.

EJEMPLO 1

Encontrar el valor actual de $1000 *que vencen después de tres años, si la tasa de interés es del 9% compuesto mensualmente.*

Se utiliza la Ecuación (1), con $S = 1000$, $r = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 3(12) = 36$.

$$P = 1000(1.0075)^{-36} \approx 1000(0.764149)$$
$$\approx \$764.15.$$

Si la tasa de interés del Ejemplo 1 fuera del 10% compuesto mensualmente, el valor actual sería

$$P = 1000\left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{-36} \approx \$741.74,$$

que es una cantidad menor que la otra. Siempre resulta que el valor actual disminuye al aumentar la tasa de interés por periodo de conversión.

EJEMPLO 2

Se está formando un fideicomiso para la educación de un niño, mediante un solo pago, de manera que al final de 15 *años haya* \$24,000. *Si el fondo gana intereses a razón del* 7% *compuesto semestralmente, ¿cuál debe ser el depósito inicial en el fondo?*

Se desea el valor actual de \$24,000 que vencen en 15 años. De la Ecuación (1) con $S = 24{,}000$, $r = 0.07/2 = 0.035$ y $n = 15(2) = 30$, se tiene

$$P = 24{,}000(1.035)^{-30} \approx 24{,}000(0.356278)$$
$$\approx \$8550.67.$$

Supóngase que el señor Herrera le debe al señor Gómez dos sumas de dinero: \$1000 a pagar en 2 años y \$600 a pagar en 5 años. Si el señor Herrera desea pagar el total de la deuda en estos momentos con un solo pago, ¿cuánto debe pagar? Supóngase una tasa de interés del 8% compuesto trimestralmente.

El pago único, x, a realizar hoy, debe ser por una cantidad que pudiera crecer y pagar las deudas en su vencimiento. Es decir, debe ser igual a la suma de los valores actuales de los pagos futuros. Como se muestra en la Figura 7.1, se tiene

$$x = 1000(1.02)^{-8} + 600(1.02)^{-20} \qquad (2)$$
$$\approx 1000(0.853490) + 600(0.672971)$$
$$= 853.490 + 403.78260$$
$$\approx \$1257.27.$$

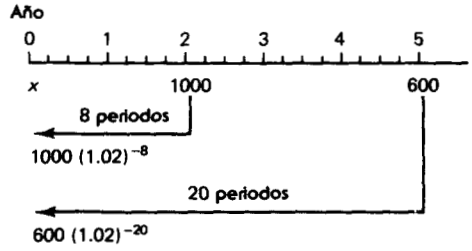


FIGURA 7.1

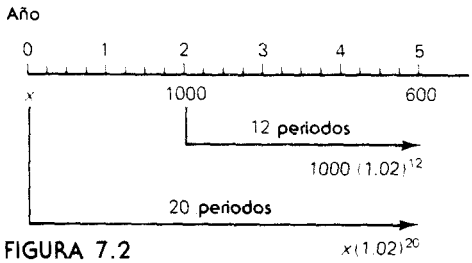


FIGURA 7.2

Así, el pago único a realizar hoy es de $1257.27. Enseguida, se analiza la situación con mayor detalle. Existen dos formas de pagar la deuda: un solo pago ahora, o dos pagos en el futuro. Obsérvese que la Ecuación (2) indica que el valor *actual* de todos los pagos bajo un método debe ser igual al valor *actual* de todos los pagos según el otro método. En general, esto es cierto no sólo para *el momento actual* sino para *cualquier momento*. Por ejemplo, si se multiplican ambos lados de la Ecuación (2) por $(1.02)^{20}$, se obtiene

$$x(1.02)^{20} = 1000(1.02)^{12} + 600. \tag{3}$$

El lado izquierdo de la Ecuación (3) arroja el valor del pago único después de 5 años (véase la Figura 7.2), en tanto que el lado derecho da el valor dentro de cinco años de todos los pagos bajo el otro método. Despejando x en la Ecuación (3) se obtiene el mismo resultado $x = \$1257.27$. A las Ecuaciones (2) y (3) se les denomina **ecuaciones de valores equivalentes**. Ilustran que cuando se consideran dos métodos de pago de una deuda (u otra transacción), *en cualquier momento* el valor de todos los pagos según un método debe ser igual al valor de todos los pagos según el otro método.

En ciertas situaciones, puede que sea más conveniente utilizar una ecuación de valor equivalente, en comparación con otra, tal como se ilustra en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Una deuda de $3000, *que vence dentro de* 6 *años se va a pagar mediante tres abonos:* $500 *ahora,* $1500 *en* 3 *años y un pago final al término de* 5 *años. ¿De cuánto debe ser este pago si se supone una tasa de interés del* 6% *compuesto anualmente?*

Sea x el pago final que vence a los 5 años. Por conveniencia para los cálculos, se elabora una ecuación de valores equivalentes que represente la situación dentro de 5 años, porque de esta manera el coeficiente de x será 1, como se ve en la Figura 7.3. Obsérvese

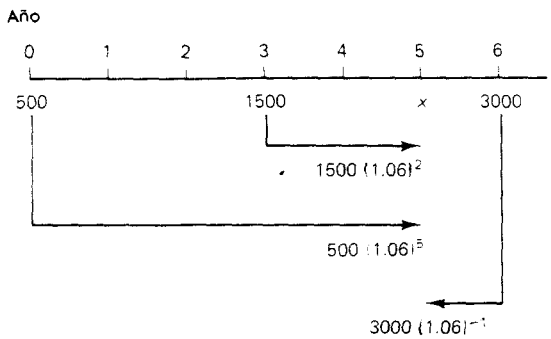


FIGURA 7.3

que a los 5 años, se calculan los valores futuros de \$500 y \$1500 y el valor actual de \$3000. La ecuación de valores equivalentes es

$$500(1.06)^5 + 1500(1.06)^2 + x = 3000(1.06)^{-1},$$
$$500(1.338226) + 1500(1.123600) + x \approx 3000(0.943396),$$
$$x \approx \$475.68.$$

Cuando se considera una elección entre dos inversiones, se debe hacer una comparación de los valores de cada una de ellas en cierto momento, tal como se muestra en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4

Supóngase que se tiene la oportunidad de invertir \$4000 *en un negocio que haría que el valor de la inversión fuera de* \$5300 *a los* 5 *años. Por otro lado, se podrían colocar los* \$4000 *en una cuenta de ahorros que paga el* 6% *semestralmente. ¿Qué inversión es mejor?*

Se considera el valor de cada una de las dos inversiones al final de 5 años. En ese momento la inversión en el negocio tendrá un valor de \$5300, en tanto que la cuenta de ahorros valdrá $4000(1.03)^{10} \approx \$5375.66$. Resulta evidente que la mejor alternativa es colocar el dinero en la cuenta de ahorros.

Si una inversión inicial produce pagos en momentos futuros, a los pagos se les denomina **flujos de efectivo**. El **valor actual neto**, denotado por *VAN*, del flujo de efectivo, se define como la suma de los valores actuales de los flujos de efectivo menos la inversión inicial. Si $VAN > 0$, entonces la inversión es redituable; si $VAN < 0$, entonces la inversión no es redituable.

EJEMPLO 5

Supóngase que se pueden invertir \$20,000 *en un negocio que garantiza los siguientes flujos de efectivo al final de los años señalados:*

Año	Flujo de efectivo
2	\$10,000
3	8,000
5	6,000

Supóngase una tasa de interés de 7% *compuesto anual y encuéntrese el valor actual neto de los flujos de efectivo.*

Restando la inversión inicial de la suma de los valores actuales de los flujos de efectivo se obtiene

$$VAN = 10{,}000(1.07)^{-2} + 8000(1.07)^{-3} + 6000(1.07)^{-5} - 20{,}000$$
$$\approx 10{,}000(0.873439) + 8000(0.816298) + 6000(0.712986) - 20{,}000$$

$$= 8734.39 + 6530.384 + 4277.916 - 20{,}000$$

$$= -\$457.31.$$

Obsérvese que, dado que $VAN < 0$, el negocio no es redituable, si se considera el valor del dinero en el tiempo. Sería mejor invertir los \$20,000 en un banco que pague 7%, puesto que el negocio es equivalente a invertir sólo 20,000 − 457.31 = \$19,542.69.

EJERCICIOS 7.2

En los Problemas **1-8**, *halle el valor actual del pago futuro que se señala, a la tasa de interés especificada.*

1. \$6000 que vencen en 20 años, al 5% compuesto anualmente.

2. \$3500 que vencen en 8 años al 6% efectivo.

3. \$4000 que vencen en 12 años, al 7% compuesto semestralmente.

4. \$2500 que vencen en 15 meses, al 8% compuesto trimestralmente.

5. \$2000 que vencen en $2\frac{1}{2}$ años, al 9% compuesto mensualmente.

6. \$750 que vencen en 3 años, al 18% compuesto mensualmente.

7. \$8000 que vencen en $7\frac{1}{2}$ años, al 6% compuesto trimestralmente.

8. \$6000 que vencen en $6\frac{1}{2}$ años, al 10% compuesto semestralmente.

En los Problemas **9-12**, *utilice una calculadora para obtener el valor actual del pago futuro dado, a la tasa de interés que se especifica.*

9. \$8000 que vencen en 5 años, al 10% compuesto mensualmente.

10. \$500 que vencen en 3 años, al $8\frac{3}{4}$ % compuesto trimestralmente.

11. \$10,000 que vencen en 4 años, al 9 % compuesto diario.

12. \$1250 que vencen en $1\frac{1}{2}$ años, al $13\frac{1}{2}$ % compuesto semanalmente.

13. Se va a formar un fideicomiso para un niño de 10 años, mediante un solo pago, de manera que cuando el niño tenga 21 años reciba \$27,000. Determinar de cuánto debe ser el pago si se supone una tasa de interés del 6% compuesto semestralmente.

14. Una deuda de \$550 vence dentro de 4 años y otra de \$550 vence en 5 años y se deben pagar mediante un solo pago en estos momentos. Halle de cuánto debe ser el pago si se supone una tasa de interés del 10% compuesto trimestralmente.

15. Una deuda de \$600 vence en tres años y otra de \$800 vence en 4 años. Se deben pagar mediante un solo abono, dentro de 2 años. Si la tasa de interés es del 8% compuesto semestralmente, ¿de cuánto debe ser el pago?

16. Una deuda de \$5000 que vence en 5 años se va a pagar mediante un abono de \$2000 en estos momentos y un segundo pago al final de 6 años. ¿De cuánto debe ser el segundo pago si la tasa de interés es del 6% compuesto trimestralmente?

17. Deudas por \$5000 dentro de 5 años y \$5000 dentro de 10 años se van a pagar mediante un pago de \$2000 dentro de 2 años, un pago de \$4000 dentro de 4 años y un pago final al término de 6 años. Si la tasa de interés es del 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto debe ser el pago final?

18. Una deuda de \$2000 que vence en 3 años y otra de \$3000 que vence en 7 años se van a pagar mediante un solo abono de \$1000 realizado en estos momentos y otros dos pagos iguales que se harán dentro de 1 año y dentro de 4 años. Si la tasa de interés es del 6% compuesto anualmente, ¿de cuánto debe ser cada uno de los dos pagos iguales?

19. Una inversión inicial de \$25,000 en un negocio garantiza los siguientes flujos de efectivo.

Año	Flujo de efectivo
3	\$ 8,000
4	\$10,000
6	\$14,000

Supóngase una tasa de interés del 5% compuesto semestralmente.

a. Halle el valor actual neto de los flujos de efectivo.

b. ¿Es redituable la inversión?

20. Resuelva de nuevo el Problema 19 para una tasa de interés del 6% compuesto semestralmente.

21. Supóngase que una persona tiene las siguientes alternativas para invertir $10,000:

a. Colocar el capital en una cuenta de ahorros que paga el 6% compuesto semestralmente;

b. Invertir esa cantidad en un negocio que ofrece un valor de la inversión de $16,000 a los 8 años.

¿Cuál es la mejor alternativa?

22. A le debe a B dos sumas de dinero: $1000 más intereses al 7% compuesto anualmente, que vence en 5 años, y $2000 más intereses al 8% compuesto semestralmente, con vencimiento a 7 años. Si se van a pagar ambas deudas mediante un solo pago al final de 6 años, obtener la cantidad que debe pagarse si el dinero vale 6% compuesto trimestralmente.

23. Una joyería anuncia que por cada $1000 que se gasten en joyería de diamantes, el comprador recibe un bono por $1000 sin costo alguno. En realidad los $1000 son el valor total de vencimiento de un bono de cupón cero (véase el Problema 35 del Ejercicio 7.1), que la tienda adquiere a un precio muy reducido. Si el bono gana interés a razón del 11.5% compuesto trimestralmente y vence a los 20 años, ¿cuánto le cuesta el bono a la tienda?

24. Determine el valor actual de $3000 que vencen en 2 años, a una tasa bancaria del 8% compuesto diariamente. Supóngase que el banco utiliza 360 días para determinar la tasa diaria y que el año tiene 365 días, es decir, la capitalización ocurre 365 veces al año.

25. Un *pagaré* es una declaración escrita en la que se acuerda pagar cierta cantidad de dinero, ya sea a solicitud o en determinada fecha futura. Cuando se compra un pagaré a su valor actual, a determinada tasa de interés, se dice que se *descuenta* el pagaré y a la tasa de interés se le denomina *tasa de descuento*. Supóngase que se vende a una institución financiera, en $4,700 un pagaré de $10,000, que vence dentro de 8 años. ¿Cuál es la tasa nominal de descuento, con capitalización trimestral?

7.3 Anualidades

En Matemáticas se utiliza la palabra **sucesión** o **progresión** para describir una lista de números dispuestos en un orden definido. Por ejemplo, la lista

$$2, 4, 6, 8$$

es una sucesión o progresión (finita). El primer término es 2; el segundo, 4 y así sucesivamente.

En la sucesión

$$3, 6, 12, 24, 48,$$

cada uno de los términos, después del primero, puede obtenerse multiplicando el término anterior por 2:

$$6 = 3(2), \qquad 12 = 6(2), \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

Esto significa que la *razón* de cada par de términos consecutivos es 2:

$$\frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{12}{6} = 2, \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

A esta progresión se le denomina *sucesión geométrica* (o *progresión geométrica*) con *razón común* 2. Obsérvese que puede escribirse de la siguiente manera

$$3, 3(2), 3(2)(2), 3(2)(2)(2), 3(2)(2)(2)(2)$$

o de esta otra forma:

$$3, 3(2), 3(2^2), 3(2^3), 3(2^4).$$

En términos más generales, si una progresión geométrica tiene n términos, de manera que el primero de ellos es a y la razón común es la constante r, entonces la progresión tiene la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}.$$

Obsérvese que el n-ésimo término de la sucesión es ar^{n-1}.

DEFINICIÓN

La sucesión de n números

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \textit{ en donde } a \neq 0,*$$

se denomina ***progresión geométrica con primer término a y razón común r.***

EJEMPLO 1

a. La progresión geométrica de $a = 3$, razón común $\frac{1}{2}$ y $n = 5$ es

$$3, 3(\tfrac{1}{2}), 3(\tfrac{1}{2})^2, 3(\tfrac{1}{2})^3, 3(\tfrac{1}{2})^4,$$

o bien $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$.

b. Los números

$$1, 0.1, 0.01, 0.001$$

forman una progresión geométrica con $a = 1$, $r = 0.1$ y $n = 4$.

EJEMPLO 2

Si se invierten \$100 a una tasa de 6% compuesto anualmente, entonces la sucesión de montos compuestos al final de cada uno de los 8 años es

$$100(1.06), \quad 100(1.06)^2, \quad 100(1.06)^3, \quad \ldots, \quad 100(1.06)^8.$$

Esta es una progresión geométrica con razón común 1.06.

A la suma de los términos de la progresión geométrica $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ se le denomina **serie geométrica:**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{1}$$

Por ejemplo,

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^6$$

es una serie geométrica con $a = 1$, razón común $r = \frac{1}{2}$ y $n = 7$.

Enseguida, se calcula la suma s de la serie geométrica de (1):

$$s = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{2}$$

* Si $a = 0$, la progresión es 0, 0, 0, ..., 0. Este caso no se considera de interés.

Se puede expresar s en forma más compacta. Multiplicando ambos lados por r, se obtiene

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{3}$$

Restando los miembros correspondientes de la Ecuación (3) de los de la (2) se obtiene

$$s - rs = a - ar^n.$$

$$s(1 - r) = a(1 - r^n) \qquad \text{(factorizando)}.$$

Dividiendo ambos miembros entre $1 - r$, se tiene

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{4}$$

que señala **la suma s de una serie geométrica* de n términos con primer término a y razón común r.**

EJEMPLO 3

Evaluar la suma de la serie geométrica:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^6.$$

Aquí $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 7$ (no 6). De la Ecuación (4) se tiene

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1[1 - (\frac{1}{2})^7]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}.$$

EJEMPLO 4

Hallar la suma de la serie geométrica:

$$3^5 + 3^6 + 3^7 + \cdots + 3^{11}.$$

Aquí $a = 3^5$, $r = 3$ y $n = 7$. De la Ecuación (4),

$$s = \frac{3^5(1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{243(1 - 2187)}{-2} = 265{,}599.$$

La noción de serie geométrica es la base de los modelos matemáticos de *anualidades*. Básicamente, una **anualidad** es una sucesión de pagos realizados en periodos fijos durante un intervalo de tiempo dado. Al periodo fijo se le denomina **periodo de pago** y el intervalo de tiempo es el **plazo** de la anualidad. Un ejemplo de anualidad consiste en depositar $100 en una cuenta de ahorros cada 3 meses durante un año.

El **valor actual** (o **presente**) **de una anualidad** es la suma de los *valores actuales* de todos los pagos. Representa la cantidad que debe invertirse en este momento para comprar los pagos que vencen en el futuro. Si no se especifica otra cosa, se supone que cada pago se hace al *final* del periodo de pago; a éstas se les denomina **anualidades vencidas**. También se supone que el interés se calcula al final de cada periodo de pago.

* En esta fórmula se supone que $r \neq 1$. Sin embargo, si $r = 1$, entonces $s = a + a + \ldots + a = na$.

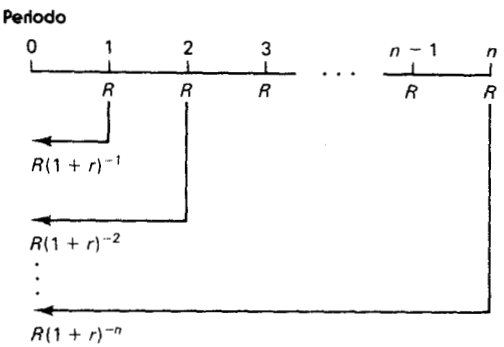


FIGURA 7.4

Se considera una anualidad de n pagos de valor R cada uno, en donde la tasa de interés *por periodo* es r (véase la Figura 7.4) y el primer pago vence dentro de un periodo. El valor actual A de la anualidad está dado por

$$A = R(1 + r)^{-1} + R(1 + r)^{-2} + \cdots + R(1 + r)^{-n}.$$

Esto es una serie geométrica de n términos, con primer término $R(1 + r)^{-1}$ y razón común $(1 + r)^{-1}$. Por lo tanto de la Ecuación (4) se obtiene

$$A = \frac{R(1 + r)^{-1}[1 - (1 + r)^{-n}]}{1 - (1 + r)^{-1}}$$

$$= \frac{R[1 - (1 + r)^{-n}]}{(1 + r)[1 - (1 + r)^{-1}]} = \frac{R[1 - (1 + r)^{-n}]}{(1 + r) - 1}.$$

En consecuencia la fórmula

$$A = R\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \tag{5}$$

da **el valor actual A de una anualidad R por periodo de pago, durante n periodos a la tasa de r por periodo.** La expresión $[1 - (1 + r)^{-n}]/r$ se denota por $a_{\overline{n}|r}$ y [haciendo $R = 1$ en la Ecuación (5)] representa el valor actual de una anualidad de \$1 por periodo. El símbolo $a_{\overline{n}|r}$ se lee "*a* a *n* y a *r*". En el Apéndice D se proporcionan valores seleccionados de $a_{\overline{n}|r}$ (la mayoría de los cuales son aproximados). Por consiguiente, la Ecuación (5) se puede escribir de la siguiente manera

$$A = Ra_{\overline{n}|r}. \tag{6}$$

EJEMPLO 5

Encontrar el valor actual de una anualidad de \$100 *mensuales durante* $3\frac{1}{2}$ *años a una tasa de interés del* 6% *compuesto mensualmente.*

En la Ecuación (6), $R = 100$, $r = 0.06/12 = 0.005$ y $n = (3\frac{1}{2})(12) = 42$. Consecuentemente

$$A = 100a_{\overline{42}|0.005}.$$

Del Apéndice D, $a_{\overline{42}|0.005} \approx 37.798300$. Así

$$A \approx 100(37.798300) = \$3779.83.$$

EJEMPLO 6

Dada una tasa de interés del 5% *compuesto anualmente, obtener el valor actual de la siguiente anualidad:* \$2000 *que vencen al final de cada uno de los siguientes* 3 *años y* \$5000 *que vencen al final de cada uno de los siguientes* 4 *años (véase la Figura* 7.5*).*

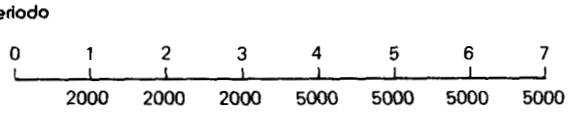


FIGURA 7.5

El valor actual se obtiene sumando los valores actuales de todos los pagos:

$$2000(1.05)^{-1} + 2000(1.05)^{-2} + 2000(1.05)^{-3} + 5000(1.05)^{-4} + 5000(1.05)^{-5} + 5000(1.05)^{-6} + 5000(1.05)^{-7}.$$

En vez de evaluar esta expresión, se puede simplificar el trabajo considerando que los pagos son una anualidad de \$5000 durante 7 años, menos una anualidad de \$3000 durante 3 años, de manera que los primeros tres pagos son de \$2000 cada uno. Por ello el valor actual es

$$\begin{aligned} &5000a_{\overline{7}|0.05} - 3000a_{\overline{3}|0.05} \\ &\approx 5000(5.786373) - 3000(2.723248) \\ &\approx \$20{,}762.12. \end{aligned}$$

EJEMPLO 7

Si se utilizan \$10,000 *para adquirir una anualidad que consiste en pagos iguales realizados al final de cada uno de los siguientes* 4 *años y la tasa de interés es del* 6% *compuesto anualmente, encontrar el valor de cada pago.*

Aquí, $A = \$10{,}000$, $n = 4$, $r = 0.06$ y se desea hallar R. De la Ecuación (6),

$$10{,}000 = Ra_{\overline{4}|0.06}.$$

Despejando R, se obtiene

$$R = \frac{10{,}000}{a_{\overline{4}|0.06}} \approx \frac{10{,}000}{3.465106} \approx \$2885.91.$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}}$$

arroja el pago periódico R de una anualidad cuyo valor actual es A.

EJEMPLO 8

Las primas de una póliza de seguros son de \$50 *trimestrales, pagaderas al principio de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar por adelantado las primas de un año, ¿cuánto debe pagar, suponiendo que el interés es del* 4% *compuesto trimestralmente?*

Se desea obtener el valor actual de una anualidad de \$50 por periodo durante cuatro periodos a una tasa de 1% por periodo. Sin embargo, los pagos deben realizarse al *principio* de los periodos. A estas anualidades se les denomina **anualidades anticipadas**. Estas sumas pueden considerarse como un pago inicial de \$50, seguidos de una anualidad vencida de \$50 durante tres periodos. Consecuentemente el valor actual es

$$50 + 50a_{\overline{3}|0.01} \approx 50 + 50(2.940985) \approx \$197.05.$$

Es necesario señalar que la fórmula general para el **valor actual de una anualidad anticipada** es $A = R + Ra_{\overline{n-1}|r}$ o bien

$$A = R(1 + a_{\overline{n-1}|r}).$$

El **monto (o valor futuro) de una anualidad** es el valor, al final del plazo, de todos los pagos. Es decir, es la suma de los montos compuestos de todos los pagos. Si se considera una anualidad vencida de n pagos de valor R cada uno, en donde la tasa de interés por periodo es r. El monto compuesto del último pago es R, puesto que ocurre al final del último periodo de interés y, por ello, no produce intereses (véase la Figura 7.6). El $(n-1)$-ésimo pago obtiene interés durante un periodo y, de la misma manera, el primer pago gana interés durante $n-1$ periodos. Por lo tanto, el valor futuro de la anualidad es

$$R + R(1 + r) + R(1 + r)^2 + \cdots + R(1 + r)^{n-1}.$$

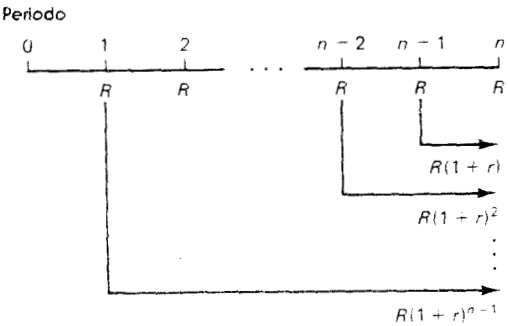


FIGURA 7.6

Esta es una serie geométrica de n términos con primer término R y razón común $1 + r$. En consecuencia, su suma es S [utilizando la Ecuación (4)]:

$$S = \frac{R[1 - (1 + r)^n]}{1 - (1 + r)} = R\frac{1 - (1 + r)^n}{-r}$$

$$= R\frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Así, la fórmula

$$S = R\frac{(1 + r)^n - 1}{r} \tag{7}$$

da **el monto S de una anualidad R por periodo de pago, durante n periodos a la tasa de r por periodo.** La expresión $[(1 + r)^n - 1]/r$ se abrevia mediante el símbolo $s_{\overline{n}|r}$ y en el Apéndice D se dan valores aproximados de $s_{\overline{n}|r}$. Consecuentemente,

$$S = Rs_{\overline{n}|r}. \tag{8}$$

EJEMPLO 9

Obtener el monto de una anualidad que consiste en pagos de \$50 *al final de cada* 3 *meses, durante* 3 *años, a la tasa del* 6% *compuesto trimestralmente. Determinar también el interés compuesto.*

Para hallar el monto de la anualidad se utiliza la Ecuación (8) con $R = 50$, $n = 4(3) = 12$ y $r = 0.06/4 = 0.015$:

$$S = 50s_{\overline{12}|0.015} \approx 50(13.041211) \approx \$652.06.$$

El interés compuesto es la diferencia entre el monto de la anualidad y la suma de los pagos, es decir

$$652.06 - 12(50) = 652.06 - 600 = \$52.06.$$

EJEMPLO 10

Se depositan \$50 *al principio de cada trimestre en una cuenta de ahorros que paga el* 6% *compuesto trimestralmente. Determinar el saldo de la cuenta al final de* 3 *años.*

Puesto que los depósitos se realizan al principio de los periodos de pago, se desea el monto de una *anualidad anticipada*, tal como se definió en el Ejemplo 8 (véase la Figura 7.7). Se puede pensar la anualidad dada como una anualidad vencida de \$50 durante trece periodos, menos el pago final de \$50. Por ello, el monto es

$$50s_{\overline{13}|0.015} - 50 \approx 50(14.236830) - 50 \approx \$661.84.$$

La fórmula para el **valor futuro de una anualidad anticipada** es, $S = Rs_{\overline{n+1}|r} - R$ o bien

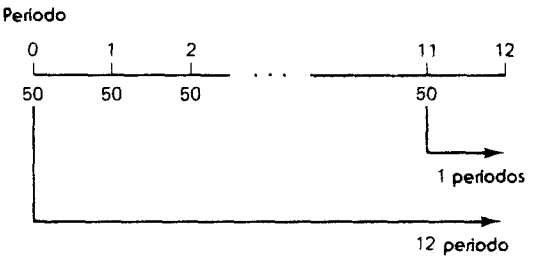


FIGURA 7.7

$$S = R(s_{\overline{n+1}|r} - 1).$$

EJEMPLO 11

Un ***fondo de amortización*** *es un fondo en el que se acumulan pagos periódicos con el objeto de satisfacer una obligación futura. Supóngase que una máquina que cuesta* \$7000 *(dólares) se va a reemplazar al final de* 8 *años, en cuyo momento tendrá un valor de desecho de* \$700. *Se forma un fondo de amortización con el objeto de tener dinero en ese momento para comprar una máquina nueva que cuesta la misma cantidad. El monto del fondo en ese tiempo será la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de desecho. Si se depositan pagos iguales en el fondo al final de cada trimestre y el fondo gana* 8% *compuesto trimestralmente, ¿de cuánto debe ser cada pago?*

La cantidad que se necesita después de 8 años es $7000 - 700 = \$6300$. Sea R el pago trimestral. Los pagos que se hacen al fondo de amortización forman una anualidad con $n = 4(8) = 32$, $r = 0.08/4 = 0.02$ y $S = 6300$. Por lo tanto, en la Ecuación (8) se tiene

$$6300 = Rs_{\overline{32}|0.02},$$

$$R = \frac{6300}{s_{\overline{32}|0.02}} \approx \frac{6300}{44.227030} \approx \$142.45.$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|r}}$$

arroja el pago periódico R de una anualidad, con montos de S.

EJEMPLO 12

Una empresa arrendadora estima que si se adquiere una cierta máquina producirá un rendimiento neto anual de \$1000 *durante* 6 *años, después de los cuales la máquina carecería de valor. ¿Cuánto debe pagar la empresa por esa máquina si desea obtener el* 7%

de rendimiento sobre su inversión y desea también formar un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra? Supóngase para el fondo pagos anuales y una tasa del 5% compuesto anualmente.

Sea x el precio de compra. Cada año el rendimiento sobre la inversión es $0.07x$. Puesto que la máquina produce un rendimiento de \$1000 al año, la cantidad que puede colocarse en el fondo cada año es $1000 - 0.07x$. Estos pagos deben acumularse hasta por x. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(1000 - 0.07x)s_{\overline{6}|0.05} &= x, \\
1000s_{\overline{6}|0.05} - 0.07xs_{\overline{6}|0.05} &= x, \\
1000s_{\overline{6}|0.05} &= x(1 + 0.07s_{\overline{6}|0.05}), \\
\frac{1000s_{\overline{6}|0.05}}{1 + 0.07s_{\overline{6}|0.05}} &= x, \\
x &\approx \frac{1000(6.801913)}{1 + 0.07(6.801913)} \\
&\approx \$4607.92.
\end{aligned}$$

Enseguida se presenta otra forma de plantear el problema. Cada año, los \$1000 deben proporcionar un rendimiento de $0.07x$ y tambien un pago de $\frac{x}{s_{\overline{6}|0.05}}$ para el fondo de amortización. Por consiguiente, $1000 = 0.07x + \frac{x}{s_{\overline{6}|0.05}}$, arroja el mismo resultado al ser resuelto.

EJERCICIOS 7.3

En los Problemas **1-4**, *escriba la sucesión geométrica que satisface las condiciones dadas. Simplificar los términos.*

1. $a = 64, r = \frac{1}{2}, n = 5.$

2. $a = 2, r = -3, n = 4.$

3. $a = 100, r = 1.02, n = 3.$

4. $a = 81, r = 3^{-1}, n = 4.$

En los Problemas **5-8**, *determine la suma de la serie geométrica dada utilizando la Ecuación (4) de esta sección.*

5. $\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \cdots + (\frac{2}{3})^5.$

6. $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^5.$

7. $1 + 0.1 + (0.1)^2 + \cdots + (0.1)^5.$

8. $(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + \cdots + (1.1)^{-6}.$

En los Problemas **9-12**, *utilice el Apéndice D y calcule el valor de la expresión dada.*

9. $a_{\overline{35}|0.04}.$ **10.** $a_{\overline{15}|0.07}.$ **11.** $s_{\overline{8}|0.0075}.$ **12.** $s_{\overline{12}|0.005}.$

En los Problemas **13-16**, *halle el valor actual de la anualidad vencida dada.*

13. \$500 anuales durante 5 años, al 7% compuesto anualmente.

14. \$1000 cada 6 meses durante 4 años, al 10% compuesto semestralmente.

15. \$2000 al trimestre, durante $4\frac{1}{2}$ años, al 8% compuesto trimestralmente.

16. \$1500 mensuales durante 15 meses, al 9% compuesto mensualmente.

En los Problemas **17** *y* **18**, *obtenga el valor actual de la anualidad anticipada que se plantea.*

17. $800 pagaderos al principio de cada periodo de 6 meses, durante 6 años, al 7% compuesto semestralmente.

18. $100 pagaderos al principio de cada trimestre, durante 5 años, al 6% compuesto trimestralmente.

En los Problemas **19-22**, *determine el valor futuro de la anualidad vencida dada.*

19. $2000 mensuales durante 3 años al 15% compuesto mensualmente.

20. $600 trimestrales durante 4 años al 8% compuesto trimestralmente.

21. $5000 anuales durante 20 años al 7% compuesto anualmente.

22. $2000 cada 6 meses durante 10 años, al 6% compuesto semestralmente.

En los Problemas **23** *y* **24**, *encontrar el valor futuro de la anualidad anticipada dada.*

23. $1200 anuales durante 12 años al 8% compuesto anualmente.

24. $500 trimestrales durante $5\frac{3}{4}$ años al 5% compuesto trimestralmente.

25. Para una tasa de interés del 6% compuesto mensualmente, halle el valor actual de una anualidad de $50 al final de cada mes, durante 6 meses y $75 a partir de aquí al final de cada mes, durante 2 años.

26. Una compañía desea alquilar en forma temporal espacio de oficinas por un periodo de seis meses. La renta es de $500 mensuales, pagaderos por anticipado. Supóngase que la compañía desea hacer un solo pago, al principio del periodo de la renta, para cubrir la totalidad de ésta durante el periodo de 6 meses. Si el dinero vale 9% compuesto mensualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?

27. Una anualidad formada por pagos iguales al final de cada trimestre durante 3 años se va a adquirir en $5000. Si la tasa de interés es del 6% compuesto trimestralmente, ¿de cuánto es cada pago?

28. Se compra una máquina con $3000 de enganche y abonos de $250 al final de cada 6 meses, durante 6 años. Si el interés es del 8% compuesto semestralmente, obtenga el precio correspondiente en efectivo para la máquina.

29. Supóngase que se colocan $50 en una cuenta de ahorros, al final de cada mes, durante 4 años. Si no se hacen más depósitos, (a) ¿cuánto dinero hay en la cuenta después de 6 años y (b) ¿qué tanto de esa cantidad corresponde a intereses compuestos? Supóngase que la cuenta de ahorros paga el 6% compuesto mensualmente.

30. El beneficiario de una póliza de seguros tiene la opción de recibir un pago único de $35,000 o bien 10 pagos anuales iguales, venciendo el primero de ellos en este momento. Si el interés es del 4% compuesto anualmente, determine el pago anual.

31. Dentro de 10 años, una máquina que ahora cuesta $40,000 (dólares) tendrá un valor de desecho de $4000. Se espera que en ese tiempo, una máquina nueva cueste $52,000. Con el objeto de contar con fondos para pagar la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de desecho, se forma un fondo de amortización en el que se colocan pagos iguales al final de cada año. Si el fondo gana el 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto debe ser cada pago?

32. Una compañía papelera está considerando adquirir un bosque que estima que producirá un rendimiento anual de $50,000 durante 10 años, después de los cuales el bosque carecerá de valor. La compañía desea obtener el 8% de rendimiento sobre su inversión y también desea acumular un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra. Si se coloca dinero en el fondo al final de cada año y se gana el 6% compuesto anualmente, encontrar el precio que la compañía debe pagar por el bosque. Proporciónese la respuesta hasta el centenar de dólares más cercano.

33. Con el objeto de reemplazar una máquina en el futuro, una compañía va a colocar pagos iguales en un fondo de amortización al final de cada año, de manera que dentro de 10 años el monto del fondo sea de $25,000. El fondo gana el 6% compuesto anualmente. Después de 6 años la tasa de interés aumenta de manera que el fondo paga el 7% compuesto anualmente. Debido a la mayor tasa de interés, la compañía disminuye el valor de los pagos

restantes. Halle este valor para los nuevos pagos. Proporciónese la respuesta hasta el dólar más cercano.

34. A le debe a B la cantidad de \$5000 y acuerda pagarle \$1000 al final de cada uno de los siguientes 5 años y un último pago al término del sexto año. ¿De cuánto debe ser el pago final si el interés es de 8% compuesto anualmente?

En los Problemas **35-41**, *utilizar las siguientes fórmulas.*

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r},$$

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r},$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{Ar}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{Ar(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1},$$

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|r}} = \frac{Sr}{(1 + r)^n - 1}.$$

35. Evalúe $s_{\overline{60}|0.017}$ con cinco cifras decimales.

36. Determine $a_{\overline{10}|0.073}$ con cinco cifras decimales.

37. Evalúe $700a_{\overline{360}|0.0125}$ con dos cifras decimales.

38. Evalúe $1000s_{\overline{120}|0.01}$ con dos cifras decimales.

39. Se van a depositar pagos iguales en una cuenta de ahorro al final de cada trimestre durante 5 años, para que al final de ese tiempo haya \$3000. Si el interés es del $5\frac{1}{2}\%$ compuesto trimestralmente, determinar el pago trimestral.

40. Supóngase que se utiliza el producto de un seguro (\$25,000) para adquirir una anualidad de pagos iguales al final de cada mes, durante 5 años. Si la tasa de interés es del 10% compuesto mensualmente, encontrar el valor de cada pago.

41. Una persona gana la lotería estatal, con valor de \$1,000,000 y va a recibir un cheque por \$50,000 en este momento y uno similar durante cada año en los próximos 19 años. Para realizar los 20 pagos, la Comisión Estatal de Lotería adquiere una anualidad anticipada con tasa de interés del 12% compuesto anualmente. ¿Cuánto le cuesta a la Comisión la anualidad?

42. Supóngase que un empleado de una compañía está por retirarse y tiene oportunidad de elegir entre dos opciones según el plan de pensiones de la empresa. La opción A consiste en un pago de \$450 (dólares), garantizado, al final de cada mes, durante 10 años. Por otro lado, mediante la opción B el empleado recibe un solo pago igual al valor actual de los pagos descritos en la opción A.
a. Calcule la suma de los pagos de la opción A.
b. Calcule el pago único, correspondiente a la opción B, si se decide utilizar una tasa de interés de 6% capitalizable mensualmente. Redondee su respuesta a valores enteros de dólar.

7.4 Amortización de créditos

Supóngase que un banco le hace un préstamo por \$1,500 (dólares). Esta cantidad, más los intereses, debe cubrirse mediante pagos iguales de valor R al final de cada mes, durante tres meses. Además, supóngase que el banco cobra interés a una tasa nominal del 12% compuesto mensualmente. En esencia, el banco está comprando en \$1,500 una anualidad de tres pagos de importe R cada uno. Utilizando la fórmula del Ejemplo 7 de la sección precedente se ve que el pago mensual R está dado por

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{1500}{a_{\overline{3}|0.01}} \approx \frac{1500}{2.940985} \approx \$510.03.$$

El banco puede considerar que cada pago consta de dos partes: (1) el interés sobre el saldo insoluto y (2) el pago de parte del préstamo. A esto se le denomina **amortizar**. Se **amortiza** un crédito cuando parte de cada pago se utiliza para cubrir intereses y la parte restante se emplea para reducir el capital insoluto. Dado que cada pago reduce

TABLA 7.1
Tabla de amortización

Periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	$1500	$15	$ 510.03	$ 495.03
2	1004.97	10.05	510.03	499.98
3	504.99	5.05	510.03	504.98
Total		30.10	1530.09	1499.99

el capital insoluto, la porción de intereses de cada pago disminuye conforme avanza el tiempo. Enseguida se analiza el crédito que se describió antes.

Al final del primer mes, se pagan $510.03. El interés a pagar sobre el capital insoluto es 0.01 (1500) = $15. El saldo del pago, 510.03 − 15 = $495.03, se aplica después a reducir el capital. Así, el capital insoluto ahora es 1500 − 495.03 = $1004.97. Al final del segundo mes, el interés es 0.01(1004.97) ≈ $10.05. Por ello, la cantidad pagada del crédito es 510.03 − 10.05 = $499.98 y el saldo insoluto es 1004.97 − 499.98 = $504.99. El interés que debe pagarse al final del tercer y último mes es 0.01(504.99) ≈ $5.05, por lo que la cantidad que se paga del crédito es 510.03 − 5.05 = $504.98. Por lo tanto, el saldo insoluto es 504.99 − 504.98 = $0.01. En realidad, la deuda debe de estar pagada en este momento y el saldo de $0.01 se debe al redondeo. Con frecuencia, los bancos cambian el valor del último pago para compensar estas discrepancias. En el caso anterior, el pago final sería de $510.04. En las tablas a las que se denomina **tablas de amortización** se puede presentar el análisis de la forma en que se maneja cada uno de los pagos de un crédito (véase la Tabla 7.1). A los intereses totales que se pagan ($30.10 en este caso) se les denomina con frecuencia **cargo financiero**. Como se comentó antes, el total de las entradas de la última columna serían iguales al capital original, a no ser por los errores de redondeo.

Cuando se está amortizando un crédito, al principio de cualquier periodo el capital insoluto es el valor actual de los pagos restantes. Utilizando este hecho, junto con el análisis anterior, se obtienen las fórmulas que se listan en la Tabla 7.2 y que describen la amortización de un crédito de valor A, que cobra intereses a razón de r por periodo, y que se liquida mediante n pagos iguales de valor R cada uno, y de manera que

TABLA 7.2
Fórmulas de Amortización

1. Pago periódico: $R = \dfrac{A}{a_{\overline{n}|r}} = A\dfrac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$
2. Capital insoluto al principio del k-ésimo periodo:
$$Ra_{\overline{n-k+1}|r} = R\frac{1 - (1 + r)^{-n+k-1}}{r}$$
3. Interés en el k-ésimo pago: $Rra_{\overline{n-k+1}|r}$
4. Capital contenido en el k-ésimo pago: $R[1 - ra_{\overline{n-k+1}|r}]$
5. Total de intereses pagados: $R(n - a_{\overline{n}|r})$ o bien $nR - A$

los pagos se hacen al final de cada periodo. Obsérvese en lo que sigue que la fórmula para el pago periódico R implica $a_{\overline{n}|r}$, lo cual, como debe recordarse se define como $[1 - (1 + r)^{-n}]/r$.

EJEMPLO 1

Una persona amortiza un crédito de \$30,000 *que obtuvo para una casa nueva, mediante una hipoteca a* 20 *años a una tasa del* 9% *compuesto mensualmente. Determinar (a) el pago mensual, (b) los cargos totales por interés y (c) el capital insoluto después de* 5 *años.*

a. El número de periodos de pago es $n = 12(20) = 240$, la tasa de interés por periodo es $r = 0.09/12 = 0.0075$ y $A = 30{,}000$. De la Fórmula 1 de la Tabla 7.2, el pago mensual R es $30{,}000/a_{\overline{240}|0.0075}$. Puesto que a $a_{\overline{240}|0.0075}$ no aparece en el Apéndice D, se utiliza la siguiente fórmula equivalente y una calculadora.

$$R = 30{,}000\left[\frac{0.0075}{1 - (1.0075)^{-240}}\right]$$
$$\approx 30{,}000\left[\frac{0.0075}{1 - (0.166413)}\right]$$
$$\approx \$269.92.$$

b. De la Fórmula 5 se tiene que el cargo total por interés es

$$240(269.92) - 30{,}000 = 64{,}780.80 - 30{,}000$$
$$= \$34{,}780.80.$$

Esto es superior al préstamo mismo.

c. Después de 5 años, se está al comienzo periodo 61. Utilizando la Fórmula 2, con $n - k + 1 = 240 - 61 + 1 = 180$, se ve que el capital insoluto es

$$269.92\left[\frac{1 - (1.0075)^{-180}}{0.0075}\right] \approx \$26{,}612.33.$$

En una época, un tipo muy común de préstamo pagadero en plazos implicaba el "método global" para calcular el cargo financiero. Con este método, el cargo financiero se encuentra aplicando una tasa anual nominal de interés (bajo interés simple, es decir, no a interés compuesto) a la cantidad obtenida como préstamo. Después, este cargo se suma al capital y el total se divide entre el número de *meses* de crédito para determinar el pago mensual. En los préstamos de este tipo, el deudor no puede darse cuenta en forma inmediata de que la tasa anual verdadera es considerablemente superior a la tasa nominal, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2

Se obtiene un préstamo de \$1,000 *durante un año, al* 9% *de interés, con el método de suma. Estimar la verdadera tasa anual de interés si se supone composición mensual.*

El cargo financiero por \$1000 al 9% de interés simple durante 1 año es 0.09(1000) = \$90. Sumando esto al préstamo, se obtiene 1000 + 90 = 1090. Por consiguiente, el pago mensual es de 1090/12 ≈ \$90.83. De esta manera, se tiene un préstamo de \$1000 con 12 pagos iguales de \$90.83. Con la Fórmula 1, de la Tabla 7.2, se tiene que

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}}, \quad 90.83 = \frac{1000}{a_{\overline{12}|r}},$$

$$a_{\overline{12}|r} = \frac{1000}{90.83} \approx 11.009578.$$

Calcular $a_{\overline{12}|r} = 11.009578$ para evaluar la tasa mensual r no es tan sencillo. Para hacerlo, se examina el Apéndice D, en los renglones que corresponden a $n = 12$ y se halla que el valor 11.009578 queda entre los registros $a_{\overline{12}|0.0125} = 11.079312$ y $a_{\overline{12}|0.015} = 10.907505$. En consecuencia, r queda entre 0.0125 y 0.015, que corresponden a tasas anuales de 12(0.0125) = 0.15 y 12(0.015) = 0.18. Consecuentemente, la verdadera tasa anual está entre 15 y 18% (y es en realidad 16.22%). Ciertos reglamentos referentes a leyes que se ocupan de los créditos han hecho que los préstamos de suma resulten virtualmente absoletos.

La fórmula de la anualidad

$$A = R\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

puede despejarse para encontrar n que representa el número de periodos de un préstamo. Multiplicando ambos miembros por $\frac{r}{R}$, se obtiene

$$\frac{Ar}{R} = 1 - (1 + r)^{-n},$$

$$(1 + r)^{-n} = 1 - \frac{Ar}{R} = \frac{R - Ar}{R},$$

$$-n \ln(1 + r) = \ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right) \qquad \text{(tomando logaritmos en ambos miembros),}$$

$$n = -\frac{\ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right)}{\ln(1 + r)}.$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, se elimina el signo de menos invirtiendo el cociente en el numerador.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - Ar}\right)}{\ln(1 + r)}. \qquad (1)$$

EJEMPLO 3

Una persona adquiere un equipo estereofónico en \$1500 *(dólares) y acuerda pagarlo mediante pagos mensuales iguales de* \$75. *Si la tienda cobra intereses a razón del* 12% *compuesto mensualmente, ¿cuántos meses se requerirán para pagar la deuda?*

De la Ecuación (1),

$$n = \frac{\ln\left[\dfrac{75}{75 - 1500(0.01)}\right]}{\ln(1.01)}$$

$$= \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.01)} \approx \frac{0.22314}{0.00995} \approx 22.4 \text{ meses.}$$

En realidad, habrá 23 pagos; sin embargo, el pago final será inferior a \$75.

EJERCICIOS 7.4

1. Una persona obtiene un crédito de \$2000 en un banco y acuerda liquidarlo mediante pagos iguales al final de cada mes durante 3 años. Si el interés es del 15% compuesto mensualmente, ¿de cuánto es cada pago?

2. Una persona desea obtener un préstamo a tres años y puede hacer pagos de \$50 al final de cada mes. Si el interés es del 12% compuesto mensualmente, ¿cuánto es lo que la persona puede obtener a crédito?

3. Determine el cargo financiero que se haría sobre un préstamo de \$8000, a 36 meses, para comprar un automóvil, si se hacen pagos mensuales y la tasa de interés es del 12% compuesto mensualmente.

4. Para un préstamo de un año de \$500 y tasa de 15% compuesto mensualmente, evalúe (a) el pago mensual y (b) el cargo financiero.

5. Una persona va a amortizar un préstamo de \$7500 que obtuvo para adquirir un automóvil, con una tasa de interés del 12% compuesto mensualmente. Si el plazo es de 36 meses, encontrar (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer mes y (c) el capital cubierto en el primer pago.

6. Una persona está amortizando un préstamo a 48 meses de \$10,000 para la compra de un terreno habitacional. Si el interés es a razón del 9% compuesto mensualmente calcule (a) el pago mensual, (b) el interés contenido en el primer pago y (c) el capital cubierto en ese primer pago.

En los Problemas **7-10,** *construir una tabla de amortización para las deudas planteadas.*

7. \$5000 que se liquidan mediante 4 pagos anuales iguales, con interés del 7% compuesto anualmente.

8. \$8,000 que se liquidan mediante 6 pagos semestrales iguales, con interés del 8% compuesto semestralmente.

9. \$900 que se liquidan mediante 5 pagos trimestrales iguales, con interés del 10% compuesto trimestralmente.

10. \$10,000 que se liquidan mediante 5 pagos mensuales iguales, con intereses al 9% compuesto mensualmente.

11. Un crédito de \$1000 se está pagando mediante abonos trimestrales de \$100. Si el interés es del 8% compuesto trimestralmente, ¿cuántos pagos *completos* se harán?

12. Se está amortizando en 48 meses un préstamo de \$2000 con tasa de interés del 12% compuesto mensualmente. Determine:
a. el pago mensual;
b. el capital insoluto al principio del 36° mes;
c. el interés en el 36° pago;
d. el capital en el 36° pago;
e. el interés total que se paga.

13. Se está pagando una deuda de \$10,000 (dólares) mediante 10 abonos semestrales iguales, siendo el primer pago dentro de 6 meses. El interés es a razón del 8% compuesto semestralmente. Sin embar-

go, después de 2 años, la tasa de interés aumenta al 10% compuesto semestralmente. Si la deuda se debe pagar en la fecha originalmente acordada, encontrar el nuevo pago anual. Proporcionar la respuesta hasta el dólar más cercano.

14. Una persona obtiene $2000 y los va a pagar mediante pagos iguales al final de cada mes durante 5 años. Si el interés es a razón del 16.8% compuesto mensualmente, ¿de cuánto debe ser cada pago?

15. Se obtiene una hipoteca de $45,000 durante 25 años para una casa nueva, con el 10.2% compuesto mensualmente. Calcule (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer pago, (c) el capital pagado en el primer abono y (d) el cargo financiero.

16. Un préstamo de $8,500 para la compra de un automóvil se va a amortizar en 48 meses con tasa de interés de 13.2% compuesto mensualmente. Halle (a) el pago mensual y (b) el cargo financiero.

17. Una persona adquiere muebles por $2000 y acuerda pagar esa cantidad mediante abonos mensuales de $100. Si el interés se cobra a razón de 18% compuesto mensualmente, ¿cuántos pagos *completos* habrá?

18. Obtenga el pago mensual de un préstamo de $7000 a 5 años si la tasa de interés es el 12.12% compuesto mensualmente.

19. Un matrimonio desea comprar una casa nueva y considera que pueden hacer pagos de hipoteca por $600 al mes. Pueden obtener una hipoteca a 30 años con el 12.6% compuesto mensualmente, pero deben pagar un enganche del 25% del costo de la casa. Suponiendo que tienen ahorros suficientes para pagar el enganche, ¿cuál es el valor máximo que pueden pagar por una casa? Proporciónese la respuesta al dólar más cercano.

20. Supóngase que se puede elegir entre obtener una hipoteca de $80,000 al 12% compuesto mensualmente durante 15 años, o hacerlo a 30 años. ¿Cuánto se ahorra en términos del cargo financiero si se elige la hipoteca a 15 años?

21. En un préstamo de $25,000 a 5 años, ¿de cuánto menos sería el pago mensual si el préstamo fuera al 12% compuesto mensualmente, en vez de serlo al 15% compuesto mensualmente?

7.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 7.1 tasa efectiva

Sección 7.2 valor actual (o presente) valor futuro ecuación de valores equivalentes flujos de efectivo valor actual neto

Sección 7.3 sucesión (o progresión) geométrica serie geométrica razón común anualidad anualidad vencida anualidad anticipada valor actual de una anualidad, $a_{\overline{n}|r}$ monto de una anualidad, $s_{\overline{n}|r}$

Sección 7.4 amortización tabla de amortización cargo financiero

RESUMEN

El concepto del interés compuesto es la base de cualquier análisis que se refiera al valor del dinero en el tiempo; es decir, el valor actual del dinero que vence en el futuro o el valor futuro del dinero que se invierte en el presente. En el interés compuesto, el interés se convierte en capital y también gana interés. Las fórmulas básicas del interés compuesto son:

$$S = P(1 + r)^n \quad \text{(valor futuro)},$$

$$P = S(1 + r)^{-n} \quad \text{(valor actual)},$$

en donde S = monto compuesto (valor futuro),

P = capital (valor actual),

r = tasa por periodo,

n = número de periodos de conversión.

Por lo general, las tasa de interés se plantean como tasas anuales a las que se denomina tasas nominales. La tasa por periodo se obtiene dividiendo la tasa nominal entre el número de periodos de conversión por año. La tasa efectiva es la tasa de interés anual simple que es equivalente a una tasa nominal de r compuesta n veces al año, y está dada por

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \qquad \text{(tasa efectiva)}.$$

Las tasas efectivas se utilizan para comparar diferentes tasas de interés.

Una anualidad es una sucesión de pagos realizados en periodos fijos de tiempo durante cierto intervalo de tiempo. La base matemática de las fórmulas que se refieren a las anualidades es la noción de la suma de una serie geométrica:

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{(suma de una serie geométrica)},$$

en donde s = suma,
a = primer término,
r = razón común,
n = número de términos.

Una anualidad ordinaria o vencida es la que se cubre al *final* del periodo de pago, en tanto que las anualidades anticipadas son las que se cubren al *principio* de los periodos. Las fórmulas básicas para el manejo de anualidades vencidas son:

$$A = R\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor actual)},$$

$$S = R\frac{(1 + r)^n - 1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor futuro)},$$

en donde A = valor actual de la anualidad,
S = monto (valor futuro) de la anualidad,
R = valor de cada pago,
n = número de periodos de pago,
r = tasa por periodo,

Para las anualidades anticipadas, las fórmulas correspondientes son:

$$A = R(1 + a_{\overline{n-1}|r}) \qquad \text{(valor actual)},$$

$$S = R(s_{\overline{n+1}|r} - 1) \qquad \text{(valor futuro)}.$$

Un préstamo, tal como una hipoteca, se amortiza cuando parte de los pagos periódicos se utilizan para pagar intereses y la parte restante se utiliza para reducir el capital. En las tablas de amortización se presentan análisis completos de cada pago. Las siguientes fórmulas se utilizan para manejar amortización de créditos de valor A, con tasa por periodo r, mediante n pagos iguales de importe R cada uno, y de manera que los pagos se hacen al final de cada periodo.

Pago por periodo: $R = \dfrac{A}{a_{\overline{n}|r}} = A\dfrac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$.

Capital insoluto al principio del k-ésimo periodo:

$$Ra_{\overline{n-k+1}|r} = R\frac{1 - (1 + r)^{-n+k-1}}{r}.$$

Interés en el k-ésimo pago: $Rra_{\overline{n-k+1}|r}$.

Capital contenido en el k-ésimo pago: $R[1 - ra_{\overline{n-k+1}|r}]$.
Intereses totales pagados: $R(n - a_{\overline{n}|r})$ o bien $nR - A$.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Determine la suma de la siguiente serie geométrica

$$2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \cdots + 2(\tfrac{1}{4})^5.$$

2. Obtenga la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal del 6% compuesto trimestralmente.

3. Un inversionista puede invertir una suma de dinero al 8.5% compuesto anualmente o al 8.2% compuesto semestralmente. ¿Cuál de las dos alternativas es mejor?

4. Halle el valor actual neto de los siguientes flujos de efectivo, que pueden adquirirse mediante una inversión inicial de $7000. Supóngase que el interés es del 7% compuesto semestralmente.

Año	Flujo de efectivo
2	$3400
4	3500

5. Una deuda de $1200 vence a los 4 años y otra de $1000 vence a los 6 años. Si se van a pagar mediante un abono de $1000 en estos momentos y un segundo pago al final de dos años, ¿de cuanto debe ser el segundo pago si el interés es del 8% compuesto semestralmente?

6. Halle el valor actual de una anualidad de $250 al final de cada mes durante 4 años, si el interés es del 6% compuesto mensualmente.

7. Para una anualidad de $200 al final de cada 6 meses durante $6\frac{1}{2}$ años, obtenga (a) el valor actual y (b) el valor futuro a una tasa del 8% compuesto semestralmente.

8. Determinar el monto de una anualidad anticipada que consta de 10 pagos anuales de $100 suponiendo una tasa de interés del 6% compuesto anualmente.

9. Supóngase que se colocan inicialmente $100 en una cuenta de ahorros y que se depositan $100 al final de cada 6 meses durante los siguientes 4 años. Si el interés es del 7% compuesto semestralmente, ¿cuánto hay en la cuenta al final de cuatro años?

10. Una cuenta de ahorros paga intereses a razón del 5% compuesto semestralmente. ¿Qué cantidad se debe depositar ahora para que se puedan retirar $250 al final de cada 6 meses durante los próximos 10 años?

11. Una compañía obtiene $5000 a crédito sobre los cuales debe pagar intereses al final de cada año a razón del 11% anual. Además, se forma un fondo de amortización para que sea posible pagar el crédito al final de 5 años. Se colocan pagos iguales en el fondo al final de cada año, y el fondo obtiene interés a una tasa efectiva del 6%. Encontrar el pago anual que se debe colocar en el *fondo de amortización*.

12. Un deudor debe amortizar un préstamo de $7000 que obtuvo para la compra de un automóvil, haciendo pagos iguales al final de cada mes durante 36 meses. Si el interés es del 12% compuesto mensualmente, halle (a) el valor de cada pago y (b) el cargo financiero.

13. Una persona adeuda $500 que ha de pagar en tres años con interés del 5% compuesto anualmente y $500 que vence en 4 años con interés del 6% compuesto semestralmente. El deudor desea saldar ambos préstamos haciendo dos abonos. El primero ahora y el segundo, que deberá ser del doble del primero, al final del tercer año. Si el dinero vale 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto es el primer pago?

14. Elabore una tabla de amortización para un préstamo de $2000 que se cubrirá mediante tres pagos mensuales con interés al 12% compuesto mensualmente.

15. Elabore una tabla de amortización para un crédito de $15,000 que se cubrirá mediante 5 pagos mensuales, con interés del 9% compuesto mensualmente.

16. Obtenga el valor actual de una anualidad vencida de $540 durante cada mes en 7 años, a la tasa del 10% compuesto mensualmente.

17. Determine el cargo financiero para un préstamo a 48 meses para la compra de un automóvil, de $11,000 con pagos mensuales a razón del 13.5% compuesto mensualmente.

APLICACIÓN PRÁCTICA

La regla de los 78*

Si se consigue un préstamo y se decide pagarlo en su totalidad antes del vencimiento del último pago, seguramente se esperaría que el prestador o prestamista reembolse o acredite una porción del cargo financiero total. Un método contable que el acreedor puede utilizar para determinar esa rebaja se conoce como "regla de los 78", o método de la "suma de dígitos". Básicamente, este método exige pagar gran parte del cargo financiero total al principio del periodo del crédito, siendo el razonamiento que se dispone de más dinero al principio del periodo que al final.

Para ilustrar esto, supóngase que se obtiene un préstamo a saldar con 12 pagos mensuales iguales. De acuerdo con la regla de los 78, se suman los dígitos del 1 al 12 (porque el número de meses en el periodo del préstamo es 12). Esto da como resultado

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$$

(de aquí el "78" en el nombre de la regla). En el primer mes se utiliza el 12/12 del dinero prestado, por lo que la regla permite al acreedor tomar 12/78 del cargo financiero total como la porción de interés del primer pago. En el segundo mes se considera que se utiliza 11/12 del dinero, por lo que el acreedor tiene derecho al 11/78 del cargo financiero. En el tercer mes, el acreedor obtiene el 10/78 del cargo, y así sucesivamente. Así, la regla de los 78 es una forma de asignar el cargo financiero total, sobre una base mensual.

Por ejemplo, supóngase que se va a liquidar el préstamo a la mitad de su periodo (a los 6 meses). Para determinar la rebaja sobre los intereses, se encuentra que la fracción del cargo financiero total que ya se ha pagado es

$$\frac{12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7}{78} = \frac{57}{78}$$

Así, la rebaja es $21/78 \approx 26.9\%$ del cargo financiero total.

* Adaptado de Alonzo F. Johnson, "The Rule of 78: A Rule That Outlived Its Useful Life, "*The Mathematics Teacher*, 81 (Septiembre 1988), 450-53. Con autorización de National Council of Teachers of Mathematics.

TABLA 7.3

Método actuarial para un crédito de $3,000, a tres meses, al 11.96% anual

MES	CANTIDAD QUE SE DEBE AL PRINCIPIO DEL MES	INTERÉS CARGADO AL FINAL DEL MES	PAGO AL FINAL DEL MES	CAPITAL QUE SE PAGA AL FINAL DEL MES
1	$3000.00	$29.90	$1020	$ 990.10
2	2009.90	20.03	1020	999.97
3	1009.93	10.07	1020	1009.93
Total		60.00	3060	3000.00

La regla de los 78 se aplica no sólo a los préstamos a 12 meses. En general, la regla establece que, para un préstamo con n pagos mensuales iguales, la porción del interés total que gana el acreedor durante el k-ésimo mes es:

$$\frac{n - k + 1}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}.$$

Como ejemplo específico, supóngase que se acude a un banco y que se obtiene un préstamo de $3,000 (dólares), a un plazo de 3 meses con tasa anual de 11.96%. De la fórmula de las anualidades (véase la Secc. 7.4).

$$R = A \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}, \tag{1}$$

con $A = 3000$, $r = 01196/12 \approx 0.0099667$, y $n = 3$, el pago mensual, R, es $1020. En la Tabla 7.3 se presenta el correspondiente programa de amortización, en el que —como se sabe— el interés se calcula sobre el saldo insoluto. Por ejemplo, el cargo por interés es, para el primer mes, $29.90. Es decir,

$$3000(0.0099667) = \$29.90.$$

A este modo de amortizar un préstamo se le conoce como *método actuarial*. Obsérvese que el cargo total por interés es de $60.

Ahora supóngase que se desea pagar el préstamo después de un mes. En este caso, además del pago mensual, la cantidad correcta del pago total, con base en el método actuarial, es $2.009.90. Es decir,

$$3000 - (1020 - 29.90) = \$2009.90.$$

Pero si, por otro lado, el banco utiliza la regla de los 78, ¿cuál es el pago que salda la deuda? Se procede a elaborar la correspondiente tabla de amortización para ver cómo se maneja el cargo total de interés de $60. Como se tiene un préstamo a 3 meses, se deben sumar los enteros del 1 al 3: $1 + 2 + 3 = 6$. Así, al final del primer mes, el banco tiene derecho a 3/6 de los $60, o $30 (que se restan del pago). Al final del segundo mes, el banco gana $2/6 \cdot 60 = \$20$, y así sucesivamente. Se muestra esto en la Tabla 7.4. Este programa muestra que el pago que salda totalmente la deuda después de un mes es

$$3000 - (1020 - 30) = \$2010.$$

que es $0.10 mayor que el pago calculado con el método actuarial. Nótese también que la diferencia en las asignaciones de interés entre los dos métodos al final de los meses segundo y tercero es de sólo $0.03 y $0.07, respectivamente. Es cierto que, para este caso, la regla de los 78 da una estimación razonable de las asignaciones de interés con el método actuarial. De hecho, esta regla puede dar

TABLA 7.4

Regla de los 78 para un préstamo de $3,000, a tres meses, con interés total de $60

MES	CANTIDAD QUE SE DEBE AL PRINCIPIO DEL MES	INTERÉS CARGADO AL FINAL DEL MES	PAGO AL FINAL DEL MES	CAPITAL QUE SE PAGA AL FINAL DEL MES
1	$3000	$30	$1020	$ 990
2	2010	20	1020	1000
3	1010	10	1020	1010
Total		60.00	3060	3000

estimaciones razonables para otros préstamos a corto plazo (por supuesto, el término "razonable" es subjetivo).

Sin embargo, en algunas situaciones la tasa de interés y la duración o vigencia del préstamo pueden ser tales que asignar el interés mediante la regla de los 78 ¡puede dar como resultado un cargo por interés que es mayor que el pago mensual mismo! Por ejemplo, supóngase que se obtiene un préstamo para mejoramiento inmobiliario de $15,000, con pagos mensuales durante 15 años (180 meses) a una tasa nominal o anual de 15%. Utilizando la Ecuación (1) se encuentra que el pago mensual es de $209.94. Durante el plazo de este préstamo, el cargo total por interés es de

$$180(209.94) - 15,000 = \$22,789,20.$$

De acuerdo con la regla de los 78, el interés que se carga en el primer mes es

$$\frac{180}{1 + 2 + \ldots + 180}(22,789.20) = \$251.81,$$

que es superior al pago en $41.87 (y que corresponde a una tasa anual de 20.14%)*. Así, la cantidad necesaria para saldar totalmente el adeudo después de un mes es

$$15,000 - (200.94 - 251.81) = \$15,041.87,$$

que es superior al monto del adeudo. El principio de la tabla de amortización tiene una cantidad negativa, como se muestra en la Tabla 7.5. Por otro lado, al final de un mes, el cargo correcto por interés es, calculado mediante el método actuarial.

$$15,000\left(\frac{0.15}{12}\right) = \$187.50$$

TABLA 7.5

Regla de los 78 para un préstamo de $15,000, a 180 meses, al 15% anual

MES	CANTIDAD QUE SE DEBE AL PRINCIPIO DEL MES	INTERÉS CARGADO AL FINAL DEL MES	PAGO AL FINAL DEL MES	CAPITAL QUE SE PAGA AL FINAL DEL MES
1	$15,000	$251.81	$209.94	−$41.87

* Aquí se usa el hecho de que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Por lo tanto $1 + 2 + \ldots + 180 = \frac{180(181)}{2} = 16,290$

TABLA 7.6

Mes	Pago saldante		Castigo o sanción
	Regla de los 78's	Actuarial	Col.1 - Col. 2
1	$15,041.87	$14,977.56	$ 64.31
12	15,410.16	14,711.42	698.74
36	15,626.13	13,987.66	1,638.47
60	15,036.28	13,012.47	2,023.81
72	14,439.19	12,404.39	2,034.80
84	13,640.54	11,698.55	1,941.99
96	12,640.64	10,879.25	1,761.39
108	11,439.18	9,928.22	1,510.96
120	10,036.29	8,824.30	1,211.99
144	6,626.13	6,055.60	570.53
168	2,410.16	2,325.22	84.94
179	208.54	206.47	2.07

por lo que el pago saldatorio o que salda la deuda es

$$15{,}000 - (209.94 - 187.50) = \$14{,}977.56.$$

La diferencia entre el pago saldante mediante la regla de los 78 y mediante el método actuarial, es decir

$$15{,}041.87 - 14{,}977.56 = \$64.31.$$

puede considerarse como una sanción o castigo por liquidar el préstamo después de un mes. En la Tabla 7.6 se presentan diversos pagos finales y sus correspondientes sanciones, para diversos meses y para un préstamo como el que se analiza.

En la Fig. 7.8 se ilustran mediante curvas los datos de la Tabla 7.6. Se puede observar en la curva de la parte superior que, con la regla de los 78, el pago final aumenta cada mes durante 30 meses, y que el pago final para 60 meses es mayor que los $15,000 obtenidos como préstamo. Habien-

TABLA 7.7

Castigo máximo por pago anticipado según la regla de los 78 en un crédito de $10,000 (*el mes en el que ocurre aparece entre paréntesis*)

VIGENCIA DEL PRÉSTAMO (EN AÑOS)	12%	14%	16%	18%	20%
1	$ 4 (4)	$ 5 (4)	$ 7 (4)	$ 9 (4)	$ 11 (4)
2	15 (8)	21 (8)	27 (8)	35 (8)	43 (8)
3	34 (12)	46 (12)	61 (12)	77 (12)	95 (13)
4	60 (17)	82 (17)	108 (17)	137 (17)	170 (17)
5	94 (21)	129 (21)	169 (21)	215 (21)	266 (21)
7	186 (29)	255 (30)	334 (30)	424 (30)	526 (30)
10	384 (43)	525 (43)	688 (44)	872 (44)	1077 (44)
12	555 (52)	758 (52)	993 (53)	1256 (54)	1548 (54)
15	871 (66)	1187 (67)	1549 (68)	1951 (69)	2392 (69)
20	1548 (90)	2094 (91)	2708 (93)	3381 (94)	4105 (95)

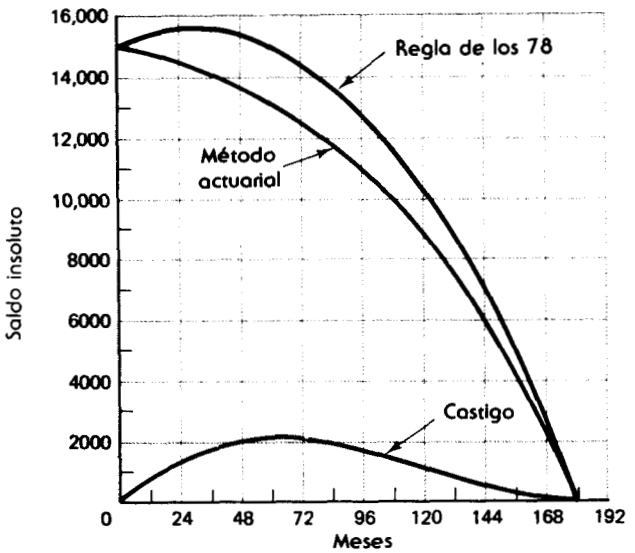


FIGURA 7.8

do avanzado aproximadamente un tercio del plazo del préstamo (67 meses) se paga el castigo máximo de $2.043. Este lapso para el castigo máximo (a un tercio del plazo) es característico en la regla de los 78.

En la Tabla 7.7 se presentan otros castigos máximos por pagos anticipados cuando se aplica la regla de los 78 a un préstamo de $10,000, con diferentes tasas de interés y para diversos plazos del crédito. Los números en paréntesis se refieren al número de meses transcurridos hasta que ocurre el castigo máximo. Por ejemplo, en un préstamo de $10,000, al 16% y a 10 años, el castigo máximo es $688 y se presenta si se liquida el préstamo después de 44 meses. Aumentar la tasa de interés o el plazo de un crédito aumenta la sanción máxima.

Vale la pena señalar que, como la regla de los 78 permite al acreedor obtener la mayor parte de los intereses al principio del plazo del préstamo, le conviene hacer que el consumidor refinancie el préstamo después de que se ha realizado varios pagos. De acuerdo con Jonhson, "The National Consumer Law Center, Inc., ha estimado que la regla de los 78 ha costado a los consumidores varios cientos de millones de dólares al año con respecto a lo que les hubiera costado el interés actuarial. Audiencias en el Senado de los Estados Unidos en 1980, 144)".

Jonhson menciona también que "en alguna época, todos los estados excepto Arkansas, permitían o exigían el uso de la regla de los 78 para asignar intereses al pago de un préstamo. A partir de 1970, cuando menos dieciséis estados han promulgado leyes que limitan su utilización. De estos dieciséis, Iowa ha prohibido su uso".

EJERCICIOS

1. Supóngase que es $150 el cargo total de interés para un préstamo que se debe liquidar mediante 12 abonos mensuales. Si se utiliza la regla de los 78, ¿qué interés ha sido cargado por el acreedor durante los primeros cuatro meses.?

2. Supóngase que el cargo financiero sobre un préstamo pagadero en 24 mensualidades es de $775. Calcule el importe de interés que carga el acreedor durante los primeros dos meses, si se utiliza la regla de los 78.

3. Una persona obtiene un préstamo de $7,500 (o sea, presta esa cantidad), pagadero en 36 mensualidades, a una tasa anual del 12%. Si desea liquidarlo a los dos meses, determine la cantidad saldatoria si el acreedor la calcula utilizando la regla de los 78.

4. Una persona obtiene un préstamo de $10,000, pagadero mediante 5 mensualidades, al 9% anual. Calcule el castigo por pago anticipado un mes después, si el acreedor utiliza la regla de los 78 para determinar la suma que liquida el adeudo.

CAPÍTULO 8

Álgebra de matrices

8.1 Matrices

El análisis de muchas situaciones en Matemáticas y Economía conduce al estudio de disposiciones o arreglos rectangulares de números. Considérese, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases}$$

Las particularidades que caracterizan a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse mediante el arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

que se denomina *matriz*. Se considera que arreglos rectangulares como éste son objetos en si mismos y se acostumbra simbolizarlos encerrados en corchetes. Tambiénse usan a veces paréntesis. Al representar matrices en forma simbólica, se usarán letras mayúsculas de tipo negro, como **A**, **B**, **C**, etcétera.

ADVERTENCIA
No se deben emplear barras verticales, | | en vez de corchetes o paréntesis, porque tienen un significado diferente.

En Economía con frecuencia resulta conveniente utilizar matrices para plantear problemas y mostrar datos. Por ejemplo, un fabricante que elabora los productos A, B y C podría representar las unidades de mano de obra y de materiales implicadas en

TABLA 8.1

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Materiales	5	9	7

la producción de una semana, en la forma mostrada en la Tabla 8.1. Más simplemente, esos datos pueden representarse mediante la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones o filas horizontales de una matriz se numeran en forma consecutiva de arriba a abajo y las columnas o hileras verticales se numeran de izquierda a derecha. Para la matriz **A** se tiene

$$\begin{array}{l} \\ \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Puesto que **A** tiene dos renglones y tres columnas, se dice que **A** es de *orden* 2×3 (léase "2 por 3"), en donde el número de renglones se especifica en primer término. De modo semejante, las matrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

tienen órdenes 3×3 y 4×2, respectivamente.

A los números que constituyen la matriz se les denomina **elementos**. Para denotar elementos arbitrarios en una matriz, por ejemplo de orden 2×3, existen dos métodos. En primer lugar, se pueden utilizar letras diferentes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

En segundo, puede utilizarse una sola letra, —por ejemplo, a— junto con subíndices *dobles* apropiados para señalar la posición:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Para el elemento a_{12} (léase "a sub uno-dos"), el primer subíndice 1, especifica el renglón, y el segundo, 2, la columna en la que aparece dicho elemento. De manera similar, el elemento a_{23} (léase "a sub dos-tres") es el que corresponde al segundo renglón y la

tercera columna. En términos generales, se dice que el símbolo a_{ij} denota el elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

El propósito de este capítulo es la manipulación y aplicación de diversos tipos de matrices. Para dar una visión completa, enseguida se proporciona una definición formal de matriz.

DEFINICIÓN

A un arreglo rectangular de números que consta de ***m*** *renglones y* ***n*** *columnas,*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

se le denomina ***matriz m × n, o matriz de orden m × n****. En el símbolo de elemento* a_{ij}, *i es el subíndice que corresponde al renglón, y j, el que indica la columna.*

En general, las matrices $m \times n$ tienen mn elementos. Por brevedad, una matriz de $m \times n$ se puede denotar mediante el símbolo $[a_{ij}]_{m \times n}$, o en forma más simple, $[a_{ij}]$, en donde se sobreentiende que el orden es el apropiado para el contexto dado. Esta notación indica el tipo de símbolo que se utiliza para denotar un elemento general.

ADVERTENCIA
No debe confundirse el elemento general a_{ij} con la matriz $[a_{ij}]$.

Una matriz que tiene exactamente un renglón, como

$$\mathbf{A} = [1 \quad 7 \quad 12 \quad 3],$$

se denomina **matriz renglón**. Aquí **A** es de orden 1×4. De forma análoga, una matriz que consta de una sola columna, como la matriz 5×1

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix},$$

se denomina **matriz columna**.

EJEMPLO 1

Las matrices

$$\mathbf{A} = [1 \quad 2 \quad 0], \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [7],$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

son de orden 1×3, 3×2, 1×1 y 3×5, respectivamente.

EJEMPLO 2

a. *Formar una matriz columna de tres elementos tal que* $a_{21} = 6$ *y* $a_{ij} = 0$ *en los demás casos.*

La matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. *Si* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *es de orden* 3×4, *y* $a_{ij} = i + j$, *determinar* $\mathbf{A}$.

Aquí $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$; $\mathbf{A}$ tiene así $(3)(4) = 12$ elementos. Puesto que $a_{ij} = i + j$, el elemento en el renglón i y la columna j se obtiene sumando los números i y j. Por tanto, $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{12} = 1 + 2 = 3$, $a_{13} = 1 + 3 = 4$ y así sucesivamente. Así

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

c. *Formar una matriz* 3×3, $\mathbf{I}$, *dado que* $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ *y* $a_{ij} = 0$ *en los demás casos.*

La matriz es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

DEFINICIÓN

Dos matrices son ***iguales*** *si, y sólo si, tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.*

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

pero

$$[1 \quad 1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y

$$[1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1].$$

Mediante la definición de igualdad, para que la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

sea un planteamiento válido, debe ser equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = 2, \\ y + 1 = 7, \\ 2z = 4, \\ 5w = 2. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene $x = 2$, $y = 6$, $z = 2$ y $w = \frac{2}{5}$. Es un hecho importante el que una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones lineales, como se vio antes.

Ciertos tipos de matrices desempeñan papeles importantes en la teoría de matrices. Enseguida se consideran tres de ellos.

Una matriz $m \times n$ cuyas entradas son todas 0 se denomina **matriz cero** $m \times n$ y se denota por $\mathbf{O}_{m \times n}$ o, en forma más simple, $\mathbf{O}$. En consecuencia, la matriz cero 2×3 es

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y, en general

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

ADVERTENCIA
No se debe confundir la matriz $\mathbf{O}$ con el número real 0.

Una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones, por ejemplo n renglones y n columnas, se denomina **matriz cuadrada** de orden n. Es decir, una matriz $m \times n$ es cuadrada si, y sólo si, $m = n$. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad [3]$$

son matrices cuadradas de orden 3 y 1, respectivamente.

En una matriz cuadrada de orden n, los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ que quedan en la diagonal que se extiende de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, se denominan elementos de la *diagonal principal*, o bien, la **diagonal principal**. Por consiguiente, en la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

la diagonal principal consiste en $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ y $a_{33} = 9$.

Se dice que una matriz cuadrada es una **matriz triangular superior** (o **inferior**) si todos los elementos que están por debajo (o por encima) de la diagonal principal son ceros. Consecuentemente

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices triangulares superior e inferior, respectivamente.

EJERCICIOS 8.1

1. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [6 \quad 2], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = [4],$$

a. Exprese el orden de cada matriz.

b. ¿Qué matrices son cuadradas?

c. Qué matrices son triangulares superiores?, o bien ¿triangulares inferiores?

d. ¿Cuáles son matrices renglón?

e. ¿Cuáles son matrices columna?

En los Problemas **2-9**, *sea*

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. ¿Cuál es el orden de **A**?

Determinar los siguientes elementos.

3. a_{43}. **4.** a_{12}. **5.** a_{32}. **6.** a_{34}. **7.** a_{14}. **8.** a_{55}.

9. ¿Cuáles son los elementos de la diagonal principal?

10. Escriba la matriz triangular superior de orden 5, suponiendo que todos los elementos que no se requiere que sean 0 sean iguales a 1.

11. Exprese $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ si **A** es 3×4 y $a_{ij} = 2i + 3j$.

12. Exprese $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ si **B** es 2×2 y $b_{ij} = (-1)^{i+j}(i^2 + j^2)$.

13. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es 12×10, ¿cuántos elementos tiene **A**? Si $a_{ij} = 1$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, determinar a_{33}, a_{52}, $a_{10,10}$ y $a_{12,10}$.

14. Enuncie la diagonal principal de

$$\textbf{a.}\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b.}\ \begin{bmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{bmatrix}.$$

15. Enuncie la matriz cero de orden (a) 4; (b) 6.

En los Problemas **16-19**, *resuelva la ecuación matricial.*

16. $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$.

20. Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 acciones de la B, 500 acciones de la C y 300 acciones de la D. Forme una matriz renglón que proporcione el número de acciones que se vendieron de cada empresa. Si las acciones se venden en \$20, \$30, \$45 y \$100 por acción, respectivamente, exprese esta información como matriz columna.

21. Una compañía tiene sus reportes mensuales de ventas de sus productos expresados como matrices cuyos renglones, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de superlujo que se vendieron; y las columnas, también en orden, indican el número de unidades rojas, blancas, azules y moradas que se vendieron. Las matrices para enero (**E**) y febrero (**F**) son

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Cuántos modelos blancos de superlujo se vendieron en enero? (b) ¿Cuántos modelos azules de lujo se vendieron en febrero? (c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares morados? (d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses? (e) ¿En qué mes se vendió mayor cantidad de modelos de lujo? (f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos? (g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

22. Las matrices de insumo y producción, desarrolladas por W.W. Leontief, señalan las interrelaciones que existen entre los diversos sectores de una economía durante cierto periodo. En la matriz **M** que aparece enseguida se presenta un ejemplo hipotético de una economía simplificada. Los sectores de consumo son los mismos que los sectores productivos; y pueden considerarse como fabricantes, gobierno, siderurgia, agricultura, hogares, etcétera. En cada renglón se muestra la forma en que los cuatro sectores consumen la producción de un sector dado. Por ejemplo, de la producción total de la industria A, 50 unidades se quedaron en la misma industria A, 70 pasaron a B, 200 a C y 360 a las demás. La suma de los elementos del renglón 1, a saber 680, da la producción total de A para el periodo considerado. Cada columna proporciona la producción de cada sector que es consumida por un sector determinado. Por ejemplo, en la fabricación de 680 unidades, la industria A consumió 50 unidades de las suyas propias, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás fabricantes. Encuentre la suma de los elementos para cada columna. Haga lo mismo para cada renglón. ¿Qué se observa al comparar estos totales? Supóngase que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, 136 unidades. Suponiendo estos resultados como un aumento uniforme de 20% de todos sus insumos, ¿en cuántas unidades tendrá que aumentar el sector B su producción? Responda la misma pregunta para C y para todos los otros fabricantes.

		CONSUMIDORES			
	FABRICANTES	**Industria A**	**Industria B**	**Industria C**	**Todos los demás consumidores**
$M =$	Industria A	50	70	200	360
	Industria B	90	30	270	320
	Industria C	120	240	100	1,050
	Todos los demás fabricantes	420	370	940	4,960

8.2 Adición de matrices y multiplicación por un escalar

Considérese un distribuidor de vehículos para nieve que vende dos modelos, el de lujo y el de superlujo. Cada uno de ellos está disponible en dos colores, rojo y azul. Supóngase que las ventas para enero y febrero están representadas mediante las siguientes matrices

$$\mathbf{E} = \begin{array}{c} \\ \text{rojo} \\ \text{azul} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{De lujo} & \begin{array}{c}\text{De}\\\text{superlujo}\end{array} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cada uno de los renglones de **E** y **F** da el número de unidades vendidas de cada modelo para un color determinado. Cada columna señala el número que se vendió de cada color para un modelo dado. Puede obtenerse una matriz que represente las ventas totales de cada modelo y color, para ambos meses, sumando los elementos correspondientes de **E** y **F**:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Esta situación motiva a presentar la operación de adición de matrices para dos matrices del mismo orden.

DEFINICIÓN

Si **A** *y* **B** *son ambas matrices* $m \times n$, *entonces* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *es la matriz* $m \times n$ *que se obtiene al sumar los correspondientes elementos de* **A** *y* **B**.

Por ello, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},$$

entonces **A** y **B** son del mismo orden (2×3) y

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2-2 \\ 3-6 & 4+4 \\ 5+3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ no está definida, ya que las matrices no son de igual orden.

Si **A**, **B**, **C** y **O** tienen el mismo orden, resultan válidas las siguientes propiedades para la adición de matrices:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	(propiedad conmutativa),
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	(propiedad asociativa),
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$	(propiedad de identidad).

Estas propiedades se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$

b. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix},$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

c. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$

Así, la matriz cero desempeña el mismo papel en la adición de matrices que el número cero en la adición de números reales.

Volviendo al distribuidor de vehículos para nieve, recuérdese que las ventas de febrero estaban dadas por la matriz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si en marzo el distribuidor duplica las ventas de febrero para cada modelo y color, la matriz de ventas **M** para marzo podría obtenerse multiplicando por 2 cada elemento de **F**:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix}.$$

Parece razonable escribir esta operación de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{F} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

que es la multiplicación de una matriz por un número real. Se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Si **A** *es una matriz* $m \times n$ *y* k *es un número real (también denominado escalar), entonces se utiliza* $k\mathbf{A}$ *para denotar la matriz* $m \times n$ *que se obtiene al multiplicar por* k *cada uno de los elementos de* **A**. *A esta operación se le llama* ***multiplicación por un escalar***.

En consecuencia, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

entonces

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 3

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Evaluar las siguientes matrices:

a. $4\mathbf{A}$.

$$4\mathbf{A} = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}.$$

b. $-\frac{2}{3}\mathbf{B}$.

$$-\frac{2}{3}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

c. $\frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}.$$

d. $0\mathbf{A}$.

$$0\mathbf{A} = 0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

e. $k\mathbf{O}$.

$$k\mathbf{O} = k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Si **A**, **B** y **O** son del mismo orden, entonces para cualesquiera escalares k, k_1 y k_2, se tienen las siguientes propiedades de la multiplicación por un escalar:

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$,
2. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$,
3. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$,
4. $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

Las Propiedades 4 y 5 se ilustraron en el Ejemplo 3(d) y (e); las otras se ilustrarán en los ejercicios. Se debe recordar que $\mathbf{O} \neq 0$, porque 0 es un *escalar* y **O** es la *matriz* cero.

Para el caso en el que $k = -1$, entonces $k\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$, lo cual se denota simplemente escribiendo $-\mathbf{A}$, que se denomina *negativo* de **A**. Por lo tanto, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$-\mathbf{A} = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que $-\mathbf{A}$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada uno de los elementos de **A** por -1.

Ahora ya se puede definir la sustracción de matrices.

DEFINICIÓN

Si **A** *y* **B** *tienen el mismo orden, entonces* **A** − **B** *quiere decir* **A** + (−**B**).

EJEMPLO 4

a.
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6 & 6+2 \\ -4-4 & 1-1 \\ 3+0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, para determinar **A** − **B** se resta cada elemento de **B** del elemento correspondiente de **A**.

b.
$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-2 & -4+3 & 7-3 & 1-2 \\ -1-4 & 6-2 & 0-1 & -4-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3+1 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5

Resolver
$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices, debe tenerse que $2x_1 - 3 = 25$, lo cual da $x_1 = 14$; de $2x_2 - 4 = -20$ resulta $x_2 = -8$.

EJEMPLO 6

Considérese una economía hipotética y simplificada que tiene tres industrias; podrían ser, por ejemplo, carbón, electricidad y acero; y tres consumidores 1, 2 y 3. Además, supóngase que cada consumidor puede usar parte de la producción de cada industria y también que cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras. Las necesidades de cada consumidor y cada industria se pueden representar por una matriz (renglón) de demanda, cuyos elementos, en orden, son las cantidades de carbón, electricidad y acero que cada consumidor o industria requiere, en las unidades pertinentes. Por ejemplo, las matrices de demanda para los consumidores podrían ser

$$\mathbf{D}_1 = [3 \quad 2 \quad 5], \qquad \mathbf{D}_2 = [0 \quad 17 \quad 1], \qquad \mathbf{D}_3 = [4 \quad 6 \quad 12],$$

y, para las industrias,

$$\mathbf{D}_C = [0 \quad 1 \quad 4], \qquad \mathbf{D}_E = [20 \quad 0 \quad 8], \qquad \mathbf{D}_S = [30 \quad 5 \quad 0],$$

en donde los subíndices C, E y A indican carbón, electricidad y acero, respectivamente. La demanda total de estos bienes por parte de los consumidores está dada por la suma

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 = [3 \quad 2 \quad 5] + [0 \quad 17 \quad 1] + [4 \quad 6 \quad 12] = [7 \quad 25 \quad 18].$$

La demanda industrial total lo está por la suma

$$\mathbf{D}_C + \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_A = [0 \quad 1 \quad 4] + [20 \quad 0 \quad 8] + [30 \quad 5 \quad 0] = [50 \quad 6 \quad 12].$$

Por consiguiente, la demanda total general está dada por

$$[7 \quad 25 \quad 18] + [50 \quad 6 \quad 12] = [57 \quad 31 \quad 30].$$

Consecuentemente la industria del carbón vende un total de 57 unidades, en tanto que las unidades totales de electricidad que se venden son 31, y el total de unidades de acero que se venden son 30.*

EJERCICIOS 8.2

En los Problemas **1-12**, *realice las operaciones que se señalan.*

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & -2 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. $3[1 \quad -3 \quad 2 \quad 1] + 2[-6 \quad 1 \quad 0 \quad 4] - 0[-2 \quad 7 \quad 6 \quad 4]$.

6. $[7 \quad 7] + 66$.

* Este ejemplo así como algunos otros de este mismo capítulo se obtuvieron de John G. Kemeny, J. Laurie Snell y Gerald L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, 3a. ed., © 1974. Reproducido con autorización de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. $-6\begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -4 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$.

12. $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$.

En los Problemas **13-24,** *calcule las matrices que se requieren, si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. $-\mathbf{B}$.

14. $-(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

15. $2\mathbf{C}$.

16. $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$.

17. $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$.

18. $0(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

19. $3(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + 6$.

20. $\mathbf{A} + (\mathbf{C} + 2\mathbf{O})$.

21. $2\mathbf{B} - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{C}$.

22. $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B}$.

23. $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + 2\mathbf{C})$.

24. $2\mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C})$.

Para las matrices **A**, **B** *y* **C** *anteriores, verifique que*

25. $3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 3\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

26. $(2 + 3)\mathbf{A} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{A}$.

27. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_2k_2)\mathbf{A}$.

28. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.

29. Exprese la ecuación matricial

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - y\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo.

30. En forma inversa a la del Problema 29, escriba el sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x - 6y = -4 \end{cases}$$

como una ecuación matricial.

En los Problemas **31-34,** *resuelva las ecuaciones matriciales.*

31. $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$.

32. $3\begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 7 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2y \end{bmatrix}$.

33. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$.

34. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3x + 12 - 3y \end{bmatrix}$.

35. Supóngase que el precio de los productos A, B y C están dados, en ese orden por la matriz de precios

$$\mathbf{P} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3].$$

Si se aumentaran los precios en 10%, se puede obtener la matriz de nuevos precios multiplicando **P** ¿por qué escalar?

8.3 Multiplicación de matrices

Además de las operaciones de adición de matrices y de multiplicación por un escalar, puede definirse el producto **AB** de matrices **A** y **B** bajo ciertas condiciones, las cuales son que el número de columnas de **A** sea igual al número de renglones de **B**.

DEFINICIÓN

Sea **A** *una matriz* $m \times n$ *y* **B** *una matriz* $n \times p$. *Entonces, el producto* **AB** *es la matriz* $m \times p$, **C**, *cuyo elemento* c_{ij} *del i-ésimo renglón y la j-ésima columna se obtiene de la siguiente manera: sumar los productos formados al multiplicar, en orden, cada elemento (es decir, el primero, el segundo, etc.) del i-ésimo renglón de* **A** *por el elemento "correspondiente" (es decir, el primero, el segundo, etc.) de la j-ésima columna de* **B**.

Se deben comprender en forma cabal tres puntos acerca de la definición de **AB**. En primer lugar, la condición de que **A** sea $m \times n$ y que **B** sea $n \times p$ equivale a decir que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B**. En segundo término, el producto será una matriz de orden $m \times p$; tendrá el mismo número de renglones que **A** y el mismo número de columnas que **B**. En tercer lugar, la definición se refiere al producto **AB**, *en ese orden*; **A** es el factor del lado izquierdo y **B** es el factor del lado derecho. Para **AB**, se dice que **B** está *premultiplicada* por **A**, o que **A** es *posmultiplicada* por **B**.

Para aplicar la definición, evalúese lo siguiente:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

El número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B**, y de este modo el producto está definido. En virtud de que **A** es 2×3 ($m \times n$) y **B** es 3×3 ($n \times p$), el producto **C** será de orden 2×3 ($m \times p$):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

El elemento c_{11} se obtiene sumando los productos de cada uno de los elementos del renglón 1 de **A** por los elementos "correspondientes" de la columna 1 de **B**. Es decir,

elementos del renglón 1 de **A**

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14.$$

elementos de la columna 1 de **B**

De igual manera, para c_{21} se utilizan los elementos del renglón 2 de **A** y los de la columna 1 de **B**:

elementos del renglón 2 de **A**

$$c_{21} = (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3.$$

elementos de la columna 1 de **B**

También,

$$c_{12} = (2)(0) + (1)(4) + (-6)(1) = -2,$$

$$c_{22} = (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10,$$

$$c_{13} = (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10,$$

$$c_{23} = (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7.$$

Por ello,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Si se invierte el orden de los factores, entonces

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Este producto *no* está definido puesto que el número de columnas de **B** *no* es igual al número de renglones de **A**. Esto muestra que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Es decir, para cualesquiera matrices **A** y **B**, es común que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (aun cuando ambos productos estén definidos).

EJEMPLO 1

Determinar

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que **A** es 2×3 y **B** es 3×2, el producto **AB** está definido y será de orden 2×2. Si simultáneamente se hace pasar el dedo índice de la mano izquierda a lo largo de los renglones de **A** y el dedo índice de la mano derecha a lo largo de las columnas de **B**, se pueden obtener mentalmente los elementos del producto.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 2

Evaluar cada uno de los siguientes productos.

a. $[1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$.

El producto es de orden 1×1:

$$[1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = [32].$$

b. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1 \quad 6]$.

El producto es de orden 3×2:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1 \quad 6] = \begin{bmatrix}1 & 6\\2 & 12\\3 & 18\end{bmatrix}.$$

c. $$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\-2 & 2 & 1\\1 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\5 & -1 & 3\\2 & 1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & -3 & 11\\10 & -1 & 0\\-7 & -4 & 10\end{bmatrix}.$$

d. $$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}\end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 3

Determinar **AB** *y* **BA** *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -2\\-5 & 7\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 3\\14 & 3\end{bmatrix}.$$

Aunque tanto **AB** como **BA** están definidos, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

La multiplicación de matrices satisface las siguientes propiedades si se supone que todas las sumas y productos están definidos:

1. $\mathbf{A(BC) = (AB)C}$	(propiedad asociativa)
2. $\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$, $\mathbf{(A + B)C = AC + BC}$	(propiedades distributivas)

EJEMPLO 4

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determinar **ABC** *de dos maneras.*

$$\mathbf{A(BC)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{(AB)C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5

Verificar que $\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$ *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A(B + C)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB + AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Así, $\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$.

Otra propiedad se refiere a las multiplicaciones entre escalares y matrices. Si k es un escalar y el producto **AB** está definido, entonces

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}).$$

El producto $k(\mathbf{AB})$ se escribe simplemente $k\mathbf{AB}$. Así, $k\mathbf{AB} = k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$. Por ejemplo,

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1 y todos los demás son 0 se denomina **matriz identidad** de orden n. Se denota por **I**. Por ejemplo, las matrices identidad de órdenes 3 y 4, respectivamente, son

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si **A** es una matriz cuadrada y tanto **A** como **I** son del mismo orden, entonces

$$\mathbf{AI = IA = A}.$$

En consecuencia, la matriz identidad desempeña el mismo papel en la multiplicación de matrices que el número 1 en la multiplicación de números reales. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 6

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ejecutar cada una de las siguientes operaciones.

a. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. $3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$.

$$3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

c. $\mathbf{AO}$.

$$\mathbf{AO} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

d. $\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Se pueden representar sistemas de ecuaciones lineales utilizando la multiplicación de matrices. Considérese el primer miembro de la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

El producto del lado izquierdo es de orden 2×1 y, por lo tanto, es una matriz columna:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices, se debe cumplir que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2. \end{cases}$$

Por consiguiente, un sistema de ecuaciones lineales puede definirse mediante una ecuación matricial. A menudo se describe la Ecuación (1) diciendo que tiene la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}.$$

EJEMPLO 7

Representar el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4, \\ 8x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

en términos de multiplicación de matrices.

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

entonces el sistema dado es equivalente a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 8

Supóngase que los precios (en unidades monetarias por unidad) para los productos A, B y C están representados por la siguiente matriz de precios

$$\begin{matrix} & \text{Precio de} \\ & \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \end{matrix}$$
$$\mathbf{P} = [2 \quad 3 \quad 4].$$

Si las cantidades (en unidades) de A, B y C que se adquieren están dadas por la matriz columna:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{unidades de A} \\ \text{unidades de B} \\ \text{unidades de C,} \end{matrix}$$

entonces el costo total (en unidades monetarias) de las compras está dado por el elemento de **PQ**:

$$\mathbf{PQ} = [2 \ 3 \ 4]\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 11)] = [73].$$

EJEMPLO 9

Supóngase que un contratista de construcción ha aceptado pedidos por cinco casas de estilo ranchero, siete casas de estilo campero y 12 casas de estilo colonial. En este caso, los pedidos pueden representarse mediante la siguiente matriz renglón

$$\mathbf{Q} = [5 \quad 7 \quad 12].$$

Además, supóngase que las materias primas y laborales que se utilizan en cada uno de los tipos de edificación son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Los elementos de la matriz **R** que aparecen enseguida presentan el número de unidades de cada uno de los materiales que se invierten en cada uno de los tipos de casas. (Los elementos no son necesariamente realistas, sino que se escogieron por conveniencia.)

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Ranchero	5	20	16	7	17
Campero	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

$= \mathbf{R}.$

Cada renglón señala la cantidad de cada material de construcción que se requiere para la clase de casa determinada; cada columna indica la cantidad de materia necesaria para cada tipo de edificación. Supóngase ahora que el contratista desea calcular la cantidad de cada una de las materias que necesita para cumplir los contratos. En este caso, tal información está dada por **QR**:

$$\mathbf{QR} = [5 \quad 7 \quad 12]\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= [146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388].$$

Consecuentemente, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio, etcétera.

Al contratista le interesan también los costos en los que habrá de incurrir al comprar esos elementos. Supóngase que el acero cuesta \$1500 por unidad, la madera \$800 por unidad, y el vidrio, la pintura y la mano de obra, \$500, \$100 y \$1000 por unidad, respectivamente. Estos datos pueden expresarse mediante la matriz columna de costos que aparece enseguida:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Entonces **RC** da el costo de cada tipo de casa:

$$\mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49{,}200 \\ 52{,}800 \\ 46{,}500 \end{bmatrix}.$$

Por ello, el costo de materiales y obra para la casa de estilo ranchero es \$49,200; para la casa de tipo campero, \$52,800; y para la casa colonial, \$46,500.

El costo total de construcción para todas las casas está dado por

$$\mathbf{QRC} = \mathbf{Q(RC)} = [5 \quad 7 \quad 12]\begin{bmatrix} 49{,}200 \\ 52{,}800 \\ 46{,}500 \end{bmatrix} = [1{,}173{,}600].$$

De modo que el costo total es de \$1,173,600.

EJEMPLO 10

En el Ejemplo 6 de la Sección 8.2, supóngase que el precio del carbón es de \$10,000 por unidad, el precio de la electricidad, de \$20,000 por unidad, y el precio del acero,

de \$40,000 por unidad. Estos precios pueden representarse por la matriz (columna) de precios

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix}.$$

Considérese la industria del acero. Vende un total de 30 unidades de acero a \$40,000 por unidad y los ingresos totales son, por lo tanto, \$1,200,000. Sus costos para los diversos artículos que consume están dados por la matriz producto

$$\mathbf{D_S P} = [30 \quad 5 \quad 0]\begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix} = [400{,}000].$$

Así que la utilidad para la industria acerera es \$1,200,000 − \$400,000 = \$800,000.

EJERCICIOS 8.3

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, *y* $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, *obtener cada elemento de lo siguiente.*

1. c_{11}. **2.** c_{23}. **3.** c_{32}. **4.** c_{33}. **5.** c_{22}. **6.** c_{13}.

Si **A** *es* 2×3, **B** *es* 3×1, **C** *es* 2×5, **D** *es* 4×3, **E** *es* 3×2 *y* **F** *es* 2×3, *indicar el orden y el número de elementos en cada uno de los siguientes casos:*

7. **AE.** **8.** **DE.** **9.** **EC.** **10.** **DB.** **11.** **FB.**

12. **BA.** **13.** **EA.** **14.** **E(AE).** **15.** **E(FB).** **16.** **(F + A)B.**

Exprese la matriz identidad que tiene el siguiente orden.

17. 4. **18.** 6.

En los Problemas **19-36**, *lleve a cabo las operaciones que se señalan.*

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

22. $[1 \quad 0 \quad 6 \quad 2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

25. $[-1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

26. $[1 \quad -4]\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}[2 \quad 3 \quad -2 \quad 3]$.

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

29. $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

30. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

32. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

33. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

34. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

35. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

36. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

En los Problemas **37-51**, *calcule las matrices que se requieren, si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = [1 \quad 2 \quad 4], \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. **AB.**

38. **BD.**

39. **CF.**

40. **FE − 3B.**

41. **DG.**

42. $\mathbf{D}^2$ **(= DD).**

43. **EC.**

44. **GC.**

45. **DI** $-\frac{1}{3}$**G.**

46. **B(D + G).**

47. **3A − 2BC.**

48. **G(2D − 3I).**

49. **2I** $-\frac{1}{2}$**GH.**

50. **A(BC).**

51. **(DC)A.**

En los Problemas **52-55**, *represente el sistema dado utilizando multiplicación de matrices.*

52. $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 3x + y = 5. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 7x - 2y = 5. \end{cases}$

54. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 4r - s + 3t = 9, \\ 3r - t = 7, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

56. Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 acciones de la empresa B, 500 acciones de la empresa C y 250 acciones de la empresa D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. Elabore una matriz renglón que represente el número de acciones que el cliente compró de cada una de las empresas. Presente una matriz columna que indique el precio por acción de cada una de ellas. Utilizando multiplicación de matrices, obtenga el costo total de las acciones.

57. En el Ejemplo 9 supóngase que el contratista va a construir siete casas de estilo ranchero, tres de

estilo campero y cinco coloniales. Calcule, utilizando multiplicación de matrices, el costo total de materiales y obra.

58. En el Ejemplo 9 supóngase que el contratista desea tomar en consideración el costo de transportar las materias al lugar de la construcción así como el costo de compra. Supóngase que los costos están dados en la matriz que aparece enseguida.

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \text{Precio de compra} \quad \text{Transporte} \\ \begin{bmatrix} 1500 & 45 \\ 800 & 20 \\ 500 & 30 \\ 100 & 5 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Acero} \\ \text{Madera} \\ \text{Vidrio} \\ \text{Pintura} \\ \text{Mano de obra} \end{array}$$

a. Calculando **RC**, determine una matriz cuyos elementos indiquen los costos de compra y de transporte de los materiales para cada tipo de casa.

b. Evalúe la matriz **QRC** cuyo primer elemento señale el precio total de compra y cuyo segundo elemento presente el costo total de transporte.

c. Sea $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y; a continuación calcule **QRCZ**, que da el costo total de materiales y de transporte para todas las casas por construir.

59. Lleve a cabo los siguientes cálculos para el Ejemplo 10:

a. Evalúe la cantidad que tiene que pagar cada industria y cada consumidor por los bienes que reciben.

b. Determine las utilidades obtenidas por cada industria.

c. Hallar la cantidad total de dinero que pagan todas las industrias y los consumidores.

d. Obtenga la proporción de la cantidad total de dinero determinada en (c) y que es pagada por las industrias. Calcule la proporción de la cantidad total de dinero determinada en (c) que es pagada por los consumidores.

8.4 Método de reducción

En esta sección se ilustrará un método que permite utilizar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales: *el método de reducción*. Al introducir este método, se resolverá primero un sistema en la forma usual. Después se obtendrá la misma solución utilizando matrices.

Considérese el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1, & (1) \\ x + 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y. Aunque se puede solucionar este sistema mediante diversos métodos algebraicos, se le resolverá aquí por un método que está bien adaptado a las operaciones matriciales.

Por razones que serán evidentes un poco más adelante, se comienza reemplazando la Ecuación (1) por la Ecuación (2) y la Ecuación (2) por la Ecuación (1), obteniendo el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (3) \\ 3x - y = 1. & (4) \end{cases}$$

En $x + 2y = 5$, multiplicando ambos lados por -3 se obtiene $-3x - 6y = -15$. Sumando los lados izquierdo y derecho de esta ecuación a los lados correspondientes de la Ecuación (4), se origina el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (5) \\ 0x - 7y = -14. & (6) \end{cases}$$

Multiplicando ambos lados de la Ecuación (6) por $-\frac{1}{7}$ resulta el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (7) \\ 0x + y = 2. & (8) \end{cases}$$

De la Ecuación (8), $y = 2$ y en consecuencia $-2y = -4$. Sumando los dos miembros de $-2y = -4$ a los correspondientes de la Ecuación (7), se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + y = 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = 1$ y $y = 2$, y el sistema original queda resuelto.

Antes de mostrar un método para resolver

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

mediante matrices, se definen en primer lugar algunos términos. Se dice que la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** de este sistema. Los elementos de la primera columna corresponden a los coeficientes de las x en las ecuaciones. Por ejemplo, el elemento del primer renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la primera ecuación; el elemento del segundo renglón y primera columna corresponde al coeficiente de x en la segunda ecuación. Del mismo modo, los elementos de la segunda columna corresponden a los coeficientes de las y.

Otra matriz asociada a este sistema es la que se denomina **matriz de coeficientes aumentada**, que es

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

La primera y la segunda columnas son, respectivamente, la primera y la segunda columnas de la matriz de coeficientes. Los elementos de la tercera columna corresponden a los términos constantes del sistema: el elemento del primer renglón de esta columna es el término constante de la primera ecuación, en tanto que el elemento del segundo renglón es el término constante de la segunda ecuación. Aunque no es necesario incluir la raya punteada que aparece en la matriz de coeficientes aumentada, sirve como recordatorio de que el 1 y el 5 son los términos constantes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. Esta matriz aumentada describe en forma completa el sistema de ecuaciones.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema original implicaba diversos sistemas equivalentes. A cada uno de tales sistemas se le puede asociar una matriz de coeficientes aumentada. Enseguida se enuncian los sistemas implicados, junto con

sus correspondientes matrices aumentadas, a las que se ha identificado como **A**, **B**, **C**, **D** y **E**.

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 5. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = \mathbf{A}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{B}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x - 7y = -14. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] = \mathbf{C}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x + y = 2. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{D}.$$

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + y = 2. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{E}.$$

A continuación se expone la forma en que están relacionadas tales matrices.

B puede obtenerse de **A** intercambiando los renglones primero y segundo de **A**. Esta operación corresponde al intercambio de las dos ecuaciones en el sistema original.

C puede obtenerse de **B** sumando a cada elemento del segundo renglón de **B**, el correspondiente elemento del primer renglón de **B** multiplicado por -3.

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 + (-3)(1) & -1 + (-3)(2) & 1 + (-3)(5) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Esta operación se describe como la suma del primer renglón de **B**, multiplicado por -3 y sumado al segundo renglón de **B**.

D se obtiene de **C** multiplicando por $-\frac{1}{7}$ cada uno de los elementos del segundo renglón de **C**. A esta operación se la designa como multiplicar el segundo renglón de **C** por $-\frac{1}{7}$.

E se obtiene de **D** sumando el segundo renglón de **D**, multiplicado por -2, al primer renglón de **D**.

Obsérvese que **E**, que en esencia da la solución, se puede obtener a partir de **A** por una serie de operaciones que incluyen:

1. intercambiar dos renglones de una matriz;
2. sumar el múltiplo de un renglón de una matriz a otro de sus renglones;
3. multiplicar un renglón de una matriz por un escalar diferente de cero.

A estas operaciones se las denomina **operaciones elementales sobre renglones**. Cuando una matriz se puede obtener de otra mediante dichas operaciones elementales, se dice

que las matrices son **equivalentes**. Por tanto, **A** es equivalente a **E**, y esto se escribe $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$.

Con lo anterior ya se puede describir un procedimiento matricial para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En primer lugar, se forma la matriz de coeficientes aumentada del sistema; después, mediante operaciones elementales sobre renglones, se determina una matriz equivalente que señale con claridad cuál es la solución. Enseguida se especificará qué significa dicha matriz: es una a la que se denomina **matriz reducida**, tal que

1. el primer elemento diferente de cero de cada renglón es 1 y son ceros todos los demás elementos de la columna donde aparece dicho 1,
2. el primer elemento distinto de cero de cada renglón se encuentra a la derecha del primer elemento diferente de cero de cada renglón precedente,
3. todo renglón que sólo contiene ceros se encuentra abajo del renglón que contiene un elemento diferente de cero.*

En otras palabras, para resolver un sistema se debe tener primero una matriz reducida que sea equivalente a la matriz de coeficientes aumentada. Nótese que la matriz **E** anterior,

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

es una matriz reducida.

EJEMPLO 1

Para cada una de las siguientes matrices, determinar si es reducida o no.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

f. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a. No es reducida porque el primer elemento diferente de cero del segundo renglón no es 1.

b. Matriz reducida.

* Tomado de Paul C. Shields, Elementary Linear Algebra, 2a. ed. (Nueva York: Worth Publishers, Inc., 1973), p. 7.

c. No es reducida porque el primer elemento distinto de cero del segundo renglón no está a la derecha del primer elemento diferente de cero del primer renglón.

d. Matriz reducida.

e. No es reducida ya que el segundo renglón, que está formado sólo por ceros, no se halla abajo de cada renglón que tiene elementos diferentes de cero.

f. Matriz reducida.

El método de reducción que se acaba de describir para el problema original se puede generalizar a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Para resolver un sistema como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\cdot\qquad\quad\cdot\qquad\qquad\quad\cdot\qquad\quad\cdot \\ \quad\cdot\qquad\quad\cdot\qquad\qquad\quad\cdot\qquad\quad\cdot \\ \quad\cdot\qquad\quad\cdot\qquad\qquad\quad\cdot\qquad\quad\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

se debe

1. determinar la matriz de coeficientes aumentada correspondiente al sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

y

2. determinar una matriz reducida que sea equivalente a la matriz aumentada.

Con frecuencia se denomina al paso 2 *reducción de la matriz de coeficientes aumentada.*

EJEMPLO 2

Utilizando la reducción de matrices, resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Reduciendo esta matriz se tiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$ (intercambiando los renglones primero y tercero)

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$ (sumando al segundo renglón el primero multiplicado por -2)

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ (sumando al tercer renglón el primero multiplicado por -2)

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ (multiplicando por -1 el segundo renglón)

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ (sumando al primer renglón el segundo multiplicado por -1)

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ (sumando al tercer renglón el segundo multiplicado por -1).

La última matriz es una matriz reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 0y = 4, \\ 0x + y = -3, \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

Puesto que el sistema original es equivalente a éste, tiene una solución única, que es

$$x = 4,$$
$$y = -3.$$

Se señala que no es única la secuencia de pasos que han sido utilizados para reducir la matriz.

EJEMPLO 3

Utilizando la reducción de matrices, resolver lo siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 6 = 0, \\ \quad 2z + \ y - 3 = 0, \\ x + \ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Reescribiendo el sistema de manera que las variables estén alineadas y los términos constantes aparezcan en el lado derecho de las ecuaciones, se tiene

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6, \\ \quad y + 2z = 3, \\ x + \ y + 2z = 1. \end{cases}$$

Reduciendo la matriz de coeficientes aumentada, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$ (sumando al tercer renglón el primero multiplicado por -1)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$ (sumando al primer renglón el segundo multiplicado por -2, y sumando el segundo renglón al tercero)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ (multiplicando el tercer renglón por $-\frac{1}{2}$)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ (sumando al segundo renglón el tercero multiplicado por -3).

La última matriz es reducida y corresponde a

$$\begin{cases} \quad x = 0, \\ y + 2z = 0, \\ \quad 0 = 1. \end{cases}$$

Como $0 \neq 1$ no existen valores de x, y y z para los cuales se satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones. Por consiguiente, el sistema original no tiene solución.

EJEMPLO 4

Mediante reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} 2x + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ \quad x_2 + 2x_3 + \ x_4 = \ 2, \\ 3x_1 \quad - 3x_3 + 6x_4 = \ 9. \end{cases}$$

Reduciendo la matriz aumentada, queda

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

(multiplicando el primer renglón por $\frac{1}{2}$)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -6 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

(sumando al tercer renglón el primero multiplicado por -3)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right]$$

(sumando al primer renglón el segundo multiplicado por $-\frac{3}{2}$ y sumando al tercer renglón el segundo multiplicado por $\frac{9}{2}$)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

(multiplicar el tercer renglón por $\frac{1}{3}$)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

(sumando al primer renglón el tercero multiplicado por 2 y sumando al segundo el tercero multiplicado por -2).

La última matriz es reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1. \end{cases}$$

Consecuentemente

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}x_4 + 4, \tag{9}$$

$$x_2 = 0, \tag{10}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}x_4 + 1, \tag{11}$$

$$x_4 = x_4. \tag{12}$$

Si x_4 es cualquier número real, entonces las Ecuaciones (9)-(12) determinan una solución específica para el sistema original. Por ejemplo, si $x_4 = 0$, entonces una solución *específica* es $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$. Si $x_4 = 2$, entonces $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 2$ es una solución específica. La variable x_4 de la cual dependen x_1 y x_3 se denomina *parámetro*. Resulta claro que existe un número infinito de soluciones para el sistema, correspondiendo cada uno de ellos a cada valor del parámetro. Se dice que la solución *general* del sistema original está dada por las Ecuaciones (9)-(12).

EJERCICIOS 8.4

En cada uno de los Problemas **1-6,** *determinar si la matriz es reducida o no.*

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En cada uno de los Problemas **7-12** *reducir la matriz dada.*

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolver los Problemas **13-26** *mediante el método de reducción.*

13. $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - 3y = -11, \\ 4x + 3y = 9. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 12x + 4y = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ -2x - 4y + 6z = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0, \\ 3x + 2z - 5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y + 5z - 1 = 0, \\ x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3, \\ 5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - y - 3z = -4, \\ 2x - y - 4z = -7, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x - 3y - 2z = 2, \\ x - y - 5z = 18. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 4z = 8, \\ x - 2y - 2z = 14, \\ x + y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 3z = -1, \\ 3x + 2y + 11z = 1, \\ x + y + 4z = 1, \\ 2x - 3y + 3z = -8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Resolver los Problemas **27-31** *utilizando la reducción de matrices.*

27. Una compañía tiene ingresos gravables de \$312,000. Los impuestos federales son el 25% de la porción que quede después de haber pagado el impuesto estatal. El impuesto estatal es el 10% de la porción que quede después de pagar el impuesto federal. Evalúe los impuestos federal y estatal.

28. Un fabricante elabora dos productos, A y B. Por cada una de las unidades de A que se vendan se obtiene una utilidad de \$8, y de \$11 por cada unidad vendida de B. Por experiencias pasadas, se sabe que puede venderse 25% más de A que de B. Para el siguiente año el fabricante desea obtener utilidades totales de \$42,000. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben vender?

29. Un fabricante elabora tres productos, A, B y C. Las utilidades por cada unidad que se vende de A, B y C son de \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17,000 por año y los costos de fabricación de cada unidad de A, B y C son de \$4, \$5 y \$7, respectivamente. Para el siguiente año, deberá fabricarse y venderse un total de 11,000 unidades de los tres productos y se debe obtener una utilidad total de \$25,000. Si los costos totales deben ser de \$80,000, ¿cuántas unidades de cada uno de los productos se tienen que fabricar el año siguiente?

30. Una empresa tiene plantas para fabricar escritorios en la costa este y en la costa oeste de un país. En su planta de la costa oriental, los costos fijos son de \$16,000 anuales y los costos de fabricación de cada escritorio son de \$90. En la planta de la costa occidental, los costos fijos son de \$20,000 anuales, y los costos de fabricación de cada escritorio, de \$80. Para el siguiente año la compañía desea fabricar un total de 800 escritorios. Determinar las órdenes de producción de cada planta para el año siguiente, de manera que los costos totales de cada factoría sean iguales.

31. Un médico ordena a un paciente tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D, y 19 unidades de vitamina E, cada día. El paciente puede elegir entre tres marcas de pastillas de vitaminas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 unidades de D y 5 unidades de E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; y la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 de vitamina E.

a. Determine todas las combinaciones posibles de pastillas que proporcionarían exactamente las cantidades requeridas de vitaminas.

b. Si la marca X cuesta un centavo por pastilla, la Y, 6 centavos, y la Z, tres centavos, ¿existen cualesquiera combinaciones de la parte (a) que cuesten exactamente 15 centavos diarios?

c. ¿Cuál es la combinación menos costosa de la parte (a)? ¿Y la más costosa?

8.5 El método de reducción (continuación)*

Tal como se vio en la Sección 8.4, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una sola solución, ninguna solución o una cantidad infinita de ellas. En este último caso la solución general se expresa en términos de cuando menos un parámetro. Por ejemplo, la solución general en el Ejemplo 4, se dio en términos del parámetro x_4:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{5}{2}x_4 + 4, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= -\tfrac{1}{2}x_4 + 1, \\ x_4 &= x_4. \end{aligned}$$

En ocasiones se requiere más de un parámetro, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

* Se puede omitir esta sección.

EJEMPLO 1

Utilizando reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

que equivale a la matriz reducida:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De donde

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Por ello, la solución general está dada por

$$x_1 = 1 - x_3 - 3x_4,$$

$$x_2 = -2 - 2x_3 - x_4,$$

$$x_3 = x_3,$$

$$x_4 = x_4,$$

en donde se requieren los parámetros x_3 y x_4. Asignando valores específicos a x_3 y x_4 se obtienen soluciones también específicas. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$, entonces la solución específica correspondiente es $x_1 = -6$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.

Se acostumbra clasificar los sistemas de ecuaciones lineales como *homogéneos* o *no homogéneos*. La clasificación apropiada depende de los términos constantes, como se señala en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

es un sistema ***homogéneo*** *si* $c_1 = c_2 = \ldots c_m = 0$. *El sistema es* ***no homogéneo*** *si cuando menos una de las c no es igual a* 0.

EJEMPLO 2

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es no homogéneo debido al 4 que aparece en la primera ecuación. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es homogéneo.

Si el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

se resolviera mediante el método de reducción, la matriz aumentada se escribiría de la siguiente manera

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Debe observarse que la última columna tiene sólo ceros. Esto es característico de la matriz aumentada de coeficientes de cualquier sistema homogéneo. En este caso se reduciría esta matriz utilizando operaciones elementales sobre renglones:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La última columna de la matriz reducida también está formada sólo de ceros. Esto no ocurre al azar. Cuando se lleva a cabo cualquier operación elemental sobre renglones en una matriz que tiene una columna formada sólo por ceros la correspondiente columna de la matriz resultante estará formada también únicamente por ceros. Por conveniencia, normalmente se eliminará la última columna de un sistema homogéneo cuando se utilice la reducción de matrices para resolver un sistema de este tipo. Es decir, se reducirá el sistema a solamente la *matriz de coeficientes*. Para el sistema anterior se tendría

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aquí, la matriz reducida, a la que se denomina *matriz de coeficientes reducida*, corresponde a

$$\begin{cases} x + 0y = 0, \\ 0x + y = 0, \end{cases}$$

por lo que la solución es $x = 0$ y $y = 0$.

Ahora se considerará la cantidad de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Siempre aparece una solución cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots$ y $x_n = 0$ ya que con estos valores cada una de las ecuaciones se satisface. Esta solución, a la que se denomina **solución trivial**, es una solución de todo sistema homogéneo.

Existe un teorema que permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (exclusivamente la solución trivial) o una cantidad infinita de soluciones. El teorema se basa en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz de coeficientes del sistema es del orden $m \times n$. Así, si $m < n$ y k es el número de su totalidad por ceros.

Teorema. Sea **A** la matriz de coeficientes *reducida* de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales en n incógnitas. Si **A** tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además,

a. si $k < n$, el sistema tiene una cantidad infinitamente grande de soluciones;

y

b. si $k = n$, el sistema tiene una solución única (la solución trivial).

Si un sistema homogéneo consta de m ecuaciones en n incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema es del orden $m \times n$. Así, si $m < n$ y k es el número de renglones diferentes de cero en la matriz reducida, entonces $k \leq m$ y, por lo tanto, $k < n$. Por el teorema, el sistema puede tener una cantidad infinita de soluciones. En consecuencia, se tiene el siguiente.

Corolario. Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menor cantidad de ecuaciones que de incógnitas tiene una cantidad infinita de soluciones.

EJEMPLO 3

Determinar si el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

tiene solución única o una cantidad infinita de soluciones.

Existen dos ecuaciones en este sistema homogéneo y este número es inferior al de incógnitas (tres). Por consiguiente, por el corolario anterior, el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

ADVERTENCIA

El teorema y el corolario anteriores se aplican sólo a **sistemas homogéneos** de ecuaciones lineales. Por ejemplo, considérese el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3, \\ 2x + 2y - 4x = 4, \end{cases}$$

que consta de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas. **No se puede** concluir que el mismo tiene una cantidad infinita de soluciones debido a que no es homogéneo. El lector debe verificar que no tiene ninguna solución.

EJEMPLO 4

Determinar si los siguientes sistemas homogéneos tienen solución única o una cantidad infinita de soluciones; después, resolver el sistema.

a. $\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$

Reduciendo la matriz de coeficientes, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) de la matriz reducida es inferior al número de incógnitas (3) en el sistema. Por el teorema anterior, existe una cantidad infinitamente grande de soluciones.

Dado que la matriz de coeficientes reducida corresponde a

$$\begin{cases} x + 3z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

la solución puede estar dada por

$$x = -3z,$$

$$y = -z,$$

$$z = z,$$

en donde z es cualquier número real.

b. $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ x - 2y = 0, \\ 2x + y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

Reduciendo la matriz de coeficientes,

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en la matriz reducida equivale al número de incógnitas en el sistema. Por el teorema, el sistema debe tener solución única, es decir, la solución trivial $x = 0$, $y = 0$.

EJERCICIOS 8.5

En los Problemas **1-8,** *resuelva los sistemas utilizando reducción de matrices.*

1. $\begin{cases} w - x - y + 4z = 5, \\ 2w - 3x - 4y + 9z = 13, \\ 2w + x + 4y + 5z = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3w - x + 12y + 18z = -4, \\ w - 2x + 4y + 11z = -13, \\ w + x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3w - x - 3y - z = -2, \\ 2w - 2x - 6y - 6z = -4, \\ 2w - x - 3y - 2z = -2, \\ 3w + x + 3y + 7z = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} w + x + 5z = 1, \\ w + y + 2z = 1, \\ w - 3x + 4y - 7x = 1, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} w + x + 3y - z = 2, \\ 2w + x + 5y - 2z = 0, \\ 2w - x + 3y - 2z = -8, \\ 3w + 2x + 8y - 3z = 2, \\ w + 2y - z = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w + x + y + 2z = 4, \\ 2w + x + 2y + 2z = 7, \\ w + 2x + y + 4z = 5, \\ 3w - 2x + 3y - 4z = 7, \\ 4w - 3x + 4y - 6z = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = -8, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -2. \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 + 16x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -3. \end{cases}$

Para cada uno de los Problemas **9-14,** *determine si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones o si tiene sólo la solución trivial. No resuelva los sistemas.*

9. $\begin{cases} 0.07x + 0.3y + 0.02z = 0, \\ 0.053x - 0.4y + 0.08z = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3w + 5x - 4y + 2z = 0, \\ 7w - 2x + 9y + 3z = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x + 5y = 0, \\ 4x - y = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 3y + 12z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0, \\ 4x + y + 14z = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - z = 0, \\ x - 2y - 5z = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 5y = 0, \\ x + 4y = 0, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas:

15. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 8x - 20y = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + 7y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \\ 5x - 8y = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 5x - 2y - 9z = 0, \\ 3x + y - z = 0, \\ 3x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + 7z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ 2x - 3y - 6z = 0, \\ 3x + y + 13z = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} w + x + y + 4z = 0, \\ w + x + 5z = 0, \\ 2w + x + 3y + 4z = 0, \\ w - 3x + 2y - 9z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0, \\ w - 2x - y + z = 0, \\ w + 2x + 3y + 9z = 0, \\ 2w - 3x - y + 4z = 0. \end{cases}$

8.6 Inversas

Ya se ha visto la utilidad del método de reducción para efectuar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Pero de ninguna manera es el único procedimiento que utiliza matrices. En esta sección se analizará un método diferente que es aplicable a muchos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Para introducir la técnica general. se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2. \end{cases}$$

Se sabe por la Sección 8.3 que tal sistema puede representarse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Obsérvese que la matriz 2×2 de la Ecuación (1), que se denotará mediante $\mathbf{A}$, es la matriz de coeficientes del sistema. Supóngase que existe una matriz $\mathbf{B}$, de 2×2,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

tal que $\mathbf{B}$ multiplicada por $\mathbf{A}$ es la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si se premultiplican por $\mathbf{B}$, ambos lados de la Ecuación (1) se tiene

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pc_1 + qc_2 \\ rc_1 + sc_2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $x_1 = pc_1 + qc_2$, $x_2 = rc_1 + sc_2$, y el sistema queda resuelto.

Resumiendo este procedimiento, en primer lugar se expresa el sistema como una ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}. \tag{2}$$

Luego, considerando que existe una matriz **B** tal que **BA** = **I**, se premultiplican ambos lados de la Ecuación (2) por **B**:

$$\mathbf{BAX} = \mathbf{BC}.$$

Simplificando,

$$\mathbf{IX} = \mathbf{BC},$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{BC}. \tag{3}$$

Así, la solución está dada por **X** = **BC**. Este procedimiento se basa en la suposición de que existe una matriz **B** tal que **BA** = **I**. Cuando existe una matriz como éstas se dice que es la matriz *inversa* de **A**.

DEFINICIÓN

Si **A** *y* **B** *son matrices* $n \times n$, *entonces* **B** *es la* ***matriz inversa*** *de* **A** (*o bien* **B** *es la matriz inversa de* **A**) *si, y sólo si,* **BA** = **I**.

EJEMPLO 1

Sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. En virtud de que

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

B es matriz inversa de **A**.

Si se puede probar que **B** es matriz inversa de **A**, entonces la inversa es única. En consecuencia, en el Ejemplo 1, **B** es la *única* matriz que tiene la propiedad de que **BA** = **I**. De acuerdo con la práctica usual, se denota *la* inversa de la matriz **A** por $\mathbf{A}^{-1}$. Por lo tanto $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ y

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Ahora se puede escribir la Ecuación (3) de la siguiente manera:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}. \tag{4}$$

También resulta cierto que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$. Cuando $\mathbf{A}^{-1}$ existe se dice que **A** es **invertible** (o **no singular**).

No todas las matrices son invertibles. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, no existe matriz alguna que, cuando se multiplique por **A**, produzca la matriz identidad. Consecuentemente, **A** es no invertible.

Antes de analizar un procedimiento para obtener la inversa de una matriz invertible, se introduce el concepto de *matrices elementales*. Una **matriz elemental** $n \times n$ es una que se obtiene a partir de la matriz identidad $\mathbf{I}$ $n \times n$, mediante una operación elemental sobre renglones. Por ello existen tres tipos básicos de matrices elementales:

Matrices elementales

1. la que se obtiene intercambiando dos renglones de **I**;
2. la que se obtiene multiplicando un renglón de **I** por un escalar diferente de cero; y
3. la que se obtiene sumando a otro renglón un múltiplo del renglón **I**.

EJEMPLO 2

Las matrices

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

son elementales. $\mathbf{E}_1$ se obtiene de la matriz identidad 3×3 intercambiando el segundo y el tercer renglones. $\mathbf{E}_2$ se obtiene de la matriz identidad 2×2 multiplicando el primer renglón por -4. $\mathbf{E}_3$ se obtiene de la matriz identidad 2×2 sumando al segundo renglón el primero multiplicado por 3.

Suponiendo que **E** es una matriz elemental $n \times n$, obtenida de **I** mediante cierta operación elemental sobre los renglones, y que **A** es una matriz $n \times n$, entonces puede demostrarse que el producto **EA** es igual a la matriz que se obtiene de **A** aplicando a **A** la misma operación elemental sobre renglones. Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ son matrices elementales. $\mathbf{E}_1$ resulta intercambiando el primero y el segundo renglones de **I**. Asimismo,

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz que proviene de **A** intercambiando sus renglones primero y segundo. $\mathbf{E}_2$ se tiene multiplicando el segundo renglón de **I** por 2. De la misma manera, el producto

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

es la matriz que se obtiene multiplicando el segundo renglón de $\mathbf{A}$ por 2. $\mathbf{E}_3$ se obtiene sumando al primer renglón el segundo renglón de $\mathbf{I}$ multiplicado por -2. El producto

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es la matriz que resulta de $\mathbf{A}$ por la misma operación elemental sobre los renglones.

Si se deseara reducir la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

se podría proceder con la siguiente sucesión de etapas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (sumando al segundo renglón el primero multiplicado por -2)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (multiplicando el segundo renglón por un $\frac{1}{2}$).

Como esto implica operaciones elementales con renglones, es natural utilizar matrices elementales para reducir $\mathbf{A}$. Si se premultiplica a $\mathbf{A}$ por la matriz elemental $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ es la matriz que proviene de $\mathbf{A}$ sumándole al segundo renglón el primero multiplicado por -2:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Premultiplicando $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ por la matriz elemental $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se tiene la matriz a la que se llega multiplicando por $\frac{1}{2}$ el segundo renglón de $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Por tanto, se ha reducido $\mathbf{A}$ multiplicándola por un producto de matrices elementales.

Dado que $(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{A} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \mathbf{I}$, el producto $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ es $\mathbf{A}^{-1}$. Sin embargo, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{I} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{I})$. De modo que se puede obtener $\mathbf{A}^{-1}$ aplicando las mismas operaciones elementales sobre renglones, comenzando con $\mathbf{I}$, tal como se hizo para reducir $\mathbf{A}$ a $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$ (sumando al segundo renglón el primero multiplicado por -2)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ (multiplicando el segundo renglón por $\frac{1}{2}$).

Consecuentemente,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se puede verificar el resultado probando que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

En resumen, para hallar $\mathbf{A}^{-1}$ se aplican las mismas operaciones elementales a los renglones, comenzando con $\mathbf{I}$, y avanzando en el mismo orden, tal como se hizo para reducir $\mathbf{A}$ a $\mathbf{I}$. Es posible determinar en forma conveniente $\mathbf{A}^{-1}$ mediante esta técnica utilizando el siguiente formato. En primer lugar, se escribe la siguiente matriz:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Después, se aplican operaciones elementales sobre renglones hasta que $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$ sea equivalente a una matriz que tenga $\mathbf{I}$ como sus primeras dos columnas. Las últimas dos columnas de esta matriz serán $\mathbf{A}^{-1}$. Así,

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}].$$

Obsérvese que las dos primeras columnas de $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ forman una matriz reducida.

Puede extenderse este procedimiento para encontrar la inversa de *cualquier* matriz invertible $n \times n$. Si $\mathbf{M}$ es una matriz de este tipo, primero se debe formar la matriz $[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}]$ de $n \times (2n)$. Después, deben llevarse a cabo operaciones elementales en los renglones hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida igual a $\mathbf{I}$. Las últimas n columnas serán $\mathbf{M}^{-1}$.

$$[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}] \sim \cdots \sim [\mathbf{I} \mid \mathbf{M}^{-1}].$$

Si la matriz $\mathbf{M}$ no se reduce a $\mathbf{I}$, entonces no existe $\mathbf{M}^{-1}$.

EJEMPLO 3

Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ *si* $\mathbf{A}$ *es invertible.*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Las primeras tres columnas de la última matriz forman $\mathbf{I}$. Por consiguiente, $\mathbf{A}$ es invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ \frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Las primeras dos columnas de la última matriz forman una matriz reducida diferente de $\mathbf{I}$. Consecuentemente, $\mathbf{A}$ no es invertible.

Ahora se resolverá un sistema utilizando la matriz inversa.

EJEMPLO 4

Resolver cada uno de los sistemas hallando la inversa de la matriz de coeficientes.

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 = 1. \end{cases}$

El sistema puede expresarse en forma de ecuación matricial como $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$, en donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, de forma que la solución está dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C},$$

que, como se recordará, es la Ecuación (4). Por tanto, es necesario encontrar $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

De este modo,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

b. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1. \end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Del Ejemplo 3(a),

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así, la solución está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, $x_1 = -7$, $x_2 = -17$ y $x_3 = -4$.

Se puede demostrar que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución única si, y sólo si, la matriz de coeficientes es invertible. De hecho, en las dos partes del último ejemplo las matrices de coeficientes eran invertibles y existieron realmente soluciones únicas. Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, el sistema no tiene solución o tiene una cantidad infinita de ellas.

EJEMPLO 5

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dado que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

la matriz de coeficientes no es invertible. En consecuencia, *no es posible* resolver el sistema mediante inversas. Debe utilizarse otro método. En el Ejemplo 4(a) de la Sección 8.5, se encontró que la solución es $x = -3z$, $y = -z$, $z = z$.

EJERCICIOS 8.6

En cada uno de los Problemas **1-18**, *si la matriz es invertible, halle su inversa.*

1. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para cada uno de los problemas **19-32**, *si la matriz de coeficientes del sistema es invertible, resuelva el sistema utilizando la inversa. Si no lo es, resuelva el sistema mediante el método de reducción.*

19. $\begin{cases} 6x + 5y = 2, \\ x + y = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ -x + 5y = -2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 2y = 26, \\ 4x + 3y = 37. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + 6y = 2, \\ 3x + 9y = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 8y = 3, \\ 3x + 12y = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x + z = 2, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = -2, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 1, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x + 8z = 8, \\ -x + 4y = 36, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} w + 2y + z = 4, \\ w - x + 2z = 12, \\ 2w + x + z = 12, \\ w + 2x + y + z = 12. \end{cases}$

32. $\begin{cases} w + x + z = 2, \\ w + y = 0, \\ x + y + z = 4, \\ y + z = 1. \end{cases}$

En los Problemas **33** *y* **34**, *evaluar* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^1$ *para la matriz* $\mathbf{A}$ *dada.*

33. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

34. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

35. Efectúe la resolución de los siguientes problemas utilizando la inversa de la matriz implicada.

a. Una fábrica de automóviles produce dos modelos. El primero requiere una hora de mano de obra para la pintura y media hora de mano de obra para el pulido; el segundo requiere de una hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Durante cada una de las horas que labora la línea de ensamble, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura, y 80 horas, para pulido. ¿Qué cantidad de cada modelo se puede fabricar cada hora si se utilizan todas las horas disponibles de mano de obra?

b. Supóngase que cada uno de los automóviles del primer tipo requiere de 10 dispositivos y 14 mecanismos, y que cada automóvil del segundo tipo requiere de 7 dispositivos y 16 mecanismos. La fábrica puede obtener 800 dispositivos y 1130 mecanismos por hora. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se pueden fabricar utilizando todas las partes disponibles?

8.7 Determinantes

Ahora se presenta una nueva función, la *función determinante*. Aquí, las entradas serán matrices *cuadradas*, pero las salidas serán números reales. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia a $\mathbf{A}$ exactamente un número real, al que se denomina *determinante* de $\mathbf{A}$. Denotando el determinante de $\mathbf{A}$ por $|\mathbf{A}|$ (es decir, utilizando barras verticales), se puede considerar la función determinante como una correspondencia:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \rightarrow & |\mathbf{A}| \\ \text{matriz} & & \text{número} \\ \text{cuadrada} & & \text{real} \end{array} = \text{determinante de } \mathbf{A}$$

En una parte posterior se analizará el uso de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Volviendo a la forma en que se asigna un número real a una matriz cuadrada, en primer lugar se consideran los casos especiales de matrices de órdenes 1 y 2. Después se extenderá la definición a matrices de orden n.

DEFINICIÓN

Si $\mathbf{A} = [a_{11}]$ *es una matriz cuadrada de orden* 1, *entonces* $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Es decir, la función determinante asigna a una matriz con un solo elemento, $[a_{11}]$ el número a_{11}. Por lo tanto, si $\mathbf{A} = [6]$, entonces $|\mathbf{A}| = 6$.

DEFINICIÓN

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *es una matriz cuadrada de orden* 2, *entonces*

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Es decir, el determinante de una matriz 2×2 se obtiene con el producto de los elementos de la diagonal principal y restándole a éste el producto de los elementos de la otra diagonal. Se habla del determinante de una matriz 2×2, en términos de un *determinante de orden* 2.

EJEMPLO 1

Obtener $|\mathbf{A}|$ *si* $\mathbf{A} =$

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. **b.** $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **c.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **d.** $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$.

Se tiene que

a. $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (1)(3) = -8 - 3 = -11.$

b. $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-2)(0) = -3 - 0 = -3.$

c. $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1.$

d. $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = (x)(1) - (0)(y) = x.$

El determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden $n (n > 2)$ se define de la siguiente manera. A un determinado elemento de $\mathbf{A}$ se le asocia la matriz cuadrada de orden $n - 1$ que se obtiene eliminando los elementos del renglón y la columna en los que está el elemento dado. Por ejemplo, dada la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

con el elemento a_{21} se eliminan los elementos del renglón 2 y de la columna 1,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

quedando la matriz de orden 2,

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Al *determinante* de esta matriz se le denomina **menor** de a_{21}. De forma análoga, el menor de a_{22} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y para a_{23} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

También, a cada elemento a_{ij} se asocia un número determinado por el subíndice del elemento:

$$(-1)^{i+j},$$

en donde $i + j$ es la suma del número de renglón i y el número de columna j en los cuales se encuentra el elemento. A a_{21} se le asocia $(-1)^{2+1} = -1$, a a_{22} le corresponde el número $(-1)^{2+2} = 1$, y a a_{23} se le asocia el número $(-1)^{2+3} = -1$. El **cofactor** c_{ij} del elemento a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ y el menor de a_{ij}. Por ejemplo, el cofactor de a_{21} es

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La única diferencia entre un cofactor y un menor es el factor $(-1)^{i+j}$.

Para encontrar el determinante de cualquier matriz cuadrada **A** de orden $n (n > 2)$, se elige *cualquier* renglón (o columna) de **A** y se multiplica cada elemento de ese renglón (o columna) por su cofactor. Se define que la suma de estos productos es el determinante de **A** y se le denomina **determinante de orden** n.

Enseguida se halla el determinante de

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando la regla anterior al primer renglón (procedimiento al que a veces se denomina "desarrollo sobre el primer renglón"). Para

$$a_{11} \text{ resulta } (2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1)(5) = 10,$$

$$a_{12} \text{ se obtiene } (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(13) = 13,$$

$$a_{13} \text{ se obtiene } (3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1)(3) = 9.$$

De donde

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 13 + 9 = 32.$$

Si se hubiera hecho el desarrollo sobre la segunda columna, entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 13 + 0 + 19 = 32 \quad \text{igual que antes}$$

Se puede probar que el determinante de una matriz es único y no depende del renglón o la columna que se elija para su evaluación. En el problema anterior, es preferible el segundo desarrollo puesto que el 0 de la columna 2 no contribuyó en nada a la suma y, por consiguiente, se simplifican los cálculos.

EJEMPLO 2

Evaluar $|\mathbf{A}|$ *si*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Desarrollando sobre el primer renglón, resulta

$$|\mathbf{A}| = 12(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 12(1)(-1) + (-1)(-1)(-1) + 3(1)(4) = -1.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Desarrollando, por conveniencia, sobre la columna 1, se tiene

$$|\mathbf{A}| = 0 + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 2(-1)(4) = -8.$$

EJEMPLO 3

Evaluar

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando sobre el primer renglón.

$$|\mathbf{A}| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Se ha expresado ahora $|\mathbf{A}|$ en términos de determinantes de orden 3. Desarrollando cada uno de éstos sobre el primer renglón, se tiene

$$|\mathbf{A}| = 2(1)\left[1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right] + 1(-1)\left[1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[1(1)(-6) + 3(1)(-2)] + (-1)[(1)(-1)(-1)] = -25.$$

Con frecuencia se simplifica la evaluación de determinantes utilizando diversas propiedades, algunas de las cuales se enuncian enseguida. En todos los casos **A** denota una matriz cuadrada.

1. **Si son cero todos los elementos de un renglón (o columna) de A, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.** Consecuentemente,

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. **Si dos renglones (o columnas) de A son idénticas, $|\mathbf{A}| = 0$.** Por ello,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ya que columna 1 = columna 3.}$$

3. **Si A es triangular superior (o inferior) entonces $|\mathbf{A}|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.**

Así,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(5)(-2)(1) = -20.$$

A partir de esta propiedad se concluye que el determinante de una matriz identidad es 1.

4. **Si B es la matriz que se obtiene sumando a un renglón (o columna) de A el múltiplo de otro renglón (o columna), entonces $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.**
En consecuencia, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

y **B** es la matriz que se obtiene de **A** sumándole al renglón 1 el renglón 3 multiplicado por -2, entonces

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|.$$

De acuerdo con la propiedad 1, $|\mathbf{B}| = 0$ y, por lo tanto, $|\mathbf{A}| = 0$.

5. **Si B es la matriz que se obtiene intercambiando dos renglones (o columnas) de A, entonces $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$.**
Por consiguiente, si

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

y **B** se obtiene de **A** intercambiando los renglones 2 y 4, entonces

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\mathbf{B}|.$$

Por la Propiedad 3, $|\mathbf{B}| = 4$, y así, $|\mathbf{A}| = -4$.

6. **Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$.**
Por ello,

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

En esencia, puede factorizarse cualquier número en un renglón o una columna.

7. El determinante del producto de dos matrices de orden n es el producto de sus determinantes. Es decir, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
En consecuencia, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(3) = -6.$$

EJEMPLO 4

Evaluar

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Se expresa **A** en forma triangular superior (se dice que "se triangula"), y luego, mediante la propiedad 3, se toma el producto de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

(sumando al renglón 2 el renglón 1 multiplicado por -1; sumando al renglón 4 el renglón 1 multiplicado por -3)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -34 \end{vmatrix}$$

(sumando al renglón 3 el renglón 2 multiplicado por -2; sumando al renglón 4 el renglón 2 multiplicado por 3)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(sumando al renglón 4 el renglón 3 multiplicado por 3)

$$= (1)(1)(-1)(-1) = 1.$$

EJERCICIOS 8.7

Evaluar los determinantes de los Problemas **1-6.**

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -a & b \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} -2 & -a \\ -a & 2 \end{vmatrix}$.

En los Problemas **7** *y* **8**, *evaluar las expresiones dadas.*

7. $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$.

8. $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$.

9. Determinar k si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 12$.

En los problemas **10-13**, *si* $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *determine cada expresión.*

10. El menor de a_{31}. **11.** El menor de a_{22}. **12.** El cofactor de a_{23}. **13.** El cofactor de a_{32}.

14. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es 50×50, y el menor de $a_{43,47}$ es igual a 20, ¿cuánto vale el cofactor de $a_{43,47}$?

En los Problemas **15-18**, *dé cada expresión* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$,

15. El menor de a_{32}. **16.** El menor de a_{24}. **17.** El cofactor de a_{13}. **18.** El cofactor de a_{43}.

En los Problemas **19-34**, *evalúe el determinante. Utilice, si es posible, las propiedades de los determinantes.*

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{8} & -2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

En los Problemas **35** *y* **36**, *obtenga el valor de x.*

35. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7 - x \end{vmatrix} = 26.$

36. $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x - 1 \end{vmatrix} = 60.$

37. Si **A** es de orden 4×4 y $|\mathbf{A}| = 12$, ¿cuál es el valor del determinante que se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de **A** por 2?

8.8 Regla de Cramer

Se pueden aplicar los determinantes para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. De hecho, el estudio de los determinantes se originó en el análisis de sistemas de este tipo. Aunque el método de reducción es más práctico para sistemas que implican cantidades grandes de incógnitas, el método de solución por determinantes es lo suficientemente interesante para justificar cierta atención, y también permite despejar una incógnita sin tener que hallar las demás. En primer lugar se considera un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Después se extienden los resultados para incluir casos más generales.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Para encontrar una fórmula explícita para x, se considera $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} \\ a_{21}x & a_{22} \end{vmatrix}$$ (propiedad 6 de la Sección 8.7)

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} \end{vmatrix}$$ (sumando a la columna 1 la columna 2 multiplicada por y)

$$= \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$ [de la Ecuación (1)].

Por tanto,

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

por lo que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

A fin de hallar una fórmula para y, se considera $y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

$$y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y \\ a_{21} & a_{22}y \end{vmatrix}$$ (propiedad 6 de la Sección 8.7)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21} & a_{21}x + a_{22}y \end{vmatrix}$$ (sumando a la columna 2 la columna 1 multiplicada por x)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$$ [de la Ecuación (1)].

Por lo tanto

$$y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix},$$

y así

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Obsérvese que en las Ecuaciones (2) y (3) los denominadores son iguales, y son el determinante de la matriz de coeficientes del sistema dado. Para evaluar x, el numerador de la Ecuación (2) es el determinante de la matriz que se obtiene reemplazando la "columna de x" (es decir, la columna 1) de la matriz de coeficientes, por la columna de constantes c_1. De manera similar, el numerador de la Ecuación (3) es el determinante de la matriz que se obtiene a partir de la matriz de coeficientes cuando se reemplaza la "columna de y" (es decir, columna 2) por c_1. Dado que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, el sistema original tendrá una solución única. Sin embargo, si este determinante es cero, el procedimiento no es aplicable y el sistema puede tener o ninguna solución o una cantidad infinita de ellas. En estos casos se deben utilizar los métodos analizados antes para resolver el sistema.

Se ilustrarán los resultados anteriores resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0, \\ 3y + x = 6. \end{cases}$$

En primer lugar, se escribe en forma apropiada el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = -5. \\ x + 3y = 6. \end{cases}$$

El determinante Δ de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 1(1) = 5.$$

Como $\Delta \neq 0$, existe una solución única. Despejando el valor de x, se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-21}{5} = -\frac{21}{5}.$$

Obteniendo el valor de y,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{17}{5}.$$

Por lo tanto, la solución es $x = -\frac{21}{5}$ y $y = \frac{17}{5}$.

Se puede extender el método antes descrito a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, y se le denomina *regla de Cramer.*

Regla de Cramer

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n. \end{cases}$$

Si el determinante Δ de la matriz de coeficientes **A** es diferente de 0, entonces el sistema tiene una solución única. Además, la solución está dada por

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

en donde Δ_k, el numerador de x_k, es el determinante de la matriz que se obtiene reemplazando la k-ésima columna de **A** por la columna de constantes.

EJEMPLO 1

Resolver el siguiente sistema mediante la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 4x + 3y + 2z = 2, \\ 2x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

En virtud de que $\Delta \neq 0$, existe una solución única. Despejando x, resulta

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}.$$

De modo semejante,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

La solución es $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ y $z = -1$.

EJEMPLO 2

Resolver el siguiente sistema para obtener el valor de z, mediante la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 5w = 6, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4w = 2. \end{cases}$$

Se tiene que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aquí, se llevó la matriz original a una forma triangular superior y se determinó el producto de los elementos de la diagonal principal (Sección 8.7, Ejemplo 4). Análogamente

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{5} \end{vmatrix} = -98.$$

Por consiguiente $z = \Delta_z/\Delta = -98/1 = -98$.

EJERCICIOS 8.8

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas. Si es posible, utilice la regla de Cramer.

1. $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 3x + y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 7x - 2y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x = 4 - 3y, \\ y = 6x - 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ y - 1 = 3x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(x + 2) = 5, \\ 6(x + y) = -8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w - 2z = 4, \\ 3w - 4z = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}z = 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0.6x - 0.7y = 0.33, \\ 2.1x - 0.9y = 0.69. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 12, \\ x + y - z = -3, \\ x + 2y - 3z = -10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ x + y - 3z = 4, \\ 3x + 2y - z = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3r - t = 7, \\ 4r - s + 3t = 9, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x + 8y + z = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y + z = 4, \\ 5x + y + 3z = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - 6y + 3z = -2, \\ 3x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - z = 14, \\ y + z = 21, \\ x - y + z = -10. \end{cases}$

En los Problemas **17** *y* **18**, *utilice la regla de Cramer para despejar las incógnitas que se señalan.*

17. $\begin{cases} x - y + 3z + w = -14, \\ x + 2y - 3w = 12, \\ 2x + 3y + 6z + w = 1, \\ x + y + z + w = 6. \end{cases}$; $y, w.$

18. $\begin{cases} x + y + 5z = 6, \\ x + 2y + w = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4z = 2. \end{cases}$; $x, y.$

19. Demuestre que la regla de Cramer *no* es aplicable a

$$\begin{cases} 2 - y = x, \\ 3 + x = -y, \end{cases}$$

pero que, por consideraciones geométricas, no existe ninguna solución.

8.9 Inversas utilizando la adjunta

Se pueden utilizar determinantes y cofactores para obtener la inversa de una matriz, si existe. Para comenzar, se requiere de la noción de *transpuesta* de una matriz.

DEFINICIÓN

La ***transpuesta*** *de una matriz* $\mathbf{A}$ $m \times n$, *que se denota por* $\mathbf{A}^T$, *es la matriz* $n \times m$ *cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de* $\mathbf{A}$.

EJEMPLO 1

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *obtener* $\mathbf{A}^T$.

La columna 1 de $\mathbf{A}$ se convierte en el renglón 1 de $\mathbf{A}^T$, la columna 2 se convierte en el renglón 2, y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por consiguiente,

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

DEFINICIÓN

La adjunta de una matriz cuadrada **A**, *denotada por* adj **A**, *es la transpuesta de la matriz que se obtiene reemplazando cada elemento* a_{ij} *de* **A**, *por su cofactor* c_{ij}. *Es decir, es la transpuesta de la matriz de cofactores* $[c_{ij}]$.

EJEMPLO 2

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *determine* adj **A**.

En primer lugar, se obtiene el cofactor c_{ij} de cada uno de los elementos a_{ij} de **A**.

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(5) = 5.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(13) = -13.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(3) = 3.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-4) = 4.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(4) = -4.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (1)(5) = 5.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-19) = 19.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(3) = 3.$$

Consecuentemente, la matriz de cofactores $[c_{ij}]$ es

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 3 \\ 4 & -4 & -4 \\ 5 & 19 & 3 \end{bmatrix}.$$

La adjunta es

$$\text{adj } \mathbf{A} = [c_{ij}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -13 & -4 & 19 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se puede demostrar que si $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ existe y

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj } \mathbf{A}.$$

EJEMPLO 3

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *determine* $\mathbf{A}^{-1}$.

Se encuentra que

$$|\mathbf{A}| = 32 \neq 0.$$

Por ello, existe $\mathbf{A}^{-1}$. También, del Ejemplo 2,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -13 & -4 & 19 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj } \mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -13 & -4 & 19 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{32} & \frac{1}{8} & \frac{5}{32} \\ -\frac{13}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{19}{32} \\ \frac{3}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{32} \end{bmatrix}.$$

Debe verificarse que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

EJEMPLO 4

Determine $\mathbf{A}^{-1}$ *si* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

En primer lugar se obtienen los cofactores de **A**.

$$c_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 18.$$

$$c_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = 41.$$

$$c_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

$$c_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = -8.$$

$$c_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

$$c_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Dado que la inversa de **A** implica $|\mathbf{A}|$, se calcula $|\mathbf{A}|$. Ya se tienen los cofactores, de modo que se halla $|\mathbf{A}|$, desarrollando sobre el primer renglón.

$$|\mathbf{A}| = (1)(18) + 0 + (-2)(10) = -2.$$

La matriz de cofactores es

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 18 & 41 & 10 \\ -4 & -8 & -2 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix},$$

y la adjunta, $[c_{ij}]^{\mathrm{T}}$:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & -4 & -4 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\text{adj } \mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 18 & -4 & -4 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

También en el Ejemplo 3(a) de la Sección 8.6, se obtuvo este mismo resultado mediante el procedimiento de reducción.

EJEMPLO 5

Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ *si* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}$.

Dado que $|\mathbf{A}| = (\frac{4}{5})(\frac{13}{15}) - (-\frac{1}{3})(-\frac{3}{10}) = \frac{89}{150} \neq 0$, $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Los cofactores son (las barras verticales denotan determinantes y no valor absoluto):

$$c_{11} = (-1)^2\left|\tfrac{13}{15}\right| = \tfrac{13}{15}, \quad c_{12} = (-1)^3\left|-\tfrac{3}{10}\right| = \tfrac{3}{10},$$

$$c_{21} = (-1)^3\left|-\tfrac{1}{3}\right| = \tfrac{1}{3}, \quad c_{22} = (-1)^4\left|\tfrac{4}{5}\right| = \tfrac{4}{5}.$$

La matriz de cofactores es

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{13}{15} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

y la adjunta es

$$\text{adj } \mathbf{A} = [c_{ij}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj } \mathbf{A} = \frac{150}{89}\begin{bmatrix} \frac{13}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS 8.9

En los Problemas **1-12**, *utilice las adjuntas para obtener las inversas.*

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$.

13. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, pruebe que, $[c_{ij}] = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ y $\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

8.10 Análisis de insumo-producción (o insumo-producto)

Las matrices de insumo-producción o insumo-producto, desarrolladas por Wassily W. Leontief* de Harvard, señalan las interrelaciones de oferta y demanda que existen entre los diversos sectores de una economía durante cierto periodo. Se utiliza la frase "insumo-producción" porque las matrices muestran los valores de la producción de cada industria que se vende como insumo a cada una de las industrias de la economía y para uso final por parte de los consumidores.

En la matriz de insumo-producción que aparece enseguida se muestra un ejemplo hipotético de una economía simplificada en la que sólo participan dos industrias. Antes de explicar la matriz, es necesario decir que se puede considerar que los sectores *industriales* son manufacturas, siderurgia (acero), agricultura, minería (carbón), etc. El sector de *otros factores de producción* está formado por los costos en los que incurren las industrias respectivas, tales como mano de obra, utilidades, etc. El sector *demanda final* podría ser el consumo en los hogares, el gobierno, etcétera.

	Consumidores (insumos)			
	Industria A	Industria B	Demanda final	
Fabricantes (producción):				*Totales*
Industria A	240	500	460	1200
Industria B	360	200	940	1500
Otros factores de producción	600	800	—	
Totales	1200	1500		

Cada una de las industrias aparece en un renglón y en una columna. En el renglón se muestran las compras que cada sector industrial hace de la producción de cada industria y las compras que hacen los consumidores para uso final (de aquí el término "demanda final"). Los registros representan el valor de los productos y pueden estar dados en unidades de millones de unidades monetarias de producto. Por ejemplo, del total de la producción de la industria A, 240 unidades sirvieron de insumo a la misma industria A (para su uso interno), 500 pasaron a la industria B, y 460 llegaron en forma directa al sector de demanda final. La producción total de A es la suma de la demanda industrial y de la demanda final (240 + 500 + 460 = 1200).

Cada columna de industria da el valor de lo que esa industria adquirió para insumo de cada una de las otras, y también lo que se invirtió en otros costos. Por ejemplo, con el objeto de fabricar 1200 unidades, A adquirió 240 unidades de producción, 360 unidades de la producción de B, e incurrió en otros costos, como mano de obra, por 600 unidades.

* Leontief recibió en 1973 el Premio Nobel de Economía por el desarrollo del método de "insumo-producción" y sus aplicaciones a problemas económicos.

Obsérvese que para cada industria, la suma de los registros o anotaciones en su renglón es igual a la suma de las anotaciones en su columna. Es decir, el valor total de la producción de A es igual al valor de los insumos totales de A.

El ánalisis de insumo-producción permite estimar la producción total de cada sector *industrial* si existe un cambio en la demanda final, *todo esto en el caso de que la estructura básica de la economía permanezca igual.* Esta importante suposición significa que, para cada industria, debe permanecer fija la cantidad invertida en cada uno de los insumos por cada unidad monetaria invertida.

Por ejemplo, al fabricar productos por 1200 unidades, la industria A adquiere 240 de sus propias unidades, 360 unidades de la industria B, e invierte 600 unidades en otros costos. Por consiguiente, por cada unidad monetaria de producción, la industria A invierte $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ (= \$0.20) en sí misma, $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$ (= \$0.30) en B y $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ (= \$0.50) en otros costos. Combinando estas proporciones fijas de la industria A con las de la industria B, se pueden obtener los requisitos de insumo, por unidad monetaria de producción para cada industria.

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Otros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\ \frac{600}{1200} & \frac{800}{1500} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Otros} \end{array}$$

Los elementos de la matriz se denominan *coeficientes de insumo-producción*. La suma de cada columna es 1.

Ahora bien, supóngase que el valor final de la demanda cambia de 460 a 500 para la industria A, y de 940 a 1200 para la industria B. Se desearía estimar el valor de la producción *total* que deben producir A y B para que ambas industrias y la demanda final satisfagan esta meta, suponiendo que la estructura de la matriz precedente permanece igual.

Sean X_A y X_B, los nuevos valores de las producciones totales de las industrias A y B, respectivamente. Puesto que

$$\begin{array}{c} \text{valor total} \\ \text{de la producción} \\ \text{de A} \end{array} = \begin{array}{c} \text{valor de} \\ \text{lo consumido} \\ \text{por A} \end{array} + \begin{array}{c} \text{valor de} \\ \text{lo consumido} \\ \text{por B} \end{array} + \begin{array}{c} \text{valor de lo} \\ \text{consumido por} \\ \text{la demanda final} \end{array}$$

se tiene que

$$X_A = \tfrac{1}{5}X_A + \tfrac{1}{3}X_B + 500.$$

De manera similar,

$$X_B = \tfrac{3}{10}X_A + \tfrac{2}{15}X_B + 1200.$$

En notación matricial,

$$\begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sean

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}.$$

A **X** se le denomina **matriz de producción**, a **A**, **matriz de coeficientes**; y a **C**, **matriz de demanda final**. De la Ecuación (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{C}.$$

Si **I** es la matriz identidad 2×2, entonces

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Si existe $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces

$$\boxed{\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}.}$$

A la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se le denomina *matriz de Leontief*. Ahora bien,

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$$

Del Ejemplo 5 de la Sección 8.9,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la matriz de producción es

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{bmatrix}.$$

Por ello, para alcanzar la meta la industria A debe fabricar 1404.49 unidades de valor y la industria B debe fabricar 1870.79. Si interesara el valor de los otros factores de producción para A, por ejemplo P_A, entonces

$$P_A = \tfrac{1}{2}X_A = 702.25.$$

EJEMPLO 1

Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, supóngase que la demanda final cambia a 77 para A, a 154 para B y a 231 para C. Determinar la matriz de producción para la economía. (Las anotaciones están en millones de unidades monetarias).

	Industria			Demanda final
	A	B	C	
Industria: A	240	180	144	36
B	120	36	48	156
C	120	72	48	240
Otros	120	72	240	—

En forma separada se anotan los datos de los primeros tres renglones. El valor total de la producción para las industrias A, B y C, es 600, 360 y 480, respectivamente. Para obtener la matriz de coeficientes se dividen los datos que aparecen en cada una de las columnas de industria entre el valor total de la producción de esa industria.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

De modo que, si $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de 3×3,

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}.$$

Se evalúa $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ utilizando la adjunta. Calculando los cofactores, se tiene que

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \frac{79}{100},$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \frac{1}{5},$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{11}{50}.$$

En este punto puede evaluarse $|\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ sobre el renglón 1 utilizando cofactores.

$$|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \tfrac{3}{5}(\tfrac{79}{100}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{5}) - \tfrac{3}{10}(\tfrac{11}{50}) = \tfrac{77}{250}.$$

Luego se obtiene

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \frac{51}{100},$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \frac{12}{25},$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{11}{50},$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = \frac{8}{25},$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = \frac{3}{25},$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{vmatrix} = \frac{11}{25}.$$

En consecuencia,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I} - \mathbf{A}|}\,\text{adj}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$= \frac{250}{77}\begin{bmatrix} \frac{79}{100} & \frac{51}{100} & \frac{8}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{12}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{11}{50} & \frac{11}{50} & \frac{11}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{395}{154} & \frac{255}{154} & \frac{80}{77} \\ \frac{50}{77} & \frac{120}{77} & \frac{30}{77} \\ \frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

De donde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{395}{154} & \frac{255}{154} & \frac{80}{77} \\ \frac{50}{77} & \frac{120}{77} & \frac{30}{77} \\ \frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS 8.10

1. Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a 600 para A y a 805 para B. Obtenga el valor total de los otros costos de producción que ello implica.

	Industria A	Industria B	Demanda final
Industria: A	200	500	500
B	400	200	900
Otros	600	800	—

2. Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, determine la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 200 para A y 300 para B; (b) 64 para A y 64 para B.

	Industria A	Industria B	Demanda final
Industria: A	40	120	40
B	120	90	90
Otros	40	90	—

3. Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, halle la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 50 para A, 40 para B y 30 para C; (b) 10 para A, 10 para B y 24 para C.

	Industria A	Industria B	Industria C	Demanda final
Industria: A	18	30	45	15
B	27	30	60	3
C	54	40	60	26
Otros	9	20	15	—

4. Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, obtenga la matriz de producción si la demanda final cambia a 300 para A, 200 para E y 400 para C.

	Industria A	Industria B	Industria C	Demanda final
Industria: A	100	400	240	260
B	100	80	480	140
C	300	160	240	500
Otros	500	160	240	—

8.11 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 8.1 matriz orden elemento a_{ij} $[a_{ij}]$ matriz renglón matriz columna igualdad de matrices matriz cero, **O** matriz cuadrada diagonal principal matriz triangular superior (inferior)

Sección 8.2 multiplicación por un escalar adición y sustracción de matrices

Sección 8.3 multiplicación de matrices matriz identidad, **I**

Sección 8.4 matriz de coeficientes matriz de coeficientes aumentada operación elemental sobre renglones matrices equivalentes matriz reducida parámetro

Sección 8.5 sistema homogéneo sistema no homogéneo solución trivial

Sección 8.6 matriz inversa matriz invertible (no singular) matriz elemental

Sección 8.7 determinante de una matriz menor de un elemento cofactor de un elemento

Sección 8.8 regla de Cramer

Sección 8.9 transpuesta de una matriz, $\mathbf{A}^T$ adjunta de una matriz, adj **A**

Sección 8.10 matriz de insumo-producción

RESUMEN

Una matriz es un arreglo rectangular de números puesto entre corchetes. Tres tipos especiales de matrices son la matriz **O**, la matriz cuadrada y la matriz identidad **I**. Además de la operación básica de multiplicación por un escalar, existen las operaciones de adición y sustracción de matrices que se aplican a matrices que tienen el mismo orden. El producto **AB** está definido cuando el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B**. Aun cuando la adición de matrices es conmutativa, la multiplicación no lo es. Utilizando multiplicación de matrices, se puede expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma de la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución, o una cantidad infinita de ellas. Tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales son: (1) Mediante las tres operaciones elementales sobre renglones, (2) por medio de la matriz inversa y (3) por determinantes. El primer método requiere aplicar operaciones elementales sobre renglones a la matriz de coeficientes aumentada del sistema hasta obtener una matriz reducida equivalente. La matriz reducida representa de manera evidente la solución (o soluciones) para el sistema (suponiendo que existen soluciones). Si existe una cantidad infinita de soluciones, la solución general implica cuando menos un parámetro.

El segundo método para resolver sistemas de ecuaciones lineales implica la utilización de inversas. La inversa (si existe) de una matriz cuadrada **A** es la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Si **A** es invertible, se puede obtener $\mathbf{A}^{-1}$ aumentando **A** con **I** y aplicando operaciones elementales sobre renglones hasta que **A** se reduce a **I**. El resultado de aplicar las mismas operaciones elementales sobre renglones a **I** es $\mathbf{A}^{-1}$. Es posible utilizar la inversa de una matriz para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, dado que $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$, suponiendo que la matriz de coeficientes **A** es invertible. La solución única está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$. Si **A** no es invertible, el sistema no tiene ninguna solución o tiene una cantidad infinita de ellas.

El tercer método para resolver sistemas de ecuaciones lineales implica la utilización de determinantes y se conoce como la regla de Cramer. Se aplica a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas cuando el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

Se emplean determinantes y adjuntas para obtener la inversa de la matriz. Si $|\mathbf{A} \neq 0$, entonces existe $\mathbf{A}^{-1}$ y

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj } \mathbf{A}.$$

La aplicación final de las matrices se refirió a las relaciones que existen entre los diversos sectores de una economía y se conoce como análisis de insumo-producción.

PROBLEMAS DE REPASO

Simplifique en los Problemas **1-6.**

1. $3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

6. $-\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\right)$.

En los Problemas **7** *y* **8,** *determine los valores de x y y.*

7. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix} 15 \\ y \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}$.

En los Problemas **9-12,** *reduzca las matrices dadas.*

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En los Problemas **13-16,** *resuelva cada uno de los sistemas mediante el método de reducción.*

13. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 4x + 3y = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 3x - 2y - 4z = -7, \\ 2x - y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x + z + 3 = 0. \end{cases}$

En los Problemas **17-20,** *determine las inversas de las matrices mediante reducción.*

17. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

En los Problemas **21** *y* **22,** *resuelva los sistemas dados obteniendo la inversa de la matriz de coeficientes.*

21. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 1, \\ x + z = 0, \\ 2y + z = 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

En los Problemas **23-28,** *evalúe los determinantes.*

23. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} r & p & q & a \\ 0 & i & j & m \\ 0 & 0 & c & n \\ 0 & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ a & r & 0 & 0 \\ p & j & n & 0 \\ s & k & t & i \end{vmatrix}$.

Resuelva los sistemas de los Problemas **29** *y* **30** *utilizando la regla de Cramer.*

29. $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ y + 4z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$

En los Problemas **31** *y* **32,** *utilice la adjunta para hallar la inversa de cada matriz.*

31. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

32. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

33. Dada la matriz de insumo-producción que aparece enseguida, obtenga la matriz de producción si la demanda final cambia a 2 para A y a 2 para B. (Los datos están en decenas de millares de millones de dólares.)

	Industria		Demanda final
	A	B	
Industria: A	0	2	1
B	1	0	3
Otros	2	2	—

APLICACIÓN PRÁCTICA

Los requisitos de administración de insulina como un proceso lineal*

Un albergue u hotel ubicado en las montañas del estado de Washington (en Estados Unidos) tiene una muy merecida fama de atender las necesidades especiales de cuidado de la salud de sus huéspedes. El gerente del hotel espera cuatro huéspedes para la semana próxima; los cuatro padecen diabetes y dependen de la insulina. Estos huéspedes tienen planes para permanecer en el hotel 7, 14, 21 y 28 días respectivamente.

El hotel está un tanto lejos de la farmacia más cercana, por lo que el administrador planea obtener toda la insulina necesaria antes de la llegada de los huéspedes. Se requieren tres tipos de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. El administrador almacerará la insulina y el personal del hotel proporcionará las dosis diarias de los tres tipos de insulina a cada uno de los huéspedes.

Los requisitos diarios para cada huésped son:

Huésped 1: 20 unidades (u.) de insulina semilenta, 30 (u.) de lenta y 10 (u.) de ultralenta;

Huésped 2: 40 (u.) de insulina semilenta, 0 (u.) de lenta y 0 (u.) de ultralenta;

Huésped 3: 30 (u.) de insulina semilenta, 10 (u.) de lenta y 30 (u.) de ultralenta;

Huésped 4: 10 (u.) de insulina semilenta, 10 (u.) de lenta y 50 (u.) de ultralenta.

Esta información se representa mediante la siguiente matriz **A** de "requisitos":

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ en donde **A** está dada por

	Huésped 1	Huésped 2	Huésped 3	Huésped 4
insulina semilenta	20	40	30	10
insulina lenta	30	0	10	10
insulina ultralenta	10	0	30	50

Recuérdese que el Huésped 1 permanecerá 7 días; el huésped 2, 14 días, el Huésped 3, 21 días; y el Huésped 4, 28 días. Se puede utilizar la siguiente matriz columna **T** para representar el tiempo, en días, que cada huésped permanecerá en el hotel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Para determinar los montos totales de los diferentes tipos de insulina que los cuatro huéspedes requieren se calcula la matriz producto **AT.**

$$\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$= 10(7) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= 70 \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

La matriz **B** (o **AT**) indica que se requieren, para los cuatro un total de 1,610 unidades (u.) de insulina semilenta, 700 (u.) de insulina lenta y 2,100 (u.) de ultralenta.

Ahora se cambiará un poco el problema. Supóngase que cada huésped decide duplicar la duración original de su estancia. La matriz resultante que da la cantidad total de insulina semilenta, lenta y ultralenta es

$$\mathbf{A}(2\mathbf{T}) = 2(\mathbf{AT}) = 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{bmatrix}.$$

De hecho, si cada huésped tuviera intención de quedarse en el hotel durante un múltiplo $k (k \geq 0)$ del tiempo original (es decir, que el Huésped 1 pensara quedarse $k \cdot 7$ días; el Huésped 2, $k \cdot 14$ días, etcétera), entonces los requisitos de insulina serían

$$\mathbf{A} \cdot (k\mathbf{T}) = k(\mathbf{AT}) = k\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k \cdot 1610 \\ k \cdot 700 \\ k \cdot 2100 \end{bmatrix}.$$

De manera similar, si los huéspedes decidieran añadir 1, 3, 4 y 6 días a los tiempos originalmente planeados, entonces las cantidades de insulina que se requerirían serían

$$\mathbf{A}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_1) = \mathbf{AT} + \mathbf{AT}_1, \qquad \text{donde } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Con base en los resultados obtenidos hasta aquí, resulta evidente que la ecuación matricial siguiente es una generalización del caso.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

que representa al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 = b_1, \\ 30x_1 + 10x_3 + 10x_4 = b_2, \\ 10x_1 + 30x_3 + 50x_4 = b_3, \end{cases}$$

en donde x_i es el número de días que el Huésped i permanecerá en el hotel y b_1, b_2, b_3 dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta que cada uno de los huéspedes necesita para todo su tiempo de estancia.

Finalmente, supóngase de nuevo que la matriz **T** representa el número de días que cada huésped planeaba quedarse en el albergue originalmente. Supóngase, además, que la matriz **C** da el costo (en centavos de dólar, ¢) por unidad de cada uno de los tres tipos de insulina, en donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \text{matriz de costos}$$

Es decir, una unidad de semilenta cuesta 9 ¢, una unidad de lenta cuesta 8 ¢, y una unidad de ultralenta, 10 ¢. Entonces, la cantidad total que el hotel paga por toda la insulina que los cuatro huéspedes requieren es

$$\mathbf{C}^T(\mathbf{AT}) = \mathbf{C}^T\mathbf{B} = [9 \quad 8 \quad 10] \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = [41{,}090],$$

es decir, 41,090 ¢, o sea $410.90.

EJERCICIOS

1. Supóngase que el Huésped 1 permanecerá en el hotel 7 días; el Huésped 2, 10 días; el Huésped 3, 7 días, y el Huésped 4, 5 días. Supóngase también que los requisitos diarios y la matriz de costos son los mismos que antes. Determine la cantidad total (en dólares) que debe pagar el hotel por toda la insulina que requieren los huéspedes.

2. Supóngase además que el Huésped 1 estará en el hotel 4 días; el Huésped 2, durante 7 días, y el Huésped 3 durante 10 días. El Huésped 4 cambia de planes y no se hospedará en el hotel. Supóngase que los requisitos diarios de los tres huéspedes y la matriz de costos son los mismos que antes. Determine la cantidad total (en dólares) que el hotel debe pagar por toda la insulina que requieren los huéspedes.

CAPÍTULO 9

Programación lineal

9.1 Desigualdades lineales con dos variables

Supóngase que un consumidor obtiene ingresos fijos de \$60 por semana y los utiliza en su totalidad para adquirir los productos A y B. Si x kilogramos de A cuestan \$2 por kilogramo y y kilogramos de B cuestan \$3 por kilogramo, entonces las posibles combinaciones de A y B que se pueden adquirir deben satisfacer la *ecuación presupuestal* del consumidor

$$2x + 3y = 60, \quad \text{en donde } x, y \geq 0.$$

La solución se representa mediante la *línea de presupuesto* de la Figura 9.1. Por ejemplo, si se compran 15 kilogramos de A con un costo total de \$30, entonces se deben adquirir 10 kilogramos de B, a un costo total de \$30. Por ello, (15, 10) queda sobre la recta.

Por otro lado, supóngase que el consumidor no desea invertir necesariamente la *totalidad* de sus ingresos. En este caso, las posibles combinaciones quedan descritas mediante la siguiente desigualdad:

$$2x + 3y \leq 60, \quad \text{en donde } x, y \geq 0. \tag{1}$$

Al analizar las desigualdades con una variable en el Capítulo 3, se representaron sus soluciones en forma geométrica mediante *intervalos* sobre la recta de los números reales. Sin embargo, para una desigualdad con dos variables, tal como la desigualdad

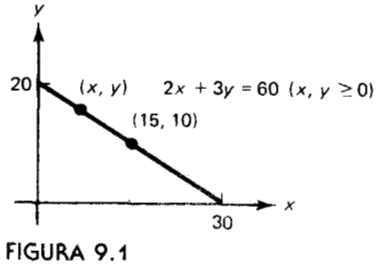


FIGURA 9.1

(1), es común representar la solución mediante una *región* del plano coordenado. Se procederá a determinar la región que corresponde a la desigualdad (1) después de considerar ese tipo de desigualdades en general.

DEFINICIÓN

*Una **desigualdad lineal** en las variables x y y es una desigualdad que puede escribirse de la siguiente forma*

$$ax + by + c < 0 \quad (o\ bien \leq 0, \geq 0, > 0),$$

en donde a, b y c son constantes y a y b no son cero.

En términos geométricos, la solución de una desigualdad lineal en x y y consiste en todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad. En particular, la gráfica de una recta $y = mx + b$ no vertical divide el plano en tres partes distintas (véase la Figura 9.2):

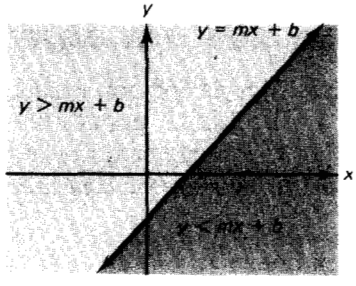


FIGURA 9.2

1. la recta misma, que consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen, $y = mx + b$;
2. la región que se encuentra por encima de la recta, y que consiste en todos los puntos (x, y) que satisfacen $y > mx + b$;
3. la región que se encuentra por debajo de la recta, y que consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen $y < mx + b$.

Para una recta vertical $x = a$, se habla de las regiones que se encuentran a su derecha $(x > a)$ o a su izquierda $(x < a)$ (véase la Figura 9.3).

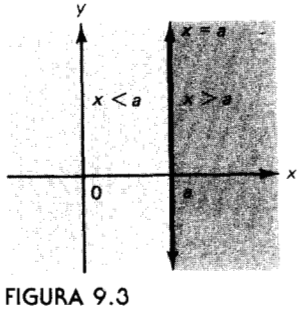


FIGURA 9.3

Para aplicar estos datos, se resolverá $2x + y < 5$. En primer lugar, se traza la *recta* correspondiente $2x + y = 5$, marcando dos puntos de ella, por ejemplo las intersecciones con los ejes $(\frac{5}{2}, 0)$ y $(0, 5)$, Figura 9.4. Escribiendo la desigualdad en la forma equivalente $y < 5 - 2x$, se concluye del punto (3) anterior que la solución consiste en todos los puntos que se encuentran por debajo de la recta. Una parte de esta región aparece sombreada en el diagrama. Por consiguiente, si (x_0, y_0) es *cualquier* punto de esta región, entonces su ordenada y_0 es menor que el número $5 - 2x_0$ (Figura 9.5). Por ejemplo, $(-2, -1)$ se encuentra en esa región y se cumple que $-1 < 5 - 2(-2)$. Si se hubiera requerido que $y \leq 5 - 2x$, la recta $y = 5 - 2x$ hubiera sido incluida también en la solución, como se indica mediante la recta continua de la Figura 9.6. En lo sucesivo, se adoptan las convenciones de que las **rectas de trazo lleno *se* incluyen en la solución y las rectas punteadas *no* se incluyen.**

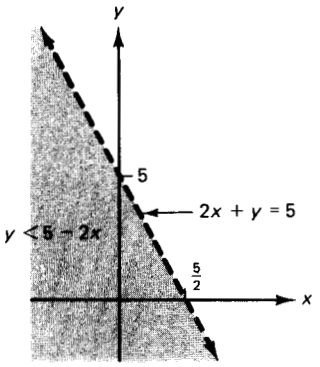


FIGURA 9.4

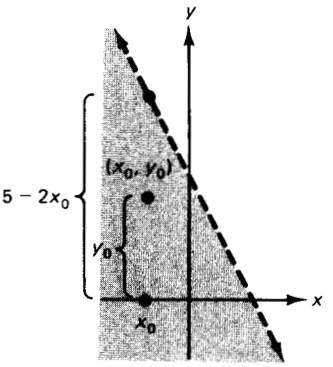


FIGURA 9.5

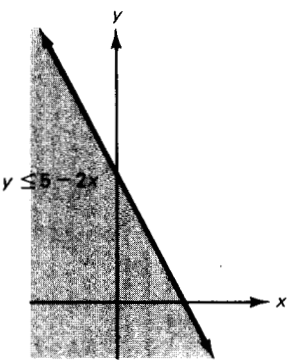


FIGURA 9.6

EJEMPLO 1

a. *Determinar la región descrita por* $y \leq 5$.

Puesto que x no aparece, se supone que la desigualdad es cierta para cualquier valor de x. La solución consiste en la recta $y = 5$ y la región que se encuentra por debajo de ella (véase la Figura 9.7), debido a que la coordenada y de cada uno de los puntos de esa región es inferior a 5.

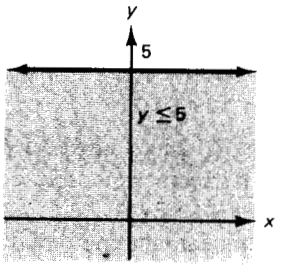


FIGURA 9.7

b. *Resolver* $2(2x - y) < 2(x + y) - 4$.

La desigualdad es equivalente a

$$4x - 2y < 2x + 2y - 4,$$
$$-4y < -2x - 4,$$
$$y > \frac{x}{2} + 1.$$

En el último paso se dividieron ambos miembros entre -4 y se invirtió el sentido de la desigualdad. Ahora se traza la recta $y = (x/2) + 1$, observando que sus intersecciones con los ejes son $(0, 1)$ y $(-2, 0)$. Después se sombrea la región que está por encima de ella (véase la Figura 9.8). Cada uno de los puntos de esta región es una solución.

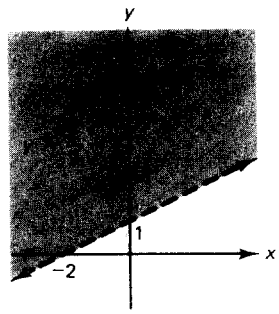


FIGURA 9.8

La solución de un *sistema* de desigualdades consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente todas las desigualdades dadas. En términos geométricos, es la región común a todas las regiones determinadas por cada una de las desigualdades. Por ejemplo, resuélvase el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y > 3, \\ x \geq y, \\ 2y - 1 > 0. \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} y > -2x + 3, \\ y \leq x, \\ y > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Obsérvese que se ha escrito cada desigualdad de manera que y queda despejada. En consecuencia, las regiones apropiadas con respecto a las rectas correspondientes resultarán evidentes. En primer lugar se trazan las rectas $y = -2x + 3$, $y = x$ y $y = \frac{1}{2}$ y después se sombrea la región que se encuentra simultáneamente por encima de la primera recta, sobre o por debajo de la segunda de ellas y por encima de la tercera (véase la Figura 9.9). Esta región es la solución. Al trazar las rectas, **lo mejor es usar línea punteada en todos los casos hasta que resulte evidente qué porciones de ellas se deben incluir en la solución.**

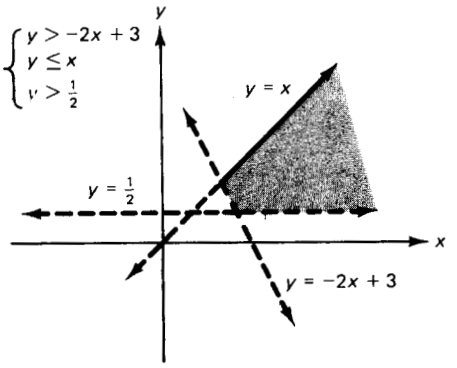


FIGURA 9.9

EJEMPLO 2

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y \geq -2x + 10, \\ y \geq x - 2. \end{cases}$$

La solución consiste en todos los puntos que se encuentran al mismo tiempo sobre o por encima de la recta $y = -2x + 10$ y sobre o por encima de la recta $y = x - 2$. Esta es la región sombreada en la Figura 9.10.

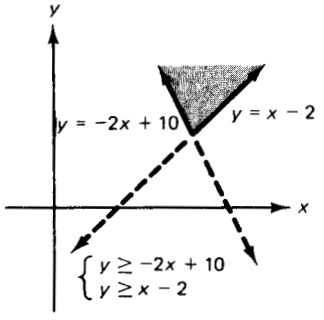


FIGURA 9.10

EJEMPLO 3

Hallar la región descrita por

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Este sistema relaciona la desigualdad (1) del análisis de las líneas de presupuesto que se presentó al principio de esta sección. Las últimas dos desigualdades restringen la solución a los puntos que están sobre o a la derecha del eje y, así como también sobre

o por encima del eje x. La región que se desea es la que aparece sombreada en la Figura 9.11.

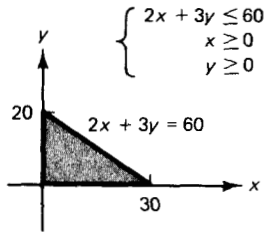


FIGURA 9.11

EJERCICIOS 9.1

En los Problemas **1-24**, *esboce la región descrita por las desigualdades.*

1. $2x + 3y > 6$.

2. $3x - 2y \ge 12$.

3. $x + 2y \le 7$.

4. $y > 6 - 2x$.

5. $-x \le 2y - 4$.

6. $2x + y \ge 10$.

7. $3x + y < 0$.

8. $x + 5y < -5$.

9. $\begin{cases} 3x - 2y < 6, \\ x - 3y > 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y > -6, \\ 3x - y < 6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y \le 6, \\ x \ge 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2y - 3x < 6, \\ x < 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - 3x < 6, \\ x - y > -3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y < 1, \\ y - x < 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 2 \ge y, \\ 2x \le 3 - 2y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2y < 4x + 2, \\ y < 2x + 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y > 4, \\ x < 2, \\ y > -5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y < -1, \\ y > -x, \\ 2x + 6 < 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y < 2x + 4, \\ x \ge -2, \\ y < 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x + 3y \ge 12, \\ y \ge x, \\ 2y \le 3x + 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y > 1, \\ 3x - 5 \le y, \\ y < 2x. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x - 3y > -12, \\ 3x + y > -6, \\ y > x. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + y > -6, \\ x - y > -5, \\ x \ge 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5y - 2x \le 10, \\ 4x - 6y \le 12, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Si un consumidor no desea gastar más de P unidades monetarias (u.m.) en la compra de cantidades x y y de dos productos que tienen precios p_1 y p_2 u.m. por unidad, respectivamente, entonces $p_1x + p_2y \le P$ en donde $x, y \ge 0$. En los Problemas **25** *y* **26**, *obtenga geométricamente las posibles combinaciones de compras, determinando la solución de este sistema para los valores dados de p_1, p_2 y P.*

25. $p_1 = 5, p_2 = 3, P = 15$.

26. $p_1 = 6, p_2 = 4, P = 24$.

27. Si un fabricante desea comprar un *total* de no más de 100 libras del producto Z de los proveedores A y B, plantear un sistema de desigualdades que describa las combinaciones posibles de las cantidades que se pueden comprar con cada proveedor. Grafique la solución en un plano.

9.2 Programación lineal

En ocasiones se desea maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas *restricciones*. Por ejemplo, un fabricante quizá desee maximizar una función de utilidad sujeta a restricciones de producción impuestas por limitaciones en el uso de la maquinaria y la mano de obra.

Ahora se considerará la forma en que pueden resolverse problemas de este tipo cuando es *lineal* la función que se desea maximizar o minimizar. Una **función lineal en x y y** tiene la forma

$$Z = ax + by,$$

en donde a y b son constantes. También se requerirá que las restricciones correspondientes estén representadas mediante un sistema de desigualdades lineales (que implican "$\leq$" o bien "$\geq$") o ecuaciones lineales en x y y, y que todas las variables sean no negativas. A un problema en el que intervienen todas estas condiciones se le denomina *problema de programación lineal*.

La programación lineal fue desarrollada por George B. Danzig a fines de la década de 1940 y se utilizó primero en la Fuerza Aérea de Estados Unidos como auxiliar en la toma de decisiones. En la actualidad tiene amplia aplicación en el análisis industrial y económico.

En un problema de programación lineal a la función que se desea maximizar o minimizar se le denomina **función objetivo**. Aunque por lo general existe una cantidad infinitamente grande de soluciones para el sistema de restricciones (a las que se denomina **soluciones factibles** o **puntos factibles**), el objetivo consiste en encontrar una de esas soluciones que represente una **solución óptima** (es decir, una solución que dé el valor máximo o mínimo de la función objetivo).

Enseguida, se presenta un análisis geométrico de la programación lineal. En la Sección 9.4 se revisa un método matricial que permite trabajar con más de dos variables y, por lo tanto, con una gama más amplia de problemas.

Supóngase que una compañía fabrica dos tipos de artefactos, manuales y eléctricos. Cada uno de ellos requiere en su fabricación el uso de tres máquinas: A, B y C. Un artefacto manual requiere del empleo de la máquina A durante 2 horas, de 1 hora en la máquina B y de 1 hora en la máquina C. Un artefacto eléctrico requiere de 1 hora en A, 2 horas en B y 1 hora en C. Supóngase, además, que el número máximo de horas disponible por mes para el uso de las tres máquinas es 180, 160 y 100, respectivamente. La utilidad que se obtiene con los artefactos manuales es de \$4 y de \$6 para los eléctricos. (Véase la Tabla 9.1 que contiene un resumen de los datos.) Si la compañía vende todos los artefactos que fabrica, ¿cuántos de ellos de cada tipo se deben elaborar con el objeto de maximizar la utilidad mensual?

TABLA 9.1

	A	B	C	Utilidad/ Unidad
Manual	2 h	1 h	1 h	\$4
Eléctrico	1 h	2 h	1 h	6
Horas disponibles	180	160	100	

Para responder esta pregunta se utilizan x y y que denotan los números de artefactos manuales y eléctricos, respectivamente, que se fabrican en el mes. Como el número de artefactos fabricados no puede ser negativo, se tiene que

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

Para la máquina A, el tiempo que se requiere para trabajar en x artefactos manuales es $2x$ horas, y el tiempo necesario para trabajar en y artefactos eléctricos es $1y$ horas. La suma de estos tiempos no puede ser superior a 180, por lo que

$$2x + y \leq 180.$$

De forma análoga, las restricciones para las máquinas B y C dan

$$x + 2y \leq 160 \qquad \text{y} \qquad x + y \leq 100.$$

La utilidad (o ganancia) P es función de x y y, y está dada por la *función de utilidad*:

$$P = 4x + 6y.$$

Resumiendo, se desea maximizar la *función objetivo:*

$$P = 4x + 6y \tag{1}$$

sujeta a la condición de que x y y deben ser una solución para el sistema de restricciones

$$\begin{cases} x \geq 0, & (2) \\ y \geq 0, & (3) \\ 2x + y \leq 180, & (4) \\ x + 2y \leq 160, & (5) \\ x + y \leq 100. & (6) \end{cases}$$

Consecuentemente, se tiene un problema de programación lineal. A las restricciones (2) y (3) se les denomina **condiciones de no negatividad**. La región que satisface de modo simultáneo las restricciones (2) a (6) es la que aparece sombreada en la Figura 9.12. Cada uno de los puntos de esta región representa una solución posible, y a tal región se le denomina **región factible**. Aunque existe una cantidad infinita de soluciones, se debe hallar la que maximice la función de utilidad.

Ya que $P = 4x + 6y$ es equivalente a

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{P}{6},$$

define lo que se denomina como una "familia" de rectas paralelas, cada una de las cuales tiene pendiente $-2/3$ e intercepción y $(0, P/6)$. Por ejemplo, si $P = 600$, entonces se obtiene la recta $y = -\frac{2}{3}x + 100$ que se muestra en la Figura 9.13. Esta recta, a la que se denomina **recta de isoutilidad**, proporciona todas las combinaciones posibles de x y y que arrojan la misma utilidad de \$600. Obsérvese que esta recta de igual utilidad no tiene ningún punto común con la región factible, en tanto que la recta de igual utilidad para $P = 300$ tiene una cantidad infinita de puntos en común. Ahora, se procede a buscar el miembro de la familia que contenga un punto factible y cuyo valor de P sea máximo. *Será la recta cuya ordenada al origen se encuentre lo más aleja-*

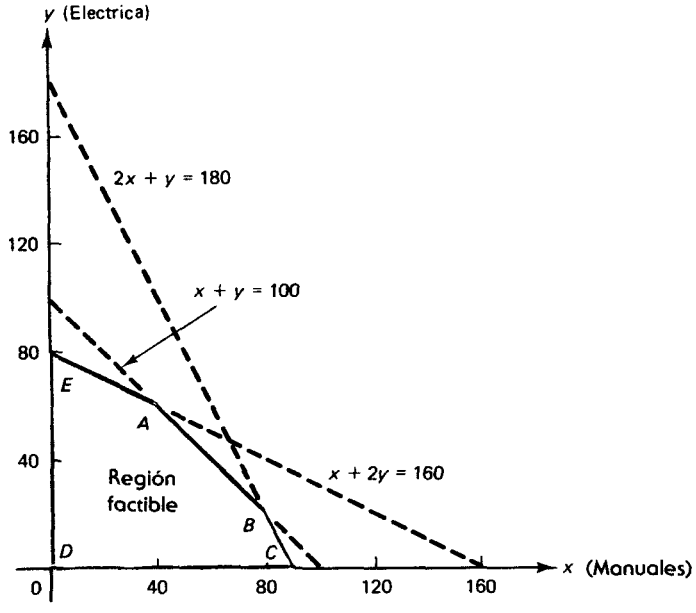


FIGURA 9.12

da de éste (lo cual dará el valor máximo de P) y que tenga cuando menos un punto común con la región factible. No es difícil observar que esa recta contendrá *un vértice A*. Cualquier recta de igual utilidad que represente mayores utilidades no contiene puntos que formen parte de la región factible.

De la Figura 9.12, A queda tanto en la recta $x + y = 100$ como en la recta $x + 2y = 160$. Por ello, se pueden determinar sus coordenadas resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x + 2y = 160. \end{cases}$$

Esto resulta en $x = 40$ y $y = 60$. Sustituyendo estos valores en $P = 4x + 6y$, se encuentra que la máxima utilidad sujeta a las restricciones es \$520, que se obtiene al fabricar 40 artefactos manuales y 60 eléctricos cada mes.

Si se puede abarcar una región factible con un círculo, como la región de la Figura 9.13, se le denomina **región factible acotada**. Si no es posible hacerlo, entonces es **no acotada**. Cuando una región factible contiene cuando menos un punto, se dice que es **no vacía**. Si no fuera así, entonces se le considera **vacía**. Así, la región de la Figura 9.13 es una región factible acotada y no vacía.

Se puede probar que:

> Una función lineal definida sobre una región factible acotada y no vacía tiene un valor máximo (o mínimo) y se puede encontrar este valor en un vértice.

Esta afirmación permite hallar soluciones óptimas sin tener que trazar rectas de isouti-

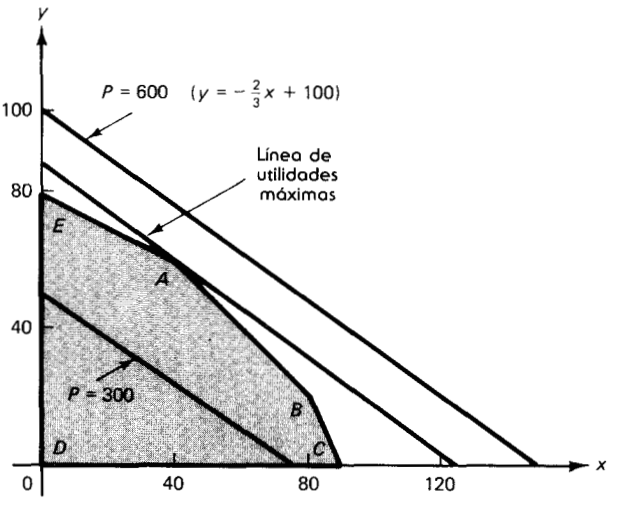


FIGURA 9.13

lidad, como se hizo antes. Se podría evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y después elegir aquél en el que la función resulte óptima.

Por ejemplo, en la Figura 9.13 los vértices son A, B, C, D y E. Ya se obtuvo antes que A es (40, 60). Para determinar B, se observa en la Figura 9.12 que deben resolverse al mismo tiempo $2x + y = 180$ y $x + y = 100$. Haciendo esto se encuentra el punto $B = (80, 20)$. De la misma manera, se obtienen las coordenadas de todos los vértices:

$$A = (40, 60), \quad B = (80, 20), \quad C = (90, 0),$$
$$D = (0, 0), \quad E = (0, 80).$$

Ahora se evaluará la función objetivo $P = 4x + 6y$ en cada punto:

$$P(A) = 4(40) + 6(60) = 520,$$
$$P(B) = 4(80) + 6(20) = 440,$$
$$P(C) = 4(90) + 6(0) = 360,$$
$$P(D) = 4(0) + 6(0) = 0,$$
$$P(E) = 4(0) + 6(80) = 480.$$

Por consiguiente, P tiene un valor máximo de 520 en A, en donde $x = 40$ y $y = 60$.

La solución óptima para los problemas de programación lineal está dada por el punto en el que aparece el valor óptimo de la función objetivo. Se incluye también el valor óptimo de la función objetivo.

EJEMPLO 1

Maximizar la función objetivo $Z = 3x + y$ *sujeta a las restricciones*

$$2x + y \leq 8,$$
$$2x + 3y \leq 12,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

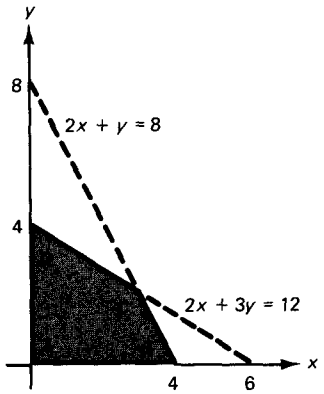


FIGURA 9.14

En la Figura 9.14 se puede ver que la región factible es no vacía y acotada. Por lo tanto, Z es máxima en uno de los cuatro vértices. Las coordenadas de A, B y D son evidentes. Para encontrar C se resuelven las ecuaciones $2x + y = 8$ y $2x + 3y = 12$ simultáneamente, lo que da como resultado $x = 3$, $y = 2$. En consecuencia,

$$A = (0, 0), \qquad B = (4, 0), \qquad C = (3, 2), \qquad D = (0, 4).$$

Evaluando Z en estos puntos, se obtiene

$$Z(A) = 3(0) + 0 = 0,$$
$$Z(B) = 3(4) + 0 = 12,$$
$$Z(C) = 3(3) + 2 = 11,$$
$$Z(D) = 3(0) + 4 = 4.$$

Consecuentemente, el valor máximo de Z, sujeto a las restricciones, es 12 y se presenta cuando $x = 4$ y $y = 0$.

EJEMPLO 2

Minimizar la función objetivo $Z = 8x - 3y$ *con sujeción a las restricciones*

$$-x + 3y = 21,$$
$$x + y \leq 5,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

Obsérvese que la primera restricción, $-x + 3y = 21$ es una *igualdad.* Las porciones de las rectas $-x + 3y = 21$ y $x + y = 5$ para las cuales $x \geq 0$ y $y \geq 0$ se muestran en la Figura 9.15. Se les conservará como rectas punteadas hasta determinar si se les ha de incluir o no en la región factible. Un punto factible (x, y) debe cumplir que $x \geq 0$, $y \geq 0$, y quedar tanto en la recta punteada superior como sobre o por debajo de la recta punteada inferior. Sin embargo, no existe ningún punto que cumpla estas

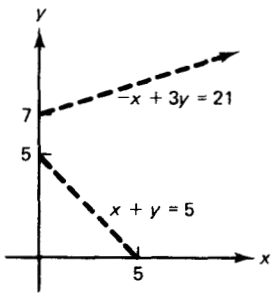


FIGURA 9.15

condiciones. Por ello, la región factible es *vacía* y por consiguiente el problema *no* tiene solución óptima.

El resultado del Ejemplo 2 puede plantearse en términos más generales:

> Siempre que la región factible de un problema de programación lineal sea vacía, no existe solución óptima.

Supóngase que una región factible está definida por

$$y = 2, \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

Esta región es la porción de la recta horizontal $y = 2$ que se indica en la Figura 9.16.

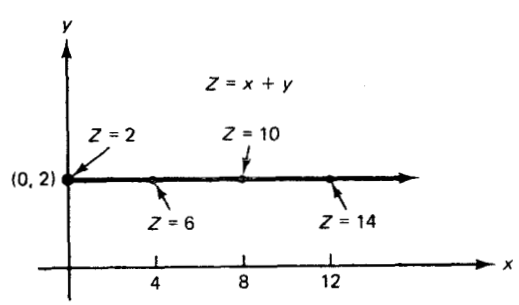


FIGURA 9.16

Puesto que la región no puede delimitarse en un círculo, es *no acotada*. Considérese la maximización de

$$Z = x + y$$

con sujeción a las restricciones anteriores. En virtud de que $y = 2$, entonces $Z = x + 2$. Es claro que conforme x aumenta sin ningún límite, igualmente lo hace Z. Consecuentemente, ningún punto factible maximiza Z y, de esta manera, no existe ninguna solución óptima. En este caso se dice que la solución es "no acotada". Por otro lado, supóngase que se desea *minimizar* $Z = x + y$ en la misma región. Dado que $Z = x + 2$,

entonces Z es mínima cuando x es lo más reducida posible; es decir, cuando $x = 0$. Esto proporciona un valor mínimo de $Z = x + y = 0 + 2 = 2$, y la solución óptima es el vértice (0, 2).

En general, se puede demostrar que:

> Si una región factible es no acotada, y si la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces ese valor aparece en un vértice.

EJEMPLO 3

Un granjero va a comprar fertilizante que contiene tres ingredientes nutritivos A, B y C. Las necesidades mínimas son 160 unidades de A, 200 de B y 80 de C. Existen en el mercado dos marcas populares de fertilizante. El llamado "Crecimiento Rápido" cuesta \$4 *el costal y contiene* 3 *unidades de A,* 5 *de B y* 1 *de C. El denominado "Crecimiento Normal", cuesta* \$3 *el costal y contiene 2 unidades de cada ingrediente. Si el granjero desea minimizar el costo al tiempo que mantiene el mínimo de los ingredientes nutritivos que se requieren, ¿cuántos costales de cada marca debe comprar? La información se resume de la siguiente manera:*

	A	B	C	Costo/Costal
"Crecimiento Rápido"	3 unidades	5 unidades	1 unidad	\$4
"Crecimiento Normal"	2 unidades	2 unidades	2 unidades	3
Unidades que se requieren	160	200	80	

Sean x el número de costales que se compran de "Crecimiento Rápido" y y el número de costales de "Crecimiento Normal". En este caso, se desea *minimizar* la función de costo

$$C = 4x + 3y \tag{7}$$

sujeta a las restricciones

$$x \geq 0, \tag{8}$$

$$y \geq 0, \tag{9}$$

$$3x + 2y \geq 160, \tag{10}$$

$$5x + 2y \geq 200, \tag{11}$$

$$x + 2y \geq 80. \tag{12}$$

La región factible que satisface las restricciones (8) a (12) es la que se muestra sombreada en la Figura 9.17, junto con *rectas de igual costo* para $C = 200$ y $C = 300$. La región factible es no acotada. El miembro de la familia de rectas $C = 4x + 3y$ que ofrece el costo mínimo, sujeto a las restricciones, corta a la región factible en el vértice B. Aquí, se elige la recta de igual costo cuya ordenada en el origen está *más cercana* a este último

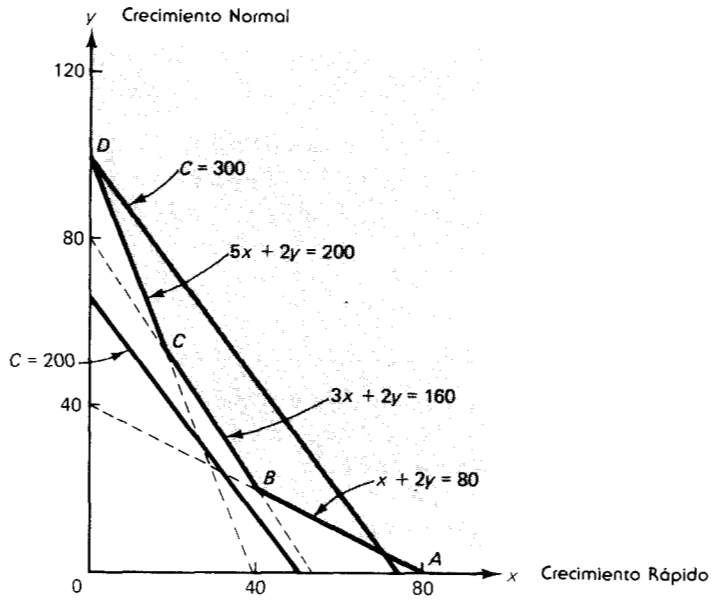


FIGURA 9.17

y que tiene cuando menos un punto común con la región factible. Las coordenadas de B se hallan resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 160, \\ x + 2y = 80. \end{cases}$$

Por ello, $x = 40$ y $y = 20$, y esto da el costo mínimo de $220. El granjero debe comprar 40 costales de "Crecimiento Rápido" y 20 costales de "Crecimiento Normal".

En el Ejemplo 3 se encontró que la función $C = 4x + 3y$ tiene un valor mínimo en un vértice de la región factible que es no acotada. Por otro lado, supóngase que se desea *maximizar* C para esa región y se procede evaluando todos los vértices de C. Estos puntos son

$$A = (80, 0), \quad B = (40, 20), \quad C = (20, 50), \quad D = (0, 100),$$

de donde

$$\begin{aligned} C(A) &= 4(80) + 3(0) = 320, \\ C(B) &= 4(40) + 3(20) = 220, \\ C(C) &= 4(20) + 3(50) = 230, \\ C(D) &= 4(0) + 3(100) = 300. \end{aligned}$$

Una conclusión apresurada sería que el valor máximo de C es 320. Pero ¡esto es *falso*! *No* existe valor máximo, ya que existen rectas de isocosto arbitrariamente grandes que cortan la región factible.

ADVERTENCIA

Cuando se trabaja con una región factible no acotada, *no* debe concluirse simplemente que exista una solución óptima en un vértice debido a que puede no existir tal solución.

EJERCICIOS 9.2

1. Maximizar
$P = 10x + 12y$
sujeta a
$x + y \leq 60,$
$x - 2y \geq 0,$
$x, y \geq 0.$

2. Maximizar
$P = 5x + 6y$
sujeta a
$x + y \leq 80,$
$3x + 2y \leq 220,$
$2x + 3y \leq 210,$
$x, y \geq 0.$

3. Maximizar
$Z = 4x - 6y$
sujeta a
$y \leq 7,$
$3x - y \leq 3,$
$x + y \geq 5,$
$x, y \geq 0.$

4. Minimizar
$Z = x + y$
sujeta a
$x - y \geq 0,$
$4x + 3y \geq 12,$
$9x + 11y \leq 99,$
$x \leq 8,$
$x, y \geq 0.$

5. Maximizar
$Z = 4x - 10y$
sujeta a
$x - 4y \geq 4,$
$2x - y \leq 2,$
$x, y \geq 0.$

6. Minimizar
$Z = 20x + 30y$
sujeta a
$2x + y \leq 10,$
$3x + 4y \leq 24,$
$8x + 7y \geq 56,$
$x, y \geq 0.$

7. Minimizar
$Z = 7x + 3y$
sujeta a
$3x - y \geq -2,$
$x + y \leq 9,$
$x - y = -1,$
$x, y \geq 0.$

8. Maximizar
$Z = 0.5x - 0.3y$
sujeta a
$x - y \geq -2,$
$2x - y \leq 4,$
$2x + y = 8,$
$x, y \geq 0.$

9. Minimizar
$C = 2x + y$
sujeta a
$3x + y \geq 3,$
$4x + 3y \geq 6,$
$x + 2y \geq 2,$
$x, y \geq 0.$

10. Minimizar
$C = 2x + 2y$
sujeta a
$x + 2y \geq 80,$
$3x + 2y \geq 160,$
$5x + 2y \geq 200,$
$x, y \geq 0.$

11. Maximizar
$Z = 10x + 2y$
sujeta a
$x + 2y \geq 4,$
$x - 2y \geq 0,$
$x, y \geq 0.$

12. Minimizar
$Z = y - x$
sujeta a
$x \geq 3,$
$x + 3y \geq 6,$
$x - 3y \geq -6,$
$x, y \geq 0.$

13. Un fabricante de juguetes que está preparando un programa de producción para dos nuevos artículos, "Maravilla" y "Fantástico", debe utilizar la información respecto a sus tiempos de construcción que se proporciona en la tabla que aparece enseguida. Por ejemplo, cada juguete "Maravilla" requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas de trabajo disponibles de los empleados, por semana, son: para la máquina A, 70 horas; para la B, 40; para terminado, 90 horas. Si las utilidades de cada juguete "Maravilla" y cada juguete "Fántastico" son de \$4 y \$6, respectivamente, ¿cuántas unidades de cada uno deben fabricarse por semana con el objeto de maximizar las utilidades? ¿Cuál sería la utilidad máxima?

	Máquina A	Máquina B	Terminado
"Maravilla"	2 h	1 h	1 h
"Fantástico"	1 h	1 h	3 h

14. Un fabricante produce dos tipos de parrillas para asar carne, Tipo I y Tipo II. Durante el proceso de producción las parrillas requieren del uso de dos máquinas, A y B. El número de horas que se requieren en cada una se señalan en la tabla que aparece a continuación. Si puede utilizarse cada una de las máquinas 24 horas al día, y las utilidades para la Tipo I y la Tipo II son de \$4 y \$6, respectivamente, ¿qué

cantidad de cada tipo se debe fabricar diariamente para maximizar las utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

	Máquina A	Máquina B
Tipo I	2 h	4 h
Tipo II	4 h	2 h

15. Una dieta debe contener cuando menos 16 unidades de carbohidratos y 20 unidades de proteína. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteína; el B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteína. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidad y B cuesta \$0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben adquirirse para minimizar los costos? ¿Cuál es el costo mínimo?

16. Un granjero va a comprar fertilizante que contiene tres ingredientes nutritivos: A, B y C. Los requisitos mínimos semanales son de 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos marcas usuales de fertilizante en el mercado. La marca I cuesta \$4 el costal, contiene 2 unidades de A, 6 de B, y 4 de C. La marca II cuesta \$5 el costal y contiene 2 unidades de A, 2 de B y 12 de C. ¿Cuántos costales de cada marca debe comprar el granjero cada semana para minimizar los costos y satisfacer los requisitos nutritivos?

17. Una compañía extrae minerales de menas. El número de libras de los minerales A y B que se pueden extraer de cada tonelada de las menas I y II se presentan en la tabla que aparece enseguida, junto con los costos por tonelada de éstas. Si la compañía debe fabricar cuando menos 3000 libras de A y 2500 de B, ¿cuántas toneladas de cada mena se deben procesar para minimizar los costos? ¿Cuál es el costo mínimo?

	Mena I	Mena II
Mineral A	100 lb	200 lb
Mineral B	200 lb	50 lb
Costo por tonelada	\$50	\$60

9.3 Soluciones óptimas múltiples*

En ocasiones, una función objetivo alcanza su valor óptimo en más de un punto factible, en cuyo caso se dice que existen **soluciones óptimas múltiples**. En el Ejemplo 1 se ilustra esto.

EJEMPLO 1

Maximizar $Z = 2x + 4y$ *sujeta a las restricciones*

$$x - 4y \leq -8,$$
$$x + 2y \leq 16,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

La región factible aparece en la Figura 9.18. Dado que la región es no vacía y acotada, Z tiene un valor máximo en algún vértice. Los vértices son

$$A = (0, 2), \qquad B = (8, 4), \qquad C = (0, 8).$$

Evaluando la función objetivo en A, B y C se obtiene

$$Z(A) = 2(0) + 4(2) = 8,$$
$$Z(B) = 2(8) + 4(4) = 32,$$
$$Z(C) = 2(0) + 4(8) = 32.$$

* Se puede omitir esta sección.

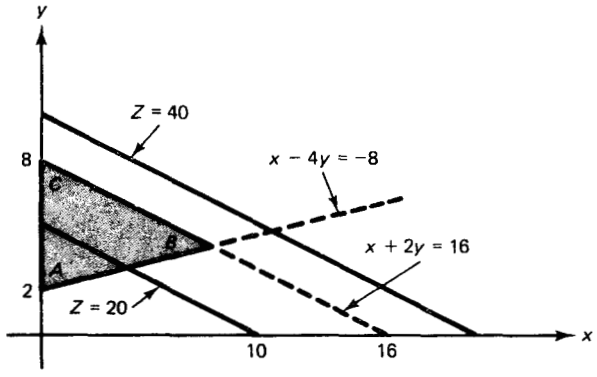


FIGURA 9.18

Así, el valor máximo de Z para esta región es 32 y se presenta en *dos* vértices, B y C. De hecho este valor máximo aparece también en *todos* los puntos que se encuentran sobre el segmento de recta que *une* a B y C, por la siguiente razón. Cada uno de los miembros de la familia de rectas $Z = 2x + 4y$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Además, la línea de restricción $x + 2y = 16$, que contiene tanto a B como a C, tiene también pendiente $-\frac{1}{2}$ y, en consecuencia, es paralela a cada uno de los miembros de $Z = 2x + 4y$. En la Figura 9.18 se muestran rectas para $Z = 20$ y $Z = 40$. Por lo tanto, el miembro de la familia que maximiza Z contiene no sólo a B y a C, sino también a todos los puntos que están sobre el segmento de recta BC. Por consiguiente, posee una cantidad infinitamente grande de puntos en común con la región factible. De modo que este problema de programación lineal tiene una cantidad infinitamente grande de soluciones óptimas. De hecho, se puede probar que:

> Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos vértices en los que una función objetivo es óptima, entonces la función sera óptima también en todos los puntos (x, y), en los que
>
> $$x = (1 - t)x_1 + tx_2,$$
>
> $$y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$
>
> y $0 \leq t \leq 1$.

En el ejemplo, si $(x_1, y_1) = B = (8, 4)$ y $(x_2, y_2) = C = (0, 8)$, entonces Z es máxima en cualquier punto (x, y) en donde

$$x = (1 - t)8 + t \cdot 0 = 8(1 - t),$$

$$y = (1 - t)4 + t \cdot 8 = 4(1 + t),$$

$$\text{y} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas de cualquier punto que se encuentre sobre el segmento de recta BC. En particular, si $t = 0$, entonces $x = 8$ y $y = 4$, lo cual da el vértice $B = (8, 4)$. Si $t = 1$, se obtiene el vértice $C = (0, 8)$. El valor $t = \frac{1}{2}$ da el punto $(4, 6)$. Obsérvese que en $(4, 6)$, $Z = 2(4) + 4(6) = 32$, que es el valor máximo de Z.

EJERCICIOS 9.3

1. Minimizar
$Z = 3x + 9y$
sujeta a
$y \geq -\frac{3}{2}x + 6,$
$y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3},$
$y \geq x - 3,$
$x, y \geq 0.$

2. Maximizar
$Z = 3x + 6y$
sujeta a
$x - y \geq -3,$
$2x - y \leq 4,$
$x + 2y = 12,$
$x, y \geq 0.$

3. Maximizar
$Z = 18x + 9y$
sujeta a
$2x + 3y \leq 12,$
$2x + y \leq 8,$
$x, y \geq 0.$

9.4 El método simplex

Hasta ahora se han resuelto problemas de programación lineal a través de un método geométrico. Este método no resulta práctico cuando el número de variables se aumenta a tres, y con más variables resulta imposible de utilizar. Ahora se examinará una técnica diferente, el **método simplex**, cuyo nombre está asociado en análisis más avanzados a un objeto geométrico al que se denomina simplex.

El método simplex comienza con una solución factible y prueba si es o no óptima. Si no lo es, el método sigue a una *mejor* solución. Se dice "mejor" en el sentido de que la nueva solución se acerca más a la optimización de la función objetivo.* Si esta nueva solución no es óptima, entonces se repite el procedimiento. En algún momento el método simplex conduce a una solución óptima, si es que existe.

Además de ser eficiente, dicho método tiene otras ventajas. Es completamente mecánico (se utilizan matrices, operaciones elementales sobre renglones y aritmética básica). Asimismo, no implica el uso de geometría. Esto permite resolver problemas de programación lineal que tienen cualquier número de restricciones y variables.

En esta sección se consideran sólo los **problemas normales de programación lineal**, que pueden estar dados en la forma:

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son no negativos.

Obsérvese que una solución factible para un problema normal de programación lineal es siempre $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. En las Secciones 9.6 y 9.7 se analizan otros tipos de problemas de programación lineal.

Ahora se aplicará el método simplex al problema que se presentó en el Ejemplo 1 de la Sección 9.2, y que tiene la forma:

$$\text{maximizar } Z = 3x_1 + x_2$$

* Esto es cierto en la mayoría de los casos. Sin embargo, en ciertos casos la nueva solución puede simplemente ser tan buena como la anterior. Se ilustra esto en el Ejemplo 2.

sujeta a las restricciones

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \tag{2}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12, \tag{3}$$

en donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Este problema está en forma normal. Se comienza expresando las restricciones (2) y (3) en forma de ecuaciones. En la (2), $2x_1 + x_2$ sería *igual* a 8 si se añade algún número no negativo s_1 a $2x_1 + x_2$:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \text{ en donde } s_1 \geq 0.$$

A s_1 se le denomina **variable de holgura** puesto que absorbe la "holgura" o falta de consistencia que existe en el lado izquierdo de (2), de manera que se convierta en una igualdad. De modo similar, la desigualdad (3) puede escribirse en forma de ecuación utilizando la variable de holgura s_2:

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \text{ en donde } s_2 \geq 0.$$

A las variables x_1 y x_2 se les denomina **variables estructurales**

Ahora puede replantearse el problema en términos de ecuaciones:

$$\text{maximizar } Z = 3x_1 + x_2 \tag{4}$$

tal que

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \tag{5}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \tag{6}$$

en donde x_1, x_2, s_1 y s_2 son no negativas.

De la Sección 9.2 se sabe que la solución óptima aparece en un vértice de la región factible de la Figura 9.19. En cada uno de estos vértices cuando menos *dos* de las variables x_1, x_2, s_1 y s_2 son 0.

1. En A, se tiene $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.
2. En B, $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$. Pero de la Ecuación (5), $2(4) + 0 + s_1 = 8$. Por ello, $s_1 = 0$.

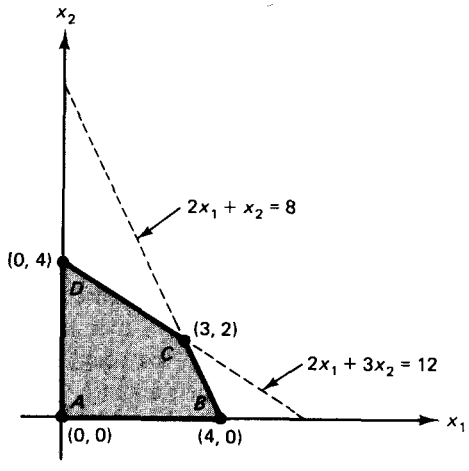


FIGURA 9.19

3. En C, $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. De la Ecuación (5), $2(3) + 2 + s_1 = 8$. Así, $s_1 = 0$. De la Ecuación (6), $2(3) + 3(2) + s_2 = 12$. En consecuencia, $s_2 = 0$.

4. En D, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. De la Ecuación (6), $2(0) + 3(4) + s_2 = 12$. Por lo tanto, $s_2 = 0$.

También se puede demostrar que cualquier solución para las Ecuaciones (5) y (6), tal que cuando menos *dos* de las cuatro variables x_1, x_2, s_1 y s_2 sean cero, corresponde a un vértice. Cualquier solución como éstas, en la que cuando menos dos de las variables sean cero, se denomina **solución factible básica**, o, en forma abreviada S.F.B. Este número, 2, se determina mediante la expresión $n - m$, en donde m es el número de restricciones (excluyendo las condiciones de no negatividad) y n es el número de variables que aparecen después de convertir estas restricciones a ecuaciones. En el caso que se analiza, $n = 4$ y $m = 2$. Para cualquier S.F.B., las dos variables que son iguales a cero se denominan **variables no básicas**, en tanto que a las otras se les denomina **variables básicas** para la S.F.B. Por consiguiente, para la S.F.B. que corresponde a la cuestión (3) anterior, s_1 y s_2 son variables no básicas, pero para la S.F.B., que corresponde a (4) las variables no básicas son x_1 y s_2. Se desea encontrar en algún momento la S.F.B. que maximiza Z.

En primer lugar se halla una S.F.B. inicial y después se determina si el valor correspondiente de Z podría ser mayor por una S.F.B. diferente. En virtud de que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, es una solución factible para este problema normal de programación lineal, inicialmente se obtiene una S.F.B., en la que las variables estructurales x_1 y x_2 sean no básicas. Es decir, se elige $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y se encuentran los valores correspondientes a s_1, s_2 y Z. La mejor forma de hacer esto es a través de técnicas matriciales que se basan en los métodos desarrollados en el Capítulo 8.

Si se escribe la Ecuación (4) como $-3x_1 - x_2 + Z = 0$, entonces las Ecuaciones (5), (6) y (4) forman el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \\ -3x_1 - x_2 + Z = 0. \end{cases}$$

En términos de una matriz de coeficientes aumentada (a la que también se denomina **tabla simplex**), se tiene

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Los primeros dos renglones corresponden a las restricciones, y el último renglón corresponde a la ecuación objetivo; de ahí la línea punteada horizontal que las separa. Obsérvese que si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces se puede leer directamente en los renglones 1, 2 y 3 los valores de s_1, s_2 y Z; $s_1 = 8$, $s_2 = 12$ y $Z = 0$. Esa es la razón por la cual se colocaron las letras s_1, s_2 y Z del lado izquierdo de los renglones. (Es necesario recordar que s_1 y s_2 son las variables básicas.) Consecuentemente, la solución factible básica inicial es

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 8, \quad s_2 = 12,$$

y en ella, $Z = 0$. Ahora se examina si puede hallarse una S.F.B. que dé un valor mayor de Z.

Las variables x_1 y x_2 son no básicas en la S.F.B. anterior. Ahora, se busca una S.F.B. en la que una de estas variables sea básica al mismo tiempo que la otra siga siendo no básica. ¿Cuál se debe elegir como variable básica? En primer lugar, se examinan las posibilidades. Del renglón Z de la matriz anterior, $Z = 3x_1 + x_2$. Si se permite que x_1 se convierta en básica, entonces x_2 sigue siendo 0 y $Z = 3x_1$; por ello, por cada aumento de una unidad en x_1, Z aumenta en tres unidades. Por otro lado, si se permite que x_2 se convierta en básica, entonces x_1 sigue siendo igual a 0 y $Z = x_2$. Así, por cada unidad de aumento en x_2, Z se incrementa en una unidad. En consecuencia, se obtiene un aumento *mayor* en el valor de Z si ingresa a la categoría de variable básica x_1, y no x_2. En este caso, se denomina a x_1 **variable entrante**. Por lo tanto, en términos de la tabla simplex que aparece enseguida (que es la misma que la matriz anterior excepto por los señalamientos adicionales que contiene) se puede encontrar la variable que entra buscando el "número más negativo" de los que se encuentran señalados por la llave en el renglón Z. Dado que ese número es -3 y aparece en la columna de x_1 es ésta la variable que entra. A los números señalados con la llave se les denomina en ocasiones **indicadores.**

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}} \\ \uparrow \\ \text{variable entrante} \end{array}.$$

Resumiendo la información que puede obtenerse de esta tabla, se observa que presenta una S.F.B., en donde s_1 y s_2 son las variables básicas y x_1 y x_2 son no básicas. La S.F.B. es $s_1 = 8$ (= el lado derecho del renglón s_1), $s_2 = 12$ (= el lado derecho del renglón s_2), $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. El -3 de la columna de x_1 y del renglón Z señala que si x_2 se mantiene en 0, entonces Z aumenta en tres unidades por cada aumento de una unidad en x_1. El -1 de la columna de x_2 y del renglón Z señala que si x_1 permanece en 0, entonces Z aumenta una unidad por cada aumento de una unidad también en x_2. La columna en la que se encuentra el indicador más negativo, -3, señala la variable entrante x_1; es decir, la variable que se debe convertir en básica en la siguiente S.F.B.

En la nueva S.F.B., conforme mayor sea el aumento en x_1 (a partir de $x_1 = 0$), mayor es el aumento en Z. Ahora, ¿cuánto se puede aumentar x_1? Ya que x_2 se sigue manteniendo en 0, de los renglones 1 y 2 de la tabla simplex anterior se observa que

$$s_1 = 8 - 2x_1$$

y

$$s_2 = 12 - 2x_1.$$

Puesto que s_1 y s_2 son no negativos, se tiene

$$8 - 2x_1 \geq 0$$

y

$$12 - 2x_1 \geq 0.$$

De la primera desigualdad, $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$; de la segunda, $x_1 \leq \frac{12}{2} = 6$. Por consiguiente, x_1 debe ser menor o igual que el menor de los cocientes $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$, que es $\frac{8}{2}$. Consecuentemente, x_1 puede aumentar cuando mucho en 4; sin embargo, en una S.F.B. dos variables deben ser iguales a 0. Ya se tiene $x_2 = 0$. Debido a que $s_1 = 8 - 2x_1$, s_1 debe ser 0 para que $x_1 = 4$. Por ello, se obtiene una nueva S.F.B. reemplazando s_1 con una x_1 como variable básica. Es decir, s_1 *abandonará* la categoría de variable básica que tenía en la S.F.B. anterior y se convertirá en una no básica en la nueva. Se dice que s_1 es la **variable saliente** para la S.F.B. anterior. En resumen, para la nueva S.F.B. se desea que x_1 y s_2 sean variables básicas, con $x_1 = 4$, y x_2 y s_1 como variables no básicas ($x_2 = 0$, $s_1 = 0$).

Antes de continuar, se actualiza la tabla. Al lado derecho de la tabla que aparece enseguida se señalan los cocientes $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$. Se obtienen dividiendo cada uno de los elementos de los primeros dos renglones de la columna b entre el elemento que se encuentra en el renglón correspondiente de la columna de la variable que entra. Obsérvese que la variable que sale se encuentra en el renglón del *menor* cociente, $8 \div 2$.

variable saliente		x_1	x_2	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
→	s_1	2	1	1	0	0	8	$8 \div 2 = 4.$
	s_2	2	3	0	1	0	12	$12 \div 2 = 6.$
	Z	−3	−1	0	0	1	0	

↑ variable entrante

Debido a que x_1 y s_2 serán variables básicas en la nueva S.F.B. sería conveniente cambiar la tabla anterior mediante operaciones elementales sobre los renglones para darle una forma en la que se puedan leer con facilidad los valores de x_1, s_2 y Z (de la misma manera en que fue posible hacerlo con la solución que correspondía a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$). Para hacer esto, se encuentra una matriz equivalente a la tabla anterior, pero que tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & ? & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & ? & ? & 1 & 0 & ? \\ \hdashline 0 & ? & ? & 0 & 1 & ? \end{array}\right] \end{array}$$

en donde los signos de interrogación representan los números que habrán de determinarse. Obsérvese aquí que si $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, entonces x_1 es igual al número que aparece en la última columna del renglón 1, s_2 es igual al número que aparece en la última columna del renglón 2, y Z es el número del renglón 3. Así, se debe transformar la tabla

variable saliente		x_1	x_2	s_1	s_2	Z	
→	s_1	②	1	1	0	0	8
	s_2	2	3	0	1	0	12
	Z	−3	−1	0	0	1	0

↑ variable entrante

(7)

en una matriz equivalente que tenga un 1 en donde aparece el círculo y 0 en las demás posiciones de la columna x_1. Al elemento señalado con el círculo se le denomina **elemento pivote**; se encuentra en la columna de la variable entrante y en el renglón de la variable saliente. Mediante operaciones elementales sobre renglones, se tiene

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \textcircled{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(multiplicando el primer renglón por $\frac{1}{2}$)

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

(sumando al segundo renglón el primero multiplicado por -2, y sumando al tercer renglón el primero multiplicado por 3).

En consecuencia, se tiene una nueva tabla simplex:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ s_2 \\ \hline Z \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}} \end{array} \tag{8}$$

Para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, entonces, del primer renglón se tiene que $x_1 = 4$; del segundo, $s_2 = 4$. Estos valores representan la nueva S.F.B. Obsérvese que se reemplazó el s_1 que se encontraba a la izquierda de la tabla inicial en (7) por x_1 en la nueva tabla (8); por lo tanto, s_1 *salió* y x_1 *entró*. Del renglón 3 para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, se obtiene $Z = 12$, que es un valor mayor al que se tenía antes (y que era $Z = 0$).

En la S.F.B. actual, x_2 y s_1 son variables no básicas ($x_2 = 0$, $s_1 = 0$). Supóngase que se busca otra S.F.B. que dé un valor de Z aun mayor y tal que x_2 o s_1 sea básica. La ecuación correspondiente al renglón Z está dada por $\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}s_1 + Z = 12$ o bien

$$Z = 12 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}s_1. \tag{9}$$

Si x_2 se convierte en básica y, por consiguiente, s_1 sigue siendo no básica, entonces

$$Z = 12 - \tfrac{1}{2}x_2 \qquad \text{(dado que } s_1 = 0\text{)}.$$

Aquí, cada aumento de una unidad en x_2 hace que Z *disminuya* en un 1/2 de unidad. Consecuentemente, cualquier aumento en x_2 haría que Z se redujera. Por otro lado, si s_1 se vuelve básica y x_2 permanece siendo no básica, entonces de la Ecuación (9),

$$Z = 12 - \tfrac{3}{2}s_1 \qquad \text{(de donde } x_2 = 0\text{)}.$$

Aquí, cada aumento de una unidad en s_1 *disminuye* a Z en $\frac{3}{2}$ unidades. Por ello, cualquier aumento en s_1 haría que Z se redujera. No es posible pasar a una S.F.B. que sea

mejor. En pocas palabras, ninguna S.F.B. arroja un valor mayor de Z que la S.F.B. de $x_1 = 4$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$ (que hace que $Z = 12$).

De hecho, puesto que $x_2 \geq 0$ y $s_1 \geq 0$ y los coeficientes de x_2 y s_1 en la Ecuación (9) son negativos, entonces Z es máxima cuando $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$. Es decir, en (8), *tener todos los indicadores no negativos significa que se tiene una solución óptima.*

En términos del problema original, si

$$Z = 3x_1 + x_2,$$

tal que

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \qquad x_1 \geq 0, \quad \text{y} \quad x_2 \geq 0,$$

entonces Z es máxima cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$ y el valor máximo de Z es 12 (y esto confirma el resultado que se obtuvo en el Ejemplo 1 de la Sección 9.2). Obsérvese que los valores de s_1 y s_2 no tienen que aparecer aquí.

Enseguida se esboza el método simplex para un problema de programación lineal normal con tres variables estructurales y cuatro restricciones, sin contar las condiciones de no negatividad. Se hace esto para señalar la forma en que trabaja el método simplex para cualquier número de variables estructurales y restricciones.

MÉTODO SIMPLEX

Problema:

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

tal que

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3,$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \leq b_4,$$

en donde x_1, x_2, x_3 y b_1, b_2, b_3, b_4 son no negativas.

Método:

1. Elaborar la tabla simplex inicial.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Z	b
s_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	0	0	b_1
s_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	0	0	b_2
s_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	0	0	b_3
s_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	0	0	0	1	0	b_4
Z	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	0	0	0	0	1	0

indicadores

Existen cuatro variables de holgura, s_1, s_2, s_3 y s_4; una para cada restricción.

2. Si todos los indicadores del último renglón son no negativos, entonces Z tiene un máximo cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. El valor máximo es 0.

Si existen indicadores negativos, localizar la columna en la que aparezca el indicador más negativo. Esta columna señala la variable entrante.

3. Dividir cada uno de los elementos de la columna de b que se encuentran por encima de la recta punteada entre el correspondiente elemento de la columna de la variable entrante. Se debe realizar esta división sólo en los casos en los que el elemento de la variable que entra sea *positivo*.*
4. Encerrar en un círculo el elemento de la columna de la variable entrante que corresponde al menor cociente del paso 3. Este es el elemento pivote. La variable saliente es la que se encuentra al lado izquierdo del renglón del elemento pivote.
5. Utilizar operaciones elementales sobre renglones para transformar la tabla en otra tabla equivalente que tenga un 1 en donde se encuentra el elemento pivote y 0 en las demás posiciones de esa columna.
6. La variable entrante debe reemplazar a la variable saliente en el lado izquierdo de esta nueva tabla.
7. Si todos los indicadores de la tabla nueva son no negativos, ya se tiene una solución óptima. El valor máximo de Z es el elemento del último renglón y la última columna. Ocurre esto cuando las variables que se encuentran del lado izquierdo de la tabla son iguales a los elementos correspondientes de la última columna. Todas las demás variables son 0. Si cuando menos uno de los indicadores es negativo, se debe repetir el mismo proceso con la nueva tabla, comenzando con el paso 2.

Para comprender mejor el método simplex, se debe estar en posibilidades de interpretar ciertos elementos de la tabla. Supóngase que se obtiene una tabla en la que el último renglón es el que se señala.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc:c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hdashline a & b & c & d & e & f & g & 1 & h \end{array}\right] \end{array} Z$$

Por ejemplo, puede interpretarse el elemento b de la siguiente manera. Si x_2 es no básica y fuera a convertirse en básica, entonces, para cada aumento de una unidad en x_2,

si $b < 0$, Z *aumenta* en $|b|$ unidades;

si $b > 0$, Z *disminuye* en b unidades;

si $b = 0$, no hay cambio en Z.

EJEMPLO 1

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x^2$ *sujeto a*

* Se analizará esta afirmación después del Ejemplo 1.

$$x_1 + x_2 \leq 20,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 35,$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 12,$$

y $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Este problema de programación lineal se ajusta a la forma normal. La tabla simplex inicial es

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	b	*Cocientes*
	s_1	1	1	1	0	0	0	20	$20 \div 1 = 20.$
variable saliente →	s_2	②	1	0	1	0	0	35	$35 \div 2 = \frac{35}{2}.$
	s_3	−3	1	0	0	1	0	12	no existe cociente puesto que −3 no es positivo.
	Z	−5	−4	0	0	0	1	0	

↑ variable entrante; indicadores: −5, −4, 0, 0, 0

El indicador más negativo, −5, aparece en la columna x_1. Por ello, x_1 es la variable entrante. El menor cociente es $\frac{35}{2}$, de modo que, s_2 es la variable saliente. El elemento pivote es 2. Utilizando operaciones elementales sobre los renglones para obtener un 1 en la posición del pivote y 0 en las demás posiciones de esa columna, se tienen

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	b	
1	1	1	0	0	0	20	
②	1	0	1	0	0	35	
−3	1	0	0	1	0	12	
−5	−4	0	0	0	1	0	

$\sim$

1	1	1	0	0	0	20
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$
−3	1	0	0	1	0	12
−5	−4	0	0	0	1	0

(multiplicando el renglón 2 por un $\frac{1}{2}$)

$\sim$

0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$
0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{129}{2}$
0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{175}{2}$

(sumando al renglón uno el renglón 2 multiplicado por −1; sumando al renglón tres el renglón 2 multiplicado por 3; sumando al renglón cuatro el renglón dos multiplicado por 5).

La nueva tabla es

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	b	*Cocientes*
	s_1	0	②	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5.$
variable saliente →	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$	$\frac{35}{2} \div \frac{1}{2} = 35.$
	s_3	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{129}{2}$	$\frac{129}{2} \div \frac{5}{2} = 25\frac{4}{5}.$
	Z	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{175}{2}$	

indicadores: 0, $-\frac{3}{2}$, 0, $\frac{5}{2}$, 0

↑ variable entrante

Obsérvese que en el lado izquierdo, x_1 reemplazó a s_2. Ya que $-\frac{3}{2}$ es el indicador más negativo se debe continuar con el proceso. La variable entrante es ahora x_2. El menor cociente es 5. De modo que s_1 es la variable saliente y $\frac{1}{2}$ el elemento pivote. Utilizando operaciones elementales sobre renglones, se tiene

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & b \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} \\ \hline & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}\right]$$

(sumando al renglón dos el renglón uno multiplicado por -1; sumando al renglón tres el renglón uno multiplicado por -5; sumando al renglón cuatro el renglón uno multiplicado por 3)

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}\right]$$

(multiplicando el renglón uno por 2).

La nueva tabla es

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & b \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ x_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ s_3 & 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline Z & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}$$

indicadores

en donde x_2 reemplazó a s_1 en el lado izquierdo. Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 95 y aparece cuando $x_2 = 5$ y $x_1 = 15$ (y $s_3 = 52$, $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$).

Resulta interesante observar que los valores de Z "mejoraron" progresivamente en las sucesivas tablas del Ejemplo 1. Esos valores son los elementos del último renglón y la última columna de cada tabla. En la tabla inicial se tenía que $Z = 0$. A partir de aquí se obtuvieron $Z = \frac{175}{2} = 87\frac{1}{2}$ después $Z = 95$, el máximo.

En el Ejemplo 1 podría el lector preguntarse por qué no se consideró el cociente del tercer renglón de la tabla inicial. La S.F.B. para esta tabla es

$$s_1 = 20, \qquad s_2 = 35, \qquad s_3 = 12, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0,$$

en donde x_1 es la variable que entra. Los cocientes 20 y $\frac{35}{2}$ reflejan que para la siguiente S.F.B. se tiene $x_1 \leq 20$ y $x_1 \leq \frac{35}{2}$. Puesto que el tercer renglón representa la ecuación $s_3 = 12 + 3x_1 - x_2$ y $x_2 = 0$, entonces $s_3 = 12 + 3x_1$. Pero $s_3 \geq 0$ de manera que, $12 + 3x_1 \geq 0$, lo cual implica $x_1 \geq -\frac{12}{3} = -4$. En consecuencia, se tiene

$$x_1 \leq 20, \qquad x_1 \leq \tfrac{35}{2}, \qquad \text{y} \qquad x_1 \geq -4.$$

Por lo tanto, se puede aumentar x_1 cuando mucho en $\frac{35}{2}$. La condición $x_1 \geq -4$ no tiene influencia en la determinación del aumento máximo en x_1. Esta es la razón por la cual el cociente $12/(-3) = -4$ no se considera en el renglón tres. En general, *no se considera ningún cociente para un renglón si el elemento de la columna de la variable entrante es negativo (o, por supuesto, 0).*

Aunque el procedimiento simplex que se presentó en esta sección se aplica sólo a problemas de programación lineal que se encuentran en forma normal, se pueden adaptar a ésta otras distintas formas. Supóngase que una restricción es

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq -b,$$

en donde $b > 0$. Aquí, el símbolo de desigualdad es "$\geq$" y la constante del lado derecho es *negativa*. Por consiguiente, la restricción no está en su forma normal. Sin embargo, multiplicando ambos lados por -1 resulta

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq b,$$

la cual *tiene* la forma apropiada. Consecuentemente, antes de aplicar el método simplex es posible que sea necesario replantear alguna restricción.

En la tabla simplex es posible que haya varios indicadores que coinciden en ser los más negativos. En este caso se elige cualquiera de ellos para encontrar la columna de la variable entrante. De la misma manera, es posible que haya varios cocientes que coinciden en ser los menores. Se puede elegir cualquiera de esos cocientes para encontrar la variable saliente y el elemento pivote. En el Ejemplo 2 se ilustra esto. Cuando existe un empate para el menor cociente, entonces, junto con las variables no básicas, una S.F.B. tendría una variable básica igual a 0. En este caso se dice que la S.F.B. es *degenerada*, o que el problema de programación lineal es *degenerado*. En la Sección 9.5 se abunda en este punto.

EJEMPLO 2

Maximizar $Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$ *sujeta a*

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 \quad &\geq -10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10, \end{aligned} \tag{10}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

La restricción (10) no se ajusta a la forma normal. Sin embargo, multiplicando ambos lados de (10) por -1 resulta

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

que *sí* tiene la forma apropiada. Consecuentemente, la tabla simplex inicial es la Tabla I.

TABLA SIMPLEX I

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
variable saliente →	s_1	1	②	0	1	0	0	10	$10 \div 2 = 5.$
	s_2	2	2	1	0	1	0	10	$10 \div 2 = 5.$
	Z	-3	-4	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	0	

indicadores

↑

variable entrante

La variable entrante es x_2. Dado que existe un empate en el menor cociente, se puede elegir cualquiera de los dos, s_1 o s_2, como la variable saliente. Se escoge s_1. Se encierra en un círculo el pivote. Utilizando operaciones elementales sobre renglones, se obtiene la Tabla II.

TABLA SIMPLEX II

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5	no hay cociente puesto que 0 no es positivo.
variable saliente → s_2	1	0	①	−1	1	0	0	$0 \div 1 = 0$.
Z	−1	0	$-\frac{3}{2}$	2	0	1	20	

indicadores

variable entrante

La Tabla II corresponde a una S.F.B. en la que una variable básica s_2 es cero. Por ello, la S.F.B. es degenerada. Ya que existen indicadores negativos, se continúa el proceso. La variable entrante es ahora x_3, la variable saliente es s_2 y el pivote se encuentra encerrado en un círculo. Utilizando operaciones elementales sobre renglones, se obtiene la Tabla III.

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5
x_3	1	0	1	−1	1	0	0
Z	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	20

indicadores

En virtud de que todos los indicadores son no negativos, Z es máxima cuando $x_2 = 5$ y $x_3 = 0$, y $x_1 = s_1 = s_2 = 0$. El máximo valor es $Z = 20$. Obsérvese que este valor es igual al valor de Z correspondiente a la Tabla II. En problemas con degeneración es posible llegar al mismo valor de Z en varias etapas del proceso simplex. En los Ejercicios 9.4, se pide resolver este ejemplo utilizando s_2 como la variable saliente en la tabla inicial.

Debido a su naturaleza mecánica, el procedimiento simplex se adapta con facilidad a las computadoras, y permite resolver problemas de programación lineal que implican muchas variables y muchas restricciones.

EJERCICIOS 9.4

Utilice el método simplex para resolver los siguientes problemas.

1. Maximizar
$Z = x_1 + 2x_2$
sujeta a
$2x_1 + x_2 \leq 8,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

2. Maximizar
$Z = 2x_1 + x_2$
sujeta a
$-x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. Maximizar
$Z = -x_1 + 3x_2$
sujeta a
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$-x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

4. Maximizar
$$Z = 3x_1 + 8x_2$$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Maximizar
$$Z = 8x_1 + 2x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

6. Maximizar
$$Z = 2x_1 - 6x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7. Resolver el problema del Ejemplo 2 utilizando s_2 como la variable saliente en la Tabla I.

8. Maximizar
$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$
sujeta a
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. Maximizar
$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

10. Maximizar
$$Z = -x_1 + 2x_2$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 \geq -2,$$
$$x_1 \leq 2,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

11. Maximizar
$$Z = x_1 + x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$8x_1 + 5x_2 \leq 40,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

12. Maximizar
$$W = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$
sujeta a
$$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq -2,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

13. Maximizar
$$W = x_1 - 12x_2 + 4x_3$$
sujeta a
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -2,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq -1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

14. Maximizar
$$W = 4x_1 + 0x_2 - x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 10,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

15. Maximizar
$$Z = 60x_1 + 0x_2 + 90x_3 + 0x_4$$
sujeta a
$$x_1 - 2x_2 \leq 2,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_3 + x_4 \leq 4,$$
$$x_3 - 2x_4 \leq 7,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

16. Maximizar
$$Z = 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4$$
sujeta a
$$x_1 + x_3 - x_4 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 \leq 2,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 4,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

17. Una compañía de carga maneja envíos para dos compañías, A y B, que se encuentran en la misma ciudad. La empresa A envía cajas que pesan 3 libras cada una y tienen un volumen de 2 pie^3; la B envía cajas de 1 pie^3 con peso de 5 libras cada una. Tanto A como B hacen envíos a los mismos destinos. El costo de transporte para cada caja de A es \$0.75, y para B es \$0.50. La compañía transportadora tiene un camión con espacio de carga para 2400 pie^3 y capacidad máxima de 9200 libras. En un viaje, ¿cuántas cajas de cada empresa debe transportar el camión para que la compañía de transportes obtenga el máximo de ingresos? ¿Cuál es este máximo?

18. Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere de los tiempos de máquina y tiempos de terminado que se presentan en la tabla que aparece enseguida. Los números de horas de tiempo de máquinas y de tiempo de terminado disponibles por mes son 900 y 5000, respectivamente.

La utilidad por unidad X, Y y Z es \$3, \$4 y \$6, respectivamente. ¿Cuál es la utilidad máxima al mes que puede obtenerse?

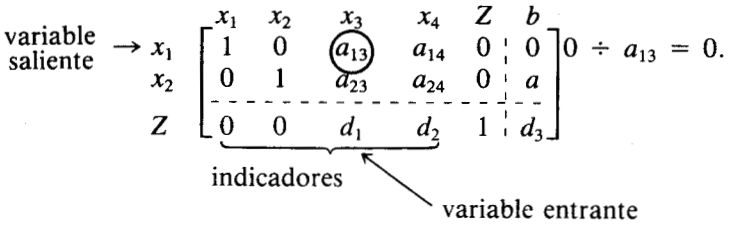
	Tiempo de máquina	Tiempo de terminado
X	1 h	4 h
Y	2 h	4 h
Z	3 h	8 h

19. Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sofás. Cada uno de estos artículos requiere madera, plástico y aluminio, según se señala en la tabla que aparece enseguida. La compañía dispone de 400 unidades de madera, 500 de plástico y 1450 de aluminio. Cada silla, mecedora y sofá se vende en \$7, \$8 y \$12, respectivamente. Suponiendo que pueden venderse todos los muebles, determine un programa de producción que permita maximizar los ingresos totales. ¿Cuáles son los ingresos máximos?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

9.5 Degeneración, soluciones no acotadas, soluciones óptimas múltiples*

En la sección anterior se señaló que una solución factible básica es **degenerada** si, junto con una de las variables no básicas, una de las que sí son básicas es 0. Supóngase que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las variables de una S.F.B. degenerada, en donde x_1 y x_2 son básicas y $x_1 = 0$ y x_3 y x_4 son no básicas, x_3 es la variable entrante. La tabla simplex correspondiente tiene la siguiente forma:



Así, la S.F.B. es

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Supóngase que $a_{13} > 0$. Entonces, el menor cociente es 0 y se puede elegir a_{13} como el elemento pivote. En consecuencia, x_1 es la variable saliente. Aplicando operaciones elementales sobre renglones se obtiene la siguiente tabla, en donde los signos de interrogación representan números que deben determinarse.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	b
x_3	?	0	1	?	0	0
x_2	?	1	0	?	0	a
Z	?	0	0	?	1	d_3

* Puede omitirse esta sección.

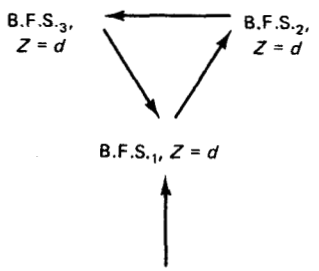


FIGURA 9.20

Para la S.F.B. correspondiente a esta tabla, x_3 y x_2 son variables básicas y x_1 y x_4 son no básicas. La S.F.B. es

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_1 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

que es la misma S.F.B. anterior. En realidad, por lo general se les considera distintas S.F.B. en donde la única diferencia es que x_1 es básica en la primera y es no básica en la segunda. El valor de Z para ambas S.F.B. es el mismo, d_3. Por lo tanto, no se obtiene ningún "mejoramiento" en Z.

En una situación con degeneración pueden presentarse problemas en el procedimiento simplex. Es posible obtener una secuencia de tablas que corresponda a S.F.B. que tengan el mismo valor de Z. Además, es posible que en algunos casos el procedimiento implique volver a la primera tabla de la secuencia. En la Figura 9.20 se llega a la S.F.B.$_1$, se pasa a la S.F.B.$_2$, a la S.F.B.$_3$ y finalmente se vuelve a la S.F.B.$_1$. A esto se le denomina *ciclos*. Cuando se presentan ciclos es posible que nunca se obtenga el valor óptimo de Z. Esta situación se presenta en raras ocasiones en los problemas prácticos de programación lineal. Sin embargo, existen técnicas (que no se consideran en este texto) para eliminar este tipo de dificultades.

Se presenta una S.F.B. cuando dos cocientes de una tabla simplex están empatados, teniendo el menor valor. Por ejemplo, considérese la siguiente tabla (parcial):

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \textcircled{q_1} & p_1 \\ q_2 & p_2 \\ & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ p_1/q_1. \\ p_2/q_2. \end{array}$$

Aquí, x_1 y x_2 son variables básicas. Supóngase que x_3 es no básica y es la variable entrante y que p_1/q_1 y p_2/q_2 son iguales y también son los menores cocientes implicados. Eligiendo q_1 como el elemento pivote, mediante operaciones elementales sobre renglones se obtiene

$$\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} 1 & p_1/q_1 \\ 0 & p_2 - q_2\dfrac{p_1}{q_1} \\ & \end{array}\right] \end{array}$$

Puesto que $p_1/q_1 = p_2/q_2$, entonces $p_2 - q_2(p_1/q_1) = 0$. Por consiguiente, la S.F.B. que corresponde a esta tabla tiene $x_2 = 0$, lo cual arroja una S.F.B. con ***degeneración***.

Aunque una S.F.B. como ésta puede implicar la introducción en un ciclo en este libro no se hallarán situaciones como éstas.

Se consideran ahora "los problemas no acotados". En la Sección 9.2 se vio que un problema de programación lineal puede no tener valor máximo debido a que la región factible tiene tal forma que la región objetivo puede llegar a ser, dentro de ella, arbitrariamente grande. En este caso, se dice que el problema tiene una **solución no acotada**. Esta es una forma de decir específicamente que no existe solución óptima. Se presenta esta situación cuando no hay cocientes posibles en la tabla simplex para una variable que entra. Por ejemplo, considérese la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	b	
x_1	1	−3	0	2	0	5	no hay cociente.
x_3	0	0	1	4	0	1	no hay cociente.
Z	0	−5	0	−2	1	10	

↑ indicadores

variable entrante

Aquí, x_2 es la variable entrante y, para cada aumento de una unidad en x_2, Z aumenta en 5. Puesto que no hay elementos positivos en los primeros dos renglones de la columna x_2, no existen cocientes. De los renglones 1 y 2 se obtiene

$$x_1 = 5 + 3x_2 - 2x_4$$

y

$$x_3 = 1 - 4x_4.$$

En la S.F.B. para esta tabla, $x_4 = 0$. Por ello, $x_1 = 5 + 3x_2$ y $x_3 = 1$. Como, $x_1 \geq 0$, entonces $x_2 \geq -\frac{5}{3}$. Por ello, no existe límite superior para x_2. De ahí que, Z puede tomar valores arbitrariamente grandes y se tiene una solución no acotada. En general:

> Si no existen cocientes en una tabla simplex, entonces el problema de programación lineal tiene una solución no acotada.

EJEMPLO 1

Maximizar $Z = x_1 + 4x_2 - x_3$ *sujeta a*

$$-5x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 30,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 12,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

La tabla simplex inicial es

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
	s_1	−5	6	−2	1	0	0	30	$30 \div 6 = 5.$
variable saliente →	s_2	−1	③	6	0	1	0	12	$12 \div 3 = 4.$
	Z	−1	−4	1	0	0	1	0	

↑ indicadores

variable entrante

La segunda tabla es

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	
s_1	-3	0	-14	1	-2	0	6	no existe cociente.
x_2	$-\frac{1}{3}$	1	2	0	$\frac{1}{3}$	0	4	no existe cociente.
Z	$-\frac{7}{3}$	0	9	0	$\frac{4}{3}$	1	16	

indicadores

↑
variable entrante

Aquí, la variable entrante es x_1. Puesto que los elementos de los primeros dos renglones de la columna de x_1 son negativos, no existen cocientes. Así, el problema tiene una solución no acotada.

Se concluye esta sección con un análisis de "soluciones óptimas múltiples". Supóngase que

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n$$

$$\text{y} \quad x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad \ldots, \quad x_n = b_n$$

son dos S.F.B. *diferentes* para las cuales un problema de programación lineal es óptimo. Por "diferentes S.F.B." se quiere decir que $a_i \neq b_i$ para alguna i, en donde $1 \leq i \leq n$. Puede demostrarse que los valores

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t)a_1 + tb_1, \\ x_2 &= (1 - t)a_2 + tb_2, \\ &\vdots \\ x_n &= (1 - t)a_n + tb_n, \end{aligned} \tag{1}$$

para cualquier t en donde $0 \leq t \leq 1$,

también dan una solución óptima (aunque puede no necesariamente ser una S.F.B.). En consecuencia, existen *soluciones (óptimas) múltiples* para el problema.

Es posible determinar la posibilidad de obtener soluciones óptimas múltiples a partir de una tabla simplex que tenga una solución óptima, tal como la tabla (parcial) que aparece enseguida:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	
x_1						p_1
x_2						q_1
Z	0	0	a	0	1	r

indicadores

Aquí, a debe ser no negativa. La correspondiente S.F.B. es

$$x_1 = p_1, \qquad x_2 = q_1, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

y el valor máximo de Z es r. Si se convirtiera x_4 en básica, el indicador 0 de la columna de x_4 significa que para cada aumento de una unidad en x_4 no se produce ningún

cambio en Z. Por lo tanto, se puede encontrar una S.F.B. en la que x_4 sea básica y el correspondiente valor de Z sea el mismo que antes. Se hace esto considerando a x_4 como la variable que entra en la tabla anterior. Si, por ejemplo, x_1 es la variable saliente, la nueva S.F.B. tiene la forma

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = q_2, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = p_2.$$

Si esta S.F.B. es diferente de la anterior, existen soluciones múltiples. De hecho, de las Ecuaciones (1) una solución óptima está dada por cualesquiera valores de x_1, x_2, x_3 y x_4, tal que

$$x_1 = (1 - t)p_1 + t \cdot 0 = (1 - t)p_1,$$

$$x_2 = (1 - t)q_1 + tq_2,$$

$$x_3 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0,$$

$$x_4 = (1 - t) \cdot 0 + tp_2 = tp_2,$$

$$\text{en donde} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Obsérvese que cuando $t = 0$ se obtiene la primera S.F.B. óptima; cuando $t = 1$ se obtiene la segunda. Por supuesto, es posible repetir el procedimiento utilizando la tabla correspondiente a la última S.F.B. y obtener más soluciones óptimas utilizando las Ecuaciones (1).

En general:

> En una tabla que contiene una solución óptima, un indicador cero para una variable no básica sugiere la posibilidad de que existan soluciones óptimas múltiples.

EJEMPLO 2

Maximizar $Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3$ *sujeta a*

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6,$$

$$-2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 10,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

La tabla simplex inicial es

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
variable saliente →	s_1	1	2	③	1	0	0	6	$6 \div 3 = 2.$
	s_2	−2	−5	1	0	1	0	10	$10 \div 1 = 10.$
	Z	1	−4	−6	0	0	1	0	

indicadores

variable entrante

Dado que existe un indicador negativo, se continúa.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
variable saliente →	x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2	$2 \div \frac{2}{3} = 3.$
	s_2	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	8	no existe cociente.
	Z	3	0	0	2	0	1	12	

indicadores

variable entrante

Todos los indicadores son no negativos y, por consiguiente, se tiene una solución óptima para esta S.F.B.

$$x_3 = 2, \qquad s_2 = 8, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad s_1 = 0,$$

y el valor máximo de Z es 12. Sin embargo, ya que x_2 es una variable no básica y su indicador es 0, se verifica la existencia de soluciones múltiples. Considerando a x_2 como variable entrante, se obtiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	3
s_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	25
Z	3	0	0	2	0	1	12

La S.F.B. es aquí

$$x_2 = 3, \qquad s_2 = 25, \qquad x_1 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad s_1 = 0$$

(para la cual $Z = 12$, igual que antes) y es diferente de la anterior. Consecuentemente, existen soluciones múltiples. Dado que sólo interesan los valores de las variables estructurales, se tiene una solución óptima

$$x_1 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0,$$

$$x_2 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 3 = 3t,$$

$$x_3 = (1 - t) \cdot 2 + t \cdot 0 = 2(1 - t)$$

para cada valor de t, en donde $0 \leq t \leq 1$. (Por ejemplo, si $t = \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = 1$ es una solución óptima.)

En la última S.F.B. x_3 es no básica y su indicador es 0. Sin embargo, si se repitiera el proceso para determinar otras soluciones óptimas, se volvería a la segunda tabla. Por ello, el procedimiento no ofrece otras soluciones óptimas.

EJERCICIOS 9.5

En los Problemas **1** *y* **2**, *¿el problema de programación lineal asociado a la tabla que se presenta produce degeneración? Si es así, ¿por qué?*

1.

	x_1	x_2	s_1	s_2	Z	
x_1	1	2	4	0	0	6
s_2	0	1	1	1	0	3
Z	0	−3	−2	0	1	10

indicadores

2.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	
s_1	2	0	2	1	1	0	4
x_2	3	1	1	0	1	0	0
Z	5	0	1	0	−3	1	2

indicadores

En los Problemas **3-11**, *utilice el método simplex.*

3. Maximizar
$$Z = 2x_1 + 7x_2$$
sujeta a
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &\leq 4, \\ 3x_1 - x_2 &\leq 6, \\ 5x_1 &\leq 8, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Maximizar
$$Z = x_1 + x_2$$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\leq 4, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

5. Maximizar
$$Z = 3x_1 - 3x_2$$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

6. Maximizar
$$Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\geq -4, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 &\leq 8, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Maximizar
$$Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3$$
sujeta a
$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Maximizar
$$Z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$$
sujeta a
$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 &\leq 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 12, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

9. Maximizar
$$Z = 6x_1 + 2x_2 + x_3$$
sujeta a
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7, \\ -4x_1 - x_2 &\geq -6, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

10. Maximizar
$$P = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$
sujeta a
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 5, \\ x_2 - x_3 &\leq 2, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sofás. Cada mueble requiere madera, plástico y aluminio según se señala en la tabla que aparece enseguida. La compañía dispone de 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cada silla, mecedora y sofá se vende en \$6, \$8 y \$12, respectivamente. Suponiendo que se pueden vender todos los muebles, ¿cuál es el máximo de ingresos totales que puede obtenerse? Determine los posibles programas de producción que generarían estos ingresos.

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

9.6 Variables artificiales

Para iniciar el método simplex se requiere una solución factible básica. Para un problema normal de programación lineal se comienza con la S.F.B. en la que todas las variables estructurales son cero. Sin embargo, en el caso de un problema de maximización que no se encuentra en la forma normal es posible que no exista una S.F.B con esa característica. En esta sección se revisa la forma en la que se utiliza el método simplex en este tipo de situaciones.

Considérese el siguiente problema:

$$\text{maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9, \tag{1}$$

$$x_1 - x_2 \geq 1, \tag{2}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$. Dado que la restricción (2) no puede escribirse como $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, en donde b es una constante no negativa, este problema no puede plantearse en su forma normal. Obsérvese que (0, 0) no es un punto factible. Para resolver este problema se comienza escribiendo las restricciones (1) y (2) en forma de ecuaciones. La restricción (1) se convierte en

$$x + x_2 + s_1 = 9, \tag{3}$$

en donde s_1 es una variable de holgura y $s_1 \geq 0$. Para la restricción (2), $x_1 - x_2$ será igual a 1 si *se resta* una variable de holgura no negativa s_2 de $x_1 - x_2$. Es decir, restando s_2 se compensa el "excedente" del lado izquierdo de (2) de manera que se convierta en igualdad. Así,

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1, \tag{4}$$

en donde $s_2 \geq 0$. Ahora se puede replantear el problema:

$$\text{maximizar } Z = x_1 + 2x_2 \tag{5}$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9, \tag{6}$$

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1, \tag{7}$$

y $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

Debido a que (0, 0) no se encuentra en la región factible, no se tiene una S.F.B. en la que $x_1 = x_2 = 0$. De hecho, si se sustituyen $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ en la Ecuación (7), entonces $0 - 0 - s_2 = 1$, lo cual da $s_2 = -1$. Pero esto contradice la condición de que $s_2 \geq 0$.

Para iniciar el método simplex se necesita una S.F.B. Aunque no existe ninguna que sea evidente, hay un ingenioso método para llegar a una en *forma artificial*. Se requiere considerar un problema de programación lineal relacionado al que se denomina *problema artificial*. En primer lugar, se forma una nueva ecuación sumando al lado izquierdo de la ecuación en la que el coeficiente de la variable de holgura es -1, una variable no negativa t. A tal variable t se le denomina **variable artificial**. En este caso se reemplaza la Ecuación (7) por $x_1 - x_2 - s_2 + t = 1$. En consecuencia, las Ecuaciones (6) y (7) se convierten en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9, \tag{8}$$

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1, \tag{9}$$

en donde $x_1, x_2, s_1, s_2, t \geq 0$.

Se encuentra una solución evidente a las Ecuaciones (8) y (9) igualando x_1, x_2 y s_2 a 0. Esto da

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0, \qquad s_1 = 9, \qquad t = 1.$$

Obsérvese que estos valores no satisfacen las Ecuaciones (6) y (7). Sin embargo, es evidente que cualquier solución de las Ecuaciones (8) y (9) para la cual $t = 0$ arroja una solución para las Ecuaciones (6) y (7), y viceversa.

Se puede obligar a t a ser igual a 0 si se altera la función objetiva original. Se define la **función objetiva artificial** como

$$W = Z - Mt = x_1 + 2x_2 - Mt, \tag{10}$$

en donde la constante M es un número positivo grande. No es de preocupar el valor específico de M, ya que no es necesario determinarlo, y se procede a maximizar W mediante el método simplex. Puesto que existen $m = 2$ restricciones (excluyendo las condiciones de no negatividad) y $n = 5$ variables en las Ecuaciones (8) y (9), cualquier S.F.B. debe tener cuando menos $n - m = 3$ variables iguales a cero. Se comienza con la siguiente S.F.B.:

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0, \qquad s_1 = 9, \qquad t = 1. \tag{11}$$

En esta S.F.B. inicial las variables no básicas son las variables estructurales y la variable de holgura que tiene coeficiente -1 en las Ecuaciones (8) y (9). El valor correspondiente de W es $W = x_1 + 2x_2 - Mt = -M$, que es "extremadamente" negativa. Ocurrirá un mejoramiento significativo en W si se puede hallar una S.F.B. para la cual $t = 0$. Dado que el método simplex busca valores de W que sean mejores en cada etapa sucesiva, se aplica hasta llegar a una S.F.B., que sea mejor si es posible. Tal solución será una S.F.B. inicial para el problema original.

A fin de aplicar el método simplex al problema artificial, primero se escribe la Ecuación (10) como

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0. \tag{12}$$

La matriz de coeficientes aumentada de las Ecuaciones (8), (9) y (12) es

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ t \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}. \tag{13}$$

La Ecuación (11) ofrece una S.F.B. inicial. Obsérvese en el renglón 1 que cuando $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, se puede leer directamente el valor de s_1, a saber $s_1 = 9$. Del renglón 2 se tiene $t = 1$. Del renglón 3, $MT + W = 0$. Puesto que $t = 1$, entonces $W = -M$. Pero en una tabla simplex se desea que el valor de W aparezca en la última columna y el último renglón. No es el caso en (13), y por eso se modifica la matriz.

Para hacer esto se transforma (13) en una matriz equivalente cuyo último renglón tiene la forma

$$\begin{array}{cccccc:c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & 1 & ? \end{array}$$

Es decir, la M de la columna de t se reemplaza por un 0. Como resultado, si $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, entonces W es igual al último elemento. Procediendo a obtener esta matriz, resulta

$$\begin{array}{cccccc:c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccccc:c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}\right] \end{array}$$

(sumando al renglón 3 el renglón 2 multiplicado por $-M$)

Enseguida se revisan los sucesos. Si $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $s_2 = 0$, entonces del renglón 1 se obtiene $s_1 = 9$; del renglón 2, $t = 1$; y del renglón 3, $W = -M$. Por lo tanto, ahora se tiene la tabla simplex inicial I.

TABLA SIMPLEX I

variable saliente		x_1	x_2	s_1	s_2	t	W		*Cocientes*
	s_1	1	1	1	0	0	0	9	$9 \div 1 = 9.$
$\rightarrow$	t	①	-1	0	-1	1	0	1	$1 \div 1 = 1.$
	W	$-1-M$	$-2+M$	0	M	0	1	$-M$	

indicadores

↑ variable entrante

A partir de este punto se puede utilizar el procedimiento de la Sección 9.4. Como M es un número positivo grande, el indicador más negativo es $-1 - M$. Por consiguiente, la variable entrante es x_1. De los cocientes, se elige t como la variable saliente. Se encierra en un círculo el elemento pivote. Utilizando operaciones elementales sobre renglones para hacer que la posición del pivote se convierta en un 1 y se conviertan en 0 las posiciones restantes de esa columna, se obtiene la Tabla II.

TABLA SIMPLEX II

variable saliente		x_1	x_2	s_1	s_2	t	W		*Cocientes*
$\rightarrow$	s_1	0	②	1	1	-1	0	8	$8 \div 2 = 4.$
	x_1	1	-1	0	-1	1	0	1	(no existe cociente,
	W	0	-3	0	-1	$M+1$	1	1	puesto que -1 no es positivo).

indicadores

↑ variable entrante

De la Tabla II, se tiene la siguiente S.F.B.:

$$s_1 = 8, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad t = 0.$$

Dado que $t = 0$, los valores $s_1 = 8$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $s_2 = 0$ forman una S.F.B. inicial para el problema *original*. La variable artificial ha cumplido su cometido. Para las tablas sucesivas se elimina la columna de t (ya que se desea resolver el problema original) y se cambian las W por términos Z (puesto que $W = Z$ para $t = 0$). En la Tabla II la variable entrante es x_2, la que sale es s_1 y se encierra en un círculo el elemento pivote. Utilizando operaciones elementales sobre renglones (omitiendo la columna de t) se obtiene la Tabla III

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	s_1	s_2	Z	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	5
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	13

indicadores

Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 13. Ocurre cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 4$.

Vale la pena repasar las etapas que se realizaron para resolver el problema:

$$\text{maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9, \tag{14}$$

$$x_1 - x_2 \geq 1, \tag{15}$$

y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Se escribe (14) como

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9. \tag{16}$$

Como (15) implica el símbolo $\geq$ y la constante del lado derecho es no negativa, se escribe (15) en una forma que tiene tanto una variable de holgura (con coeficiente -1) y una variable artificial.

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1. \tag{17}$$

La ecuación objetiva artificial que se debe considerar es $W = x_1 + 2x_2 - Mt$, o de manera equivalente,

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0. \tag{18}$$

La matriz aumentada de coeficientes del sistema formada por las ecuaciones (16)-(18) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Enseguida se elimina la M de la columna de la variable artificial y se le reemplaza por 0 utilizando operaciones elementales sobre renglones. La tabla simplex I resultante, corresponde a la S.F.B inicial para el problema artificial, en el que las variables estructurales x_1, x_2 y la variable de holgura s_2 (la que está asociada con la restricción que implica el símbolo $\geq$) son cada una igual a 0.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ t \\ W \end{matrix}\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}\right] \end{array}.$$

Las variables básicas s_1 y t que se encuentran al lado izquierdo de la tabla corresponden a las variables no estructurales de las Ecuaciones (16) y (17) que tienen coeficientes positivos. En este punto, se aplica el método simplex hasta obtener una S.F.B. en la que la variable artificial t sea igual a 0. Después se puede eliminar la columna de la variable artificial, cambiar las W a Z y continuar el procedimiento hasta obtener el valor máximo de Z.

EJEMPLO 1

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ *sujeta a*

$$x_1 + x_2 \leq 12, \tag{19}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20, \tag{20}$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \tag{21}$$

y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Las ecuaciones para (19)-(21) implicarán un total de tres variables de holgura: s_1, s_2 y s_3. Dado que (21) contiene el símbolo $\geq$ y la constante del lado derecho es no negativa, su ecuación implicará también una variable artificial t y el coeficiente de su variable de holgura s_3 será -1.

$$x_1 + x_2 + s_1 = 12, \tag{22}$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 20, \tag{23}$$

$$-x_1 + x_2 - s_3 + t = 2. \tag{24}$$

Se considera $W = Z - Mt = 2x_1 + x_2 - Mt$ como la ecuación objetiva artificial, o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt + W = 0, \tag{25}$$

en donde M es un número positivo grande. Ahora se construye la matriz aumentada de coeficientes de las Ecuaciones (22)-(25).

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Para obtener la tabla simplex I, se reemplaza la M que se encuentra en la columna de la variable artificial por cero sumando al renglón 4 el renglón 3 multiplicado por $-M$.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \text{variable saliente} \rightarrow\ t \\ W \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -2+M & -1-M & 0 & 0 & M & 0 & 1 & -2M \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 12 \div 1 = 12. \\ 20 \div 2 = 10. \\ 2 \div 1 = 2. \end{array}$$

indicadores

↑ variable entrante

Las variables s_1, s_2 y t que se encuentran del lado izquierdo de la tabla I son las variables no estructurales con coeficientes positivos de las Ecuaciones (22)-(24). Como M es un número positivo grande, $-1 - M$ es el indicador más negativo. La variable en-

trante es x_2, la variable saliente es t y se encierra en un círculo el elemento pivote. Continuando, se obtiene la Tabla II.

TABLA SIMPLEX II

variable saliente		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t	W		*Cocientes*
→	s_1	②	0	1	0	1	−1	0	10	$10 \div 2 = 5.$
	s_2	3	0	0	1	2	−2	0	16	$16 \div 3 = 5\frac{1}{3}.$
	x_2	−1	1	0	0	−1	1	0	2	
	W	−3	0	0	0	−1	$1+M$	1	2	

↑ variable entrante

indicadores

La S.F.B. que corresponde a la tabla II tiene $t = 0$. Consecuentemente, se elimina la columna de t y se cambian las W por Z en las tablas siguientes. Continuando, se obtiene la tabla III.

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5
s_2	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	7
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	17

indicadores

Todos los indicadores son no negativos. Por ello, el valor máximo de Z es 17. Se presenta cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$.

Cuando una restricción de *igualdad* de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \quad \text{en donde } b \geq 0,$$

se presenta en un problema de programación lineal, se utilizan variables artificiales en el método simplex. Para ilustrar esto, se considera el siguiente problema:

$$\text{maximizar } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6, \tag{26}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. La restricción (26) ya está expresada en forma de ecuación, de modo que no se requiere variable de holgura. Puesto que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ no es una solución factible, no se tiene un punto inicial evidente para el procedimiento simplex. De manera que se crea un problema artificial añadiendo en primer término una variable artificial t al lado izquierdo de la Ecuación (26):

$$x_1 + x_2 - x_3 + t = 6.$$

Aquí, una S.F.B. evidente es $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $t = 6$. La función objetiva artificial es

$$W = Z - Mt = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - Mt,$$

en donde M es un número positivo grande. Se aplica a este problema artificial el procedimiento simplex hasta que se obtiene una S.F.B. en la que $t = 0$. Esta solución ofrecerá una S.F.B. inicial para el problema original y, en este caso, se puede proceder igual que antes.

En general, puede utilizarse el método simplex para

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m, \end{array}\right\} \tag{27}$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son no negativas. Los símbolos $\{\leq, \geq, =\}$ significan que existe una de las relaciones "$\leq$", "$\geq$" o bien "$=$" para una restricción. Si todas las restricciones implican "$\leq$" el problema está en su forma normal y se aplican las técnicas simplex que se vieron en las secciones precedentes. Si cualesquiera restricciones implican "$\geq$" o bien "$=$", se comienza con un problema artificial, que se obtiene de la siguiente manera.

Cada restricción que contenga "$\leq$" se escribe en forma de ecuación incluyendo una variable de holgura s_i con coeficiente $+1$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

Cada restricción que contenga "$\geq$" se escribe en forma de ecuación incluyendo una variable de holgura s_j con coeficiente -1 y una variable artificial t_j:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - s_j + t_j = b_j.$$

Se inserta en cada restricción de igualdad una variable artificial no negativa t_k:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + t_k = b_k.$$

Si, por ejemplo, las variables artificiales de este problema fueran, t_1, t_2, t_3, entonces la función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt_1 - Mt_2 - Mt_3,$$

en donde M es un número positivo grande. Se presenta una S.F.B. inicial cuando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ y cada una de las variables de holgura que tienen coeficiente de -1 son iguales a 0. Después de obtener una tabla simplex inicial, se aplica el procedimiento simplex hasta llegar a la tabla que corresponda a una S.F.B. en la que *todas* las variables artificiales sean 0. Aquí se eliminan las columnas de las variables artificiales, se cambian las W a Z y se continúa el procedimiento según se vio en las secciones precedentes.

EJEMPLO 2

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$ *sujeta a*

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6, \tag{28}$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -2, \tag{29}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Las restricciones (28) y (29) tendrán las formas que se indican en (27) [es decir, las b serán positivas] si se multiplican ambos lados de cada restricción por -1:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \tag{30}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2. \tag{31}$$

Como las restricciones (30) y (31) implican "$=$" y "$\geq$", se requieren dos variables artificiales t_1 y t_2. Las ecuaciones para el problema artificial son:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 = 6 \tag{32}$$

y

$$x_1 + x_2 - x_3 - s_2 + t_2 = 2. \tag{33}$$

Aquí, el subíndice 2 de s_2 refleja el orden de las ecuaciones. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1 - Mt_2$ o, lo que es equivalente,

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0, \tag{34}$$

en donde M es un número positivo grande. La matriz aumentada de coeficientes de las Ecuaciones (32)-(34) es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & -3 & 2 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Ahora, se utilizan operaciones elementales sobre renglones para eliminar las M de *todas* las columnas de variables artificiales. Sumando al renglón 3 el 1 multiplicado por $-M$ y sumando al renglón 3 el 2 multiplicado por $-M$, se obtiene la tabla simplex inicial I.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{l} \\ \text{variable saliente} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{array} \\ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \\ W \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & \textcircled{1} & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1-2M & -3-3M & 2-M & M & 0 & 0 & 1 & -8M \end{array}\right] \\ \uparrow \text{ indicadores} \\ \text{variable entrante} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 6 \div 2 = 3. \\ 2 \div 1 = 2. \\ \\ \\ \end{array}$$

Continuando se obtienen las tablas simplex II y III

TABLA SIMPLEX II

Variable saliente →		x_1	x_2	x_3	s_2	t_1	t_2	W		*Cocientes*
	t_1	-1	0	④	2	1	-2	0	2	$2 \div 4 = \frac{1}{2}$.
	x_2	1	1	-1	-1	0	1	0	2	
	W	$2+M$	0	$-1-4M$	$-3-2M$	0	$3+3M$	1	$6-2M$	

indicadores

variable entrante

TABLA SIMPLEX III

variable saliente →		x_1	x_2	x_3	s_2	t_1	t_2	W		*Cocientes*
	x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	①	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$.
	x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	
	W	$\frac{7}{4}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}+M$	$\frac{5}{2}+M$	1	$\frac{13}{2}$	

indicadores

variable entrante

Para la S.F.B. que corresponde a la tabla III, las dos variables artificiales t_1 y t_2 son 0. Ahora se pueden eliminar las columnas de t_1 y t_2 y cambiar las W por Z. Continuando se obtiene la tabla simplex IV.

TABLA SIMPLEX IV

	x_1	x_2	x_3	s_2	Z	
s_2	$-\frac{1}{2}$	0	2	1	0	1
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	3
Z	$\frac{1}{2}$	0	5	0	1	9

indicadores

Ya que todos los indicadores son no negativos, se ha llegado a la tabla final. El valor máximo de Z es 9 y aparece cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 0$.

Es posible que el procedimiento simplex termine y no todas las variables artificiales sean 0. Se puede probar que, en esta situación, *la región factible del problema original es vacía* y, en consecuencia, *no existe solución óptima*. Se ilustra esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ *sujeta a*

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \tag{35}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Como la restricción (35) de la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$, en donde $b_1 \geq 0$, se requiere de una variable artificial. Las ecuaciones que deben considerarse son

$$-x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 2 \tag{36}$$

y

$$x_1 + x_2 + s_2 = 1, \tag{37}$$

en donde s_1 y s_2 son variables de holgura y t_1 es artificial. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1$ o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt_1 + W = 0. \tag{38}$$

La matriz de coeficientes aumentada de las Ecuaciones (36)-(38) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Las tablas simplex se presentan enseguida.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{l} \\ t_1 \\ \text{variable} \longrightarrow s_2 \\ \text{saliente} \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2+M & -1-M & M & 0 & 0 & 1 & -2M \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 2 \div 1 = 2. \\ 1 \div 1 = 1. \end{array}$$

indicadores

variable entrante

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{l} t_1 \\ x_2 \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1+2M & 0 & M & 1+M & 0 & 1 & 1-M \end{array}\right] \end{array}$$

indicadores

Debido a que M es un número positivo grande, los indicadores de la tabla simplex II son no negativos, es momento de terminar con el procedimiento simplex. El valor de la variable artificial t_1 es 1. Por lo tanto, tal como se planteó antes, la región factible

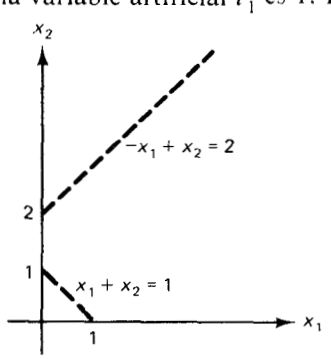


FIGURA 9.21

del problema original es vacía y, por consiguiente, no existe solución. Se puede obtener este resultado en forma geométrica. En la Figura 9.21 se muestran las gráficas de $-x_1 + x_2 = 2$ y $x_1 + x_2 = 1$ para $x_1, x_2 \geq 0$. Como no existe ningún punto (x_1, x_2) que quede simultáneamente por encima de $-x_1 + x_2 = 2$ y por debajo de $x_1 + x_2 = 1$ tal que $x_1, x_2 \geq 0$, la región factible es vacía y, consecuentemente, no existe solución.

En la siguiente sección se utiliza el método simplex en problemas de minimización.

EJERCICIOS 9.6

Utilice el método simplex para resolver los siguientes problemas.

1. Maximizar
$$Z = 2x_1 + x_2$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$-x_1 + x_2 \geq 4,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Maximizar
$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Maximizar
$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4. Maximizar
$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

5. Maximizar
$$Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$
sujeta a
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

6. Maximizar
$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
sujeta a
$$x_2 - 2x_3 \geq 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7. Maximizar
$$Z = x_1 - 10x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 \geq 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

8. Maximizar
$$Z = x_1 + 4x_2 - x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 7,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. Maximizar
$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq -6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

10. Maximizar
$$Z = x_1 + 4x_2$$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12,$$
$$x_2 \geq 2,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

11. Maximizar
$$Z = -3x_1 + 2x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 = 4,$$
$$x_1 \geq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

12. Maximizar
$$Z = x_1 - 5x_2$$
sujeta a
$$x_1 - 2x_2 \geq -13,$$
$$-x_1 + x_2 \geq 3,$$
$$x_1 + x_2 \geq 11,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

13. Una compañía fabrica dos modelos de mesas para cocina: Contemporáneas y Tradicionales. Cada modelo requiere los tiempos de ensamble y terminado que se dan en la tabla que aparece enseguida. También se indica la utilidad sobre cada mesa. El número de horas disponible a la semana en el departamento de ensamble es 400 y en el departamento de terminado es 510. Debido a un contrato sindical, se le garantizan al departamento de terminado cuando menos 240 horas de trabajo a la semana. ¿Cuántas mesas de cada modelo debe fabricar la compañía cada semana para maximizar las utilidades?

	Tiempo de ensamble	Tiempo de terminado	Utilidad por mueble
Contemporánea	1 h	2 h	$10
Tradicional	2 h	3 h	12

14. Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere el uso de tiempo de máquina, en las máquinas A y B, según se muestra en la tabla que aparece enseguida. El número de horas a la semana que están disponibles A y B para producción son 40 y 30, respectivamente. La utilidad por unidad de X, Y y Z es \$50, \$60 y \$75, respectivamente. Se deben fabricar para la siguiente semana cuando menos 5 unidades de Z. ¿Cuál debe ser el programa de producción para ese periodo si se debe alcanzar la utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 h	1 h
Producto Y	2 h	1 h
Producto Z	2 h	2 h

15. El anuncio de un fondo de inversión establece que todo el dinero se invierte en bonos con calificación A, AA y AAA; no se invierte más del 30% del total en los bonos A y AA, y se invierte cuando menos el 50% en AA y AAA. Los bonos A, AA y AAA producen rendimientos de 8%, 7%, y 6% anual, respectivamente. Determine los porcentajes de la inversión total que se deben comprometer en cada tipo de bono para que el fondo maximice su rendimiento anual. ¿Cuál es este rendimiento?

9.7 Minimización

Hasta este punto se ha utilizado el método simplex sólo para *maximizar* funciones objetivo. En general, para *minimizar* una función es suficiente maximizar el negativo de la misma. Para comprender por qué considérese la función $f(x) = x^2 - 4$. En la Figura 9.22(a) se observa que el valor mínimo de f es -4 y aparece cuando $x = 0$. En la Figura 9.22(b) se muestra la gráfica de $g(x) = -f(x) = -(x^2 - 4)$. Esta gráfica es la reflexión de la gráfica f sobre el eje de las x. Obsérvese que el valor máximo de g es 4 y se presenta cuando $x = 0$. Entonces, el mínimo valor de $x^2 - 4$ es el negativo del valor máximo de $-(x^2 - 4)$. Es decir,

$$\text{mín } f = -\text{máx}(-f).$$

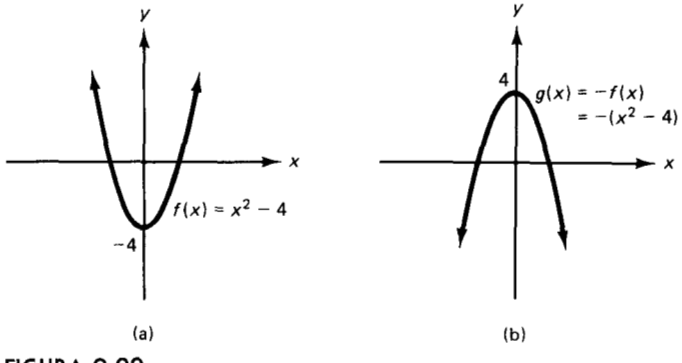


FIGURA 9.22

EJEMPLO 1

Utilizar el método simplex para minimizar $Z = x_1 + 2x_2$ *sujeta a*

$$-2x_1 + x_2 \geq 1, \tag{1}$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \tag{2}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Para minimizar Z, se puede maximizar $-Z = -x_1 - 2x_2$. Obsérvese que las restricciones (1) y (2) tienen ambas la forma $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$, en donde $b \geq 0$. Por ello, sus ecuaciones implican dos variables de holgura s_1 y s_2, cada una de ellas con coeficiente -1, y dos variables artificiales t_1 y t_2.

$$-2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 1, \tag{3}$$

$$-x_1 + x_2 - s_2 + t_2 = 2. \tag{4}$$

Como existen *dos* variables artificiales se maximiza la función objetivo $W = (-Z) - Mt_1 - Mt_2$, en donde M es un número positivo grande. De forma equivalente,

$$x_1 + 2x_2 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0. \tag{5}$$

La matriz de coeficientes aumentada de las Ecuaciones (3)-(5) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Procediendo se obtienen las tablas I, II y III.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{saliente} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{matrix} \\ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ W \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc:c} -2 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline \underbrace{1+3M \quad 2-2M \quad M \quad M \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{\text{indicadores}} & & & & & & & -3M \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 1 \div 1 = 1. \\ 2 \div 1 = 2. \end{array}$$

variable entrante

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{saliente} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{matrix} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ t_2 \\ W \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc:c} -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \textcircled{1} & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline \underbrace{5-M \quad 0 \quad 2-M \quad M \quad -2+2M \quad 0 \quad 1}_{\text{indicadores}} & & & & & & & -2-M \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ \\ 1 \div 1 = 1. \end{array}$$

variable entrante

TABLA SIMPLEX III

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{matrix} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ s_1 \\ W \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc:c} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline \underbrace{3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad M \quad -2+M \quad 1}_{\text{indicadores}} & & & & & & & -4 \end{array}\right] \end{array}$$

La S.F.B. que corresponde a la tabla III tiene ambas variables artificiales iguales a 0. Así, ya no se necesitan las columnas de t_1 y t_2. Sin embargo, los indicadores de las columnas de x_1, x_2, s_1 y s_2 son no negativos y, en consecuencia se ha llegado a la solución óptima. Dado que $W = -Z$ cuando $t_1 = t_2 = 0$, el valor máximo de $-Z$ es -4. Por lo tanto, el valor *mínimo* de Z es $-(-4)$, o bien 4. Aparece cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

EJEMPLO 2

Una fábrica de cemento produce 2,500,000 *costales de cemento al año. Los hornos arrojan dos libras de polvo por cada saco que se produce. Una agencia gubernamental encargada de la protección del medio ambiente exige a la planta reducir sus emisiones de polvo a no más de* 800,000 *libras al año. Hay dos dispositivos de control de emisiones, A y B. El A reduce las emisiones a* $\frac{1}{2}$ *libra por costal y su costo es de* \$0.20 *por costal de cemento fabricado. Con el dispositivo B las emisiones se reducen a un* $\frac{1}{5}$ *de libra por costal y su costo es* \$0.25 *por saco o costal de cemento que se fabrique. Determine el curso de acción más económico para la planta, de manera que permita cumplir con el requerimiento de la agencia y que también permita mantener la producción de* 2,500,000 *costales de cemento.**

Se debe minimizar el costo anual del control de emisiones. Sean x_1, x_2 y x_3 los números anuales de sacos de cemento que se fabrican en los hornos que utilizan el dispositivo A, el B y ningún dispositivo, respectivamente. Entonces, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y el costo anual de control de emisiones C (en dólares) es

$$C = \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3. \tag{6}$$

Como se fabrican 2,500,000 costales de cemento cada año,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2{,}500{,}000. \tag{7}$$

El número de libras de polvo emitido anualmente por los hornos que utilizan el dispositivo A, el B y ningún dispositivo son $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{5}x_2$ y $2x_3$, respectivamente. En virtud de que el número total de libras de emisiones de polvo no debe ser superior a 800,000,

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + 2x_3 \leq 800{,}000. \tag{8}$$

Para minimizar C sujeta a las restricciones (7) y (8) en donde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, en primer lugar se maximiza $-C$ utilizando el método simplex. Las ecuaciones que se deben considerar son

$$x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 2{,}500{,}000 \tag{9}$$

y

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + 2x_3 + s_2 = 800{,}000, \tag{10}$$

en donde t_1 y s_2 son variables artificial y de holgura, respectivamente. La ecuación objetivo artificial es $W = (-C) - Mt_1$ o, de manera equivalente,

$$\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3 + Mt_1 + W = 0, \tag{11}$$

* Este ejemplo se adaptó de Robert E. Kohn, "A Mathematical Model for Air Pollution Control", School Science and Mathematics, 69 (1969), 487-94.

en donde M es un número positivo grande. La matriz aumentada de coeficientes de las Ecuaciones (9)-(11) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2{,}500{,}000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 0 & 0 & 800{,}000 \\ \hdashline \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Después de determinar la tabla simplex inicial, se continúa y se obtiene (después de tres tablas adicionales) la tabla final:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & -C & \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ -C \end{matrix}\left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & -5 & -\frac{10}{3} & 0 & 1{,}500{,}000 \\ 1 & 0 & 6 & \frac{10}{3} & 0 & 1{,}000{,}000 \\ \hdashline 0 & 0 & \underbrace{\frac{1}{20}}_{\text{indicadores}} & \frac{1}{6} & 1 & -575{,}000 \end{array}\right] \end{array}.$$

Nótese que se reemplaza W por $-C$ cuando $t_1 = 0$. El valor máximo de $-C$ es $-575{,}000$ y aparece cuando $x_1 = 1{,}000{,}000$, $x_2 = 1{,}500{,}000$ y $x_3 = 0$. Por lo tanto, el costo anual *mínimo* de control de emisiones es $-(-575{,}000) = \$575{,}000$. Se debe instalar el dispositivo A en los hornos que fabrican 1,000,000 de costales de cemento anualmente y el dispositivo B se debe instalar en los hornos que fabrican 1,500,000 costales al año.

EJERCICIOS 9.7

Utilice el método simplex para resolver los siguientes problemas.

1. Minimizar
$Z = 3x_1 + 6x_2$
sujeta a
$-x_1 + x_2 \geq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 10,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

2. Minimizar
$Z = 8x_1 + 12x_2$
sujeta a
$2x_1 + 2x_2 \geq 1,$
$x_1 + 3x_2 \geq 2,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. Minimizar
$Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$
sujeta a
$x_1 - x_2 - x_3 \geq 9,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

4. Minimizar
$Z = x_1 + x_2 + 2x_3$
sujeta a
$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

5. Minimizar
$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
sujeta a
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6,$
$x_1 - x_3 \leq -4,$
$x_2 + x_3 \leq 5,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

6. Minimizar
$Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$
sujeta a
$4x_1 + x_2 - x_3 \leq 3,$
$x_1 + x_3 \leq 4,$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

7. Minimizar
$Z = x_1 - x_2 - 3x_3$
sujeta a
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$
$x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

8. Minimizar
$Z = x_1 + x_2 - 2x_3$
sujeta a
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 = 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

9. Minimizar
$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$
sujeta a
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8,$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

10. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

11. Una fábrica de cemento produce 3,300,000 costales o sacos de cemento al año. El horno emite dos libras de polvo por cada costal que fabrica. La planta debe reducir sus emisiones de polvo a no más de 1,000,000 de libras por año. Hay dos dispositivos, A y B, para control de emisiones. El dispositivo A reduce las emisiones a $\frac{1}{2}$ libra por saco y el costo es de \$0.25 por costal de cemento que se fabrica. Para el dispositivo B, las emisiones se reducen a un $\frac{1}{4}$ de libra por saco y el costo es de \$0.40 por costal de cemento que se fabrica. Determine el curso de acción más económico para la fábrica, de manera que conserve su producción anual de exactamente 3,300,000 barriles de cemento.

12. Debido a un aumento en los negocios, una empresa que entrega alimentos a domicilio descubre que debe rentar dos camiones adicionales para hacer entregas. Las necesidades mínimas son de 12 unidades de espacio refrigerado y no refrigerado, para un total de 24. En el mercado de arrendamiento de camiones hay dos tipos estándares de vehículos. El tipo A tiene 2 unidades de espacio refrigerado y 1 unidad de espacio no refrigerado. El tipo B tiene 2 unidades de espacio refrigerado y 3 unidades de espacio no refrigerado. Los costos por milla son de \$0.40 para A y \$0.60 para B. ¿Cuántos camiones de cada tipo se deben rentar para minimizar el costo total por milla? ¿Cuál es el costo mínimo total por milla?

13. Una empresa con ventas al menudeo tiene ventas en Exton y Whyton, y posee almacenes A y B en otras dos ciudades. Cada tienda requiere que se le entreguen exactamente 30 refrigeradores. En el almacén A hay 50 refrigeradores y 20 en el B. Los costos de transporte para enviar refrigeradores de los almacenes a las tiendas se presentan en la tabla que aparece enseguida. Por ejemplo, el costo de enviar un refrigerador de A a la tienda de Exton es de \$15. ¿De qué manera debe la empresa ordenar los refrigeradores para satisfacer los requerimientos de las tiendas y minimizar los costos totales de transporte? ¿Cuál es el costo mínimo de transporte?

	EXTON	WHYTON
Almacén A	\$15	\$13
Almacén B	11	12

14. Un fabricante de automóviles adquiere baterías de dos proveedores, X y Y. El fabricante tiene dos plantas, A y B y requiere que se le entreguen exactamente 6000 baterías en la planta A y 4000 en la B. El proveedor X cobra \$30 y \$32 por batería (incluyendo los costos de transporte) hacia A y B, respectivamente. Con estos precios, X requiere que el fabricante de automóviles ordene cuando menos 2000 baterías. Sin embargo, X no puede proveer más que 4000 baterías. El proveedor Y cobra \$34 y \$28 por batería que envía hacia A y B respectivamente, y requiere se le pidan cuando menos 6000 baterías. Determine la forma en que el fabricante de automóviles debe ordenar las baterías necesarias para minimizar su costo total. ¿Cuál es este costo mínimo?

15. Una compañía papelera vende su papel adornado para envolturas en rollos de 48 pulgadas de ancho, a los que se denomina rollos estándares, y corta esos rollos en anchuras menores, dependiendo de los pedidos de los clientes. Supóngase que se recibe un pedido de 50 rollos de papel de 15 pulgadas de ancho y de 60 rollos de 10 pulgadas de ancho. De un rollo estándar la compañía puede cortar tres rollos de 15 pulgadas de anchura y uno de 3 pulgadas de ancho (véase la Figura 9.23). Como el rollo de 3 pulgadas no se puede utilizar en ese pedido, a las 3 pulgadas se les considera como desperdicio de ese rollo. Análogamente, de un rollo estándar se pueden

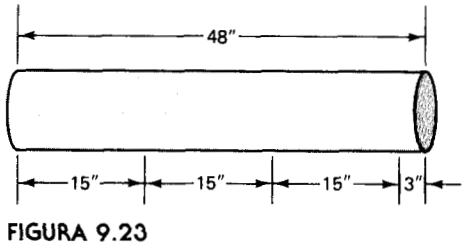


FIGURA 9.23

cortar dos rollos de 15 pulgadas, 1 de 10 y uno de 8. Aquí, el desperdicio sería de 8 pulgadas. En la tabla que aparece enseguida se señala el número de rollos de 15 y 10 pulgadas, junto con el desperdicio, que se puede cortar de un rollo estándar. (a) Completar las últimas dos columnas de la tabla. (b) Supóngase que la compañía tiene cantidades suficientes de rollos estándar para satisfacer el pedido y que se cortarán *cuando menos* 50 rollos de 15 pulgadas y 60 de 10 pulgadas. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los números de rollos estándar que se cortan de la manera descrita en las columnas 1-4 de la tabla, respectivamente, *determínense los valores de* x que minimizan los desperdicios totales. (c) ¿Cuál es la cantidad mínima de desperdicio total?

Anchura del rollo	15 plg	3	2	1	—
	10 plg	0	1	—	—
Desperdicio		3	8	—	—

9.8 El dual

Existe un principio fundamental que se denomina de *dualidad,* que permite resolver problemas de maximización resolviendo un problema de minimización relacionado con aquél. Enseguida se ilustra esto.

Supóngase que una compañía fabrica dos tipos de artefactos, manuales y eléctricos, y que cada uno de ellos requiere del uso de las máquinas A y B en su producción. En la Tabla 9.2 se señala que un artefacto manual requiere de 1 hora en la máquina A y 1 hora en la máquina B. Un dispositivo eléctrico requiere de 2 horas en A y 4 horas en B. El número máximo de horas disponibles al mes para las máquinas A y B son 120 y 180, respectivamente. Las utilidades para los artefactos manuales son de \$10 y para los eléctricos son de \$24. Suponiendo que la compañía puede vender todos los artefactos que pueda fabricar, se determina la utilidad máxima mensual. Si x_1 y x_2 son los números de artefactos manuales y eléctricos que se fabrican al mes, respectivamente, entonces se desea maximizar la función mensual de utilidad

$$P = 10x_1 + 24x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 120, \tag{1}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 180, \tag{2}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$. Escribiendo las restricciones (1) y (2) en forma de ecuaciones, se tiene

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \tag{3}$$

y

$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 180,$$

en donde s_1 y s_2 son variables de holgura. En la Ecuación (3) $x_1 + 2x_2$ es el número de horas que se utiliza la máquina A. En virtud de que hay disponibles 120 horas de esta máquina, entonces s_1 es el número de horas disponibles en A que *no* se utilizan para producción. Es decir, s_1 representa la capacidad no utilizada (en horas) para A.

TABLA 9.2

	Máquina A	Máquina B	Utilidad/Unidad
Manuales	1 h	1 h	\$10
Eléctricos	2 h	4 h	\$24
Horas disponibles	120	180	

De manera similar, s_2 representa la capacidad no utilizada de B. Resolviendo este problema mediante el método simplex, se encuentra que la tabla final es

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 30 \\ \hdashline \underbrace{0 \quad 0}_{\text{indicadores}} & & 8 & 2 & 1 & 1320 \end{array}\right] \end{array} \tag{4}$$

Por consiguiente, la utilidad máxima al mes es de \$1320, y se presenta cuando $x_1 = 60$ y $x_2 = 30$.

Ahora, se considera la situación desde un punto de vista diferente. Supóngase que la compañía desea rentar las máquinas A y B. ¿Cuál es la tarifa mensual mínima que le deberían cobrar? Ciertamente, si la tarifa fuera demasiado elevada, nadie rentaría las máquinas. Por otro lado, si la tarifa fuera demasiado baja, puede que no le resultara conveniente a la compañía rentarlas. Evidentemente, la renta mínima debe ser de \$1320. Es decir, lo mínimo que la compañía debiera cobrar es la utilidad que podría obtener utilizando ella misma las máquinas. Se puede llegar a esta cuota mínima de renta en forma directa resolviendo un problema de programación lineal.

Sea R la cuota mensual total de renta. Para determinar R, supóngase que la compañía asigna valores monetarios a cada hora de capacidad de las máquinas A y B. Sean y_1 y y_2 esos valores, respectivamente, en donde $y_1, y_2 = 0$. Entonces, el valor mensual de la máquina A es $120y_1$ y el de B es $180y_2$. De aquí,

$$R = 120y_1 + 180y_2.$$

El valor total del tiempo de máquina para fabricar un artefacto manual es $1y_1 + 1y_2$. Este debe ser cuando menos igual a los \$10 de utilidad que la compañía puede obtener fabricando ese artefacto. Si no lo logra, la compañía obtendría más dinero utilizando el tiempo de máquina para fabricar un artefacto manual. Consecuentemente

$$1y_1 + 1y_2 \geq 10.$$

De modo semejante, el valor total del tiempo de máquina que se requiere para fabricar un artefacto eléctrico debe ser de cuando menos \$24:

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24.$$

Por lo tanto, la compañía desea

$$\text{minimizar } R = 120y_1 + 180y_2$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 \geq 10, \tag{5}$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24, \tag{6}$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

Para minimizar R, se maximiza $-R$. Puesto que las restricciones (5) y (6) tienen la forma $a_1y_1 + a_2y_2 \geq b$, en donde $b \geq 0$, se considera un problema artificial. Si r_1 y r_2 son variables de holgura, y t_1 y t_2 son variables artificiales, entonces se desea maximizar $W = (-R) - Mt_1 - Mt_2$, en donde M es un número positivo grande, tal

que $y_1 + y_2 - r_1 + t_1 = 10$, $2y_1 + 4y_2 - r_2 + t_2 = 24$, y las y, las r y las t son no negativas. La tabla simplex final para este problema (habiendo eliminado las columnas de las variables artificiales y habiendo cambiado las W por $-R$) es

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ -R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & r_1 & r_2 & -R \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \hline \underbrace{0 \quad 0 \quad 60 \quad 30}_{\text{indicadores}} & & & & 1 & -1320 \end{array}\right] \end{array}.$$

Debido a que el valor máximo de $-R$ es -1320, el valor *mínimo* de R es $-(-1320) =$ \$1320 (tal como se anticipaba). Aparece cuando $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$. Por consiguiente, ya se ha determinado el valor óptimo del problema de programación lineal (maximización de utilidades) encontrando el valor óptimo de otro problema (minimización de la tarifa de renta).

Los valores $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$ se hubieran podido anticipar a partir de la tabla final del problema de maximización. En (4) el indicador 8 de la columna de s_1 significa que, al nivel óptimo de producción, si s_1 aumenta en 1 unidad, entonces la utilidad P *disminuye* también en 8. Es decir, 1 hora no usada de capacidad para A disminuye la utilidad máxima en \$8. Consecuentemente, 1 hora de capacidad de A vale \$8. Se dice que el **precio contable** de una hora de capacidad de A es \$8. Ahora, recordando que y_1 en el problema de la renta es el valor de una hora de capacidad de la máquina A. Por ello, y_1 debe ser igual a 8 en la solución óptima para ese problema. De manera similar, como el indicador de la columna de s_2 es 2, el precio contable de una hora de capacidad de B es \$2, que es el valor de y_2 en la solución óptima del problema de la renta.

Enseguida, se analiza la estructura de los dos problemas de programación lineal:

Maximizar		Minimizar	
$P = 10x_1 + 24x_2$		$R = 120y_1 + 180y_2$	
sujeta a		sujeta a	
$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1 + 4x_2 \le 180 \end{array}\right\}$	(7)	$\left.\begin{array}{l} y_1 + y_2 \ge 10 \\ 2y_1 + 4y_2 \ge 24 \end{array}\right\}$	(8)
y $y_1, y_2 \ge 0$.		y $x_1, x_2 \ge 0$.	

Obsérvese que en (7) todas las desigualdades son $\le$ pero en (8) todas son $\ge$. Los coeficientes de la función objetivo en el problema de minimización son los términos constantes de (7). Los términos constantes de (8) son los coeficientes de la función objetivo del problema de maximización. Los coeficientes de las y_1 en (8) son los coeficientes de x_1 y x_2 en la primera restricción de (7); los coeficientes de las y_2 de (8) son los coeficientes de x_1 y x_2 en la segunda restricción de (7). Al problema de minimización se le denomina *dual* del problema de maximización, y viceversa.

En general, dado cualquier problema de programación lineal, se le puede asociar otro problema de programación lineal al que se le denomina su **dual**. Al problema dado se le denomina **problema original**. Si el original es un problema de maximización, entonces su dual es de minimización. Análogamente, si el original es de minimización, entonces el dual es de maximización.

TABLA 9.3
Original (Dual)

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{array}\right\} \quad (9)$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$

TABLA 9.4
Dual (Original)

Minimizar $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{array}\right\} \quad (10)$$

y $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0.$

Cualquier problema de maximización puede escribirse en la forma que se señala en la Tabla 9.3. Obsérvese que no existen restricciones para las b.* El problema dual correspondiente de minimización se puede escribir en la forma que se señala en la Tabla 9.4. De forma semejante, cualquier problema de minimización se puede expresar en la forma de la Tabla 9.4 y su dual es el problema de maximización de la Tabla 9.3.

Ahora, se comparan el problema original y su dual en las Tablas 9.3 y 9.4. Por conveniencia, cuando se hace referencia a restricciones se quiere indicar las de (9) o (10); no se incluyen las condiciones de no negatividad. Obsérvese que, si todas las restricciones del problema original implican $\leq$ ($\geq$), entonces todas las restricciones de su dual implican $\geq$ ($\leq$). Los coeficientes de la función objetivo del dual son los términos constantes de las restricciones del original. De modo similar, los términos constantes de las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del original. La matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del dual es la *transpuesta* de la matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del original. Es decir, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si el original implica n variables estructurales y m variables de holgura, entonces el dual implica m variables estructurales y n variables de holgura. Se debe observar que el dual del *dual* es el original.

Existe una importante relación entre el original y su dual:

> Si el original tiene solución óptima, también la tiene el dual, y el valor óptimo de la función objetivo del original es la *misma* que la de su dual.

* Si una restricción de desigualdad implica $\geq$, multiplicando ambos lados por -1 se produce una gualdad que implica $\leq$. Si una restricción es igualdad, se le puede escribir en términos de dos desigualdades: una que implique $\leq$ y otra $\geq$.

Además, si se supone que la función objetivo de la original es $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$.

> Si s_i es la variable de holgura asociada con la i-ésima restricción del dual, entonces el indicador de la columna de s_i de la tabla simplex final del dual es el valor de x_i de la solución óptima del original.

Así, se puede resolver el problema original simplemente resolviendo su dual. En ocasiones esto resulta más conveniente que resolver en forma directa el original.

EJEMPLO 1

Encontrar el dual del siguiente problema:

$$\textit{maximizar } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 10,$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

El original es de la forma de la Tabla 9.3. En consecuencia, el dual es

$$\text{minimizar } W = 10y_1 + 10y_2$$

sujeta

$$y_1 + 2y_2 \geq 3,$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 4,$$

$$0y_1 + y_2 \geq 2,$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

EJEMPLO 2

Encontrar el dual del siguiente problema:

$$\textit{minimizar } Z = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$3x_1 - x_2 \geq 2, \tag{11}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1, \tag{12}$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 3, \tag{13}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Como el original es un problema de minimización, se desea que las restricciones (12) y (13) impliquen $\geq$ (véase la Tabla 9.4). Multiplicando ambos lados de (12) y (13) por

-1, se obtiene $-x_1 - x_2 \geq -1$ y $4x_1 - x_2 \geq -3$. Por lo tanto, las restricciones (11)-(13) se convierten en

$$3x_1 - x_2 \geq 2,$$
$$-x_1 - x_2 \geq -1,$$
$$4x_1 - x_2 \geq -3.$$

El dual es

$$\text{maximizar } W = 2y_1 - y_2 - 3y_3$$

sujeta a

$$3y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 4,$$
$$-y_1 - y_2 - y_3 \leq 3,$$

y $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

EJEMPLO 3

Utilizar el dual y el método simplex para maximizar $Z = 4x_1 - x_2 - x_3$ sujeta a

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

El dual es

$$\text{minimizar } W = 4y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$3y_1 + y_2 \geq 4, \tag{14}$$
$$y_1 + y_2 \geq -1, \tag{15}$$
$$-y_1 + y_2 \geq -1, \tag{16}$$

y $y_1, y_2 \geq 0$. Para utilizar el método simplex se deben obtener constantes no negativas en (15) y (16). Multiplicando ambos lados de (15) y (16) por -1, resulta

$$-y_1 - y_2 \leq 1, \tag{17}$$
$$y_1 - y_2 \leq 1. \tag{18}$$

Dado que (14) implica $\geq$, se requiere una variable artificial. Las ecuaciones correspondientes de (14), (17) y (18) son, respectivamente,

$$3y_1 + y_2 - s_1 + t_1 = 4,$$
$$-y_1 - y_2 + s_2 = 1,$$
$$\text{y} \quad y_1 - y_2 + s_3 = 1,$$

en donde t_1 es una variable artificial y s_1, s_2 y s_3 son variables de holgura. Para minimizar W se maximiza $-W$. La función objetivo artificial es $U = (-W) - Mt$, en donde

M es un número positivo grande. Después de realizar los cálculos se descubre que la tabla simplex final es

$$\begin{array}{c} \\ y_2 \\ s_2 \\ y_1 \\ -W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & s_3 & -W & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}\right] \\ \text{indicadores} \end{array}.$$

El valor máximo de $-W$ es $-\frac{11}{2}$, de modo que el valor *mínimo* de W es $\frac{11}{2}$. Consecuentemente, el valor máximo de Z es también $\frac{11}{2}$. Obsérvese que los indicadores de las columnas s_1, s_2 y s_3 son $\frac{3}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Por consiguiente, el valor máximo de Z aparece cuando $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{1}{2}$.

En el Ejemplo 1 de la Sección 9.7 se utilizó el método simplex para minimizar $Z = x_1 + 2x_2$, de manera que

$$-2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2,$$

y x_1, $x_1 \geq 0$. La tabla simplex inicial tenía 24 elementos e implicaba dos variables artificiales. La tabla del dual tiene sólo 18 elementos y *ninguna variable artificial* y es más fácil de manejar, como se muestra en el Ejemplo 4. Por ello, puede que se presente una ventaja considerable al resolver el dual para determinar la solución del original.

EJEMPLO 4

Utilizar el dual y el método simplex para minimizar $Z = x_1 + 2x_2$ *sujeta a*

$$-2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2,$$

y x_1, $x_2 \geq 0$.

El dual es

$$\text{maximizar } W = y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$-2y_1 - y_2 \leq 1,$$

$$y_1 + y_2 \leq 2,$$

y y_1, $y_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial es la tabla I.

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & W & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}\right] \\ \uparrow \text{ indicadores} \end{array}$$

variable saliente $\rightarrow$ (fila s_2)

variable entrante (columna y_2)

Cocientes

$2 \div 1 = 2.$

Continuando resulta la tabla II

TABLA SIMPLEX II

	y_1	y_2	s_1	s_2	W	
s_1	−1	0	1	1	0	3
y_2	1	1	0	1	0	2
W	1	0	0	2	1	4

indicadores

Puesto que todos los indicadores de la tabla II son no negativos, el valor máximo de W es 4. Así, el valor mínimo de Z es también 4. Los indicadores 0 y 2 de las columnas s_1 y s_2 de la tabla II significan que el valor mínimo de Z se presenta cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

EJERCICIOS 9.8

En los Problemas **1-8**, *obtenga los duales. No los resuelva.*

1. Maximizar
$Z = 2x_1 + 3x_2$
sujeta a
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$-x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

2. Maximizar
$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$
sujeta a
$x_1 + x_2 \leq 1,$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

3. Maximizar
$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$
sujeta a
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8,$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

4. Minimizar
$Z = 8x_1 + 12x_2$
sujeta a
$2x_1 + 2x_2 \geq 1,$
$x_1 + 3x_2 \geq 2,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

5. Maximizar
$Z = x_1 - x_2$
sujeta a
$-x_1 + 2x_2 \leq 13,$
$-x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1 + x_2 \geq 11,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

6. Maximizar
$Z = x_1 - x_2 + 4x_3$
sujeta a
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

7. Minimizar
$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$
sujeta a
$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3,$
$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

8. Minimizar
$Z = 6x_1 + 3x_2$
sujeta a
$-3x_1 + 4x_2 \geq -12,$
$13x_1 - 8x_2 \leq 80,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

En los Problemas **9-14**, *lleve a cabo la resolución utilizando duales y el método simplex.*

9. Minimizar
$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$
sujeta a
$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1,$
$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

10. Minimizar
$Z = x_1 + x_2$
sujeta a
$x_1 + 4x_2 \geq 28,$
$2x_1 - x_2 \geq 2,$
$-3x_1 + 8x_2 \geq 16,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

11. Maximizar
$Z = 3x_1 + 8x_2$
sujeta a
$x_1 + 2x_2 \leq 8,$
$x_1 + 6x_2 \leq 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

12. Maximizar
$Z = 2x_1 + 6x_2$
sujeta a
$3x_1 + x_2 \leq 12,$
$x_1 + x_2 \leq 8,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

13. Minimizar
$Z = 6x_1 + 4x_2$
sujeta a
$-x_1 + x_2 \leq 1,$
$x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

14. Minimizar
$Z = x_1 + x_2 + 2x_3$
sujeta a
$-x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

15. Una empresa está comparando los costos de publicidad en dos medios de comunicación: periódicos y radio. Por cada dólar de publicidad, la tabla que aparece enseguida presenta el número de personas, por grupo de ingresos, que cada uno de esos medios de comunicación alcanza. La empresa desea llegar a cuando menos 8000 personas de las que tienen ingresos de menos de $20,000 y a cuando menos 6000 de las que ganan más de $20,000. Utilizar el dual y el método simplex para hallar las cantidades que debe invertir la empresa en publicidad en periódicos y en radio, para llegar a ese número de personas, con un costo total mínimo. ¿Cuál es el costo total mínimo de publicidad?

	Menos de $20,000	**Más de** $20,000
Periódicos	40	100
Radio	50	25

16. Utilice el dual y el método simplex para determinar el costo total mínimo por milla del Problema 12 del Ejercicio 9.7.

17. Una compañía les paga a sus trabajadores calificados y semicalificados de su departamento de ensamble, $7 y $4 por hora, respectivamente. En el departamento de envíos, a los empleados se les pagan $5 por hora y a los aprendices se les paga $2 por hora. La compañía requiere de cuando menos 90 empleados en el departamento de ensamble y de cuando menos 60 en el de envíos. Debido a acuerdos sindicales, se deben contratar cuando menos el doble de trabajadores semicalificados en comparación de los calificados. También, se deben contratar a cuando menos el doble de empleados de envíos en comparación con aprendices. Utilizar el dual y el método simplex para encontrar el número de cada clase de trabajadores que la compañía debe contratar para que el total de salarios por hora que se les paguen sea mínimo. ¿Cuál es el total de los salarios por hora que es mínimo?

9.9 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 9.1 desigualdad lineal sistema de desigualdades

Sección 9.2 restricciones función lineal en x y y problema de programación lineal función objetivo solución factible condiciones de no negatividad región factible linea de igual utilidad vértice región factible acotada región factible no acotada región factible no vacía región factible vacía línea de isocostos solución no acotada

Sección 9.3 solución óptima múltiple

Sección 9.4 problema normal de programación lineal variable de holgura variable estructural solución factible básica variable no básica variable básica tabla simplex variable entrante indicador variable saliente elemento pivote método simplex degeneración

Sección 9.6 problema artificial variable artificial función objetivo artificial

Sección 9.8 precios contables dual original

RESUMEN

La solución de un sistema de desigualdades lineales consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente todas las desigualdades. Geométricamente, para dos variables, es la región que es común a todas las regiones determinadas por las desigualdades.

La programación lineal implica maximizar o minimizar una función lineal (la función objetivo) sujeta a un sistema de restricciones, que son desigualdades o ecuaciones lineales. Se presentó un método para encontrar la solución óptima de una región factible no vacía, y fue el método de los vértices. Se evaluó la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y se eligió el vértice en el que la función objetivo es óptima.

Para un problema que implica más de dos variables, el método de los vértices es o impráctico o imposible. En cambio, se utiliza un método matricial denominado método simplex, que es eficiente y completamente mecánico.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-10** *resuelva la desigualdad o el sistema de desigualdades que se dan.*

1. $-3x + 2y > -6$.

2. $x - 2y + 6 \geq 0$.

3. $2y \leq -3$.

4. $-x < 2$.

5. $\begin{cases} y - 3x < 6, \\ x - y > -3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y > 4, \\ x + y > 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y < 4, \\ y - x < 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x > y, \\ x + y < 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + y > -4, \\ x - y > -5, \\ x \geq 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y > 4, \\ x < 2, \\ y < -4. \end{cases}$

En los Problemas **11-18,** *no utilice el método simplex.*

11. Maximizar
$Z = x - 2y$
sujeta a
$y - x \leq 2$,
$x + y \leq 4$,
$x \leq 3$,
$x, y \geq 0$.

12. Maximizar
$Z = 4x + 2y$
sujeta a
$x + 2y \leq 10$,
$x \leq 4$,
$y \geq 1$,
$x, y \geq 0$.

13. Minimizar
$Z = 2x - y$
sujeta a
$x - y \geq -2$,
$x + y \geq 1$,
$x - 2y \leq 2$,
$x, y \geq 0$.

14. Minimizar
$Z = x + y$
sujeta a
$x + 3y \leq 15$,
$3x + 2y \leq 17$,
$x - 5y \leq 0$,
$x, y \geq 0$.

15. Minimizar
$Z = 4x - 3y$
sujeta a
$x + y \leq 3$,
$2x + 3y \leq 12$,
$5x + 8y \geq 40$,
$x, y \geq 0$.

***16.** Minimizar
$Z = 2x + 2y$
sujeta a
$x + y \geq 4$,
$-x + 3y \leq 18$,
$x \leq 6$,
$x, y \geq 0$.

***17.** Maximizar
$Z = 9x + 6y$
sujeta a
$x + 2y \leq 8$,
$3x + 2y \leq 12$,
$x, y \geq 0$.

18. Maximizar
$Z = 4x + y$
sujeta a
$x + 2y \geq 8$,
$3x + 2y \geq 12$,
$x, y \geq 0$.

En los Problemas **19-28,** *emplee el método simplex.*

19. Maximizar
$Z = 4x_1 + 5x_2$
sujeta a
$x_1 + 6x_2 \leq 12$,
$x_1 + 2x_2 \leq 8$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

20. Maximizar
$Z = 18x_1 + 20x_2$
sujeta a
$2x_1 + 3x_2 \leq 18$,
$4x_1 + 3x_2 \leq 24$,
$x_2 \leq 5$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

21. Minimizar
$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
sujeta a
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

22. Minimizar
$Z = x_1 + x_2$
sujeta a
$3x_1 + 4x_2 \geq 24$,
$x_2 \geq 3$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

23. Maximizar
$Z = x_1 + 2x_2$
sujeta a
$x_1 + x_2 \leq 12$,
$x_1 + x_2 \geq 5$,
$x_1 \leq 10$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

24. Minimizar
$Z = 2x_1 + x_2$
sujeta a
$x_1 + 2x_2 \leq 6$,
$x_1 + x_2 \geq 1$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

* Se refiere a la Sección 9.3.

25. Minimizar
$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq -1,$$
$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

26. Maximizar
$$Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 6,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

†27. Maximizar
$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
sujeta a
$$4x_1 - x_2 \leq 2,$$
$$-10x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

†28. Minimizar
$$Z = x_1 + x_2$$
sujeta a
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4,$$
$$x_3 \geq 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

En los Problemas **29** *y* **30**, *resuelva usando duales y el método simplex.*

29. Minimizar
$$Z = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3$$
sujeta a
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 35,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 25,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

30. Maximizar
$$Z = x_1 - 2x_2$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 3,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$
$$4x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$x_1, x_2, \geq 0.$$

31. Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere del uso de tiempo de máquina en las máquinas A y B, como se muestra en la tabla que aparece enseguida. El número de horas a la semana que están disponibles las máquinas A y B son de 40 y 34, respectivamente. ¿Cuál debe ser la producción semanal, para que se maximicen las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas?

32. Repita el Problema 31 si la compañía debe fabricar cuando menos un total de 24 unidades a la semana.

	Máquina A	**Máquina B**
Producto X	1 h	1 h
Producto Y	2 h	1 h
Producto Z	2 h	2 h

33. Una compañía petrolera tiene instalaciones de almacenamiento para combustible en las ciudades A, B, C y D cada una de las ciudades C y D necesita exactamente 500,000 galones de combustible. La compañía determina que tanto A como B pueden sacrificar cuando mucho 600,000 galones para satisfacer las necesidades de C y D. En la tabla que aparece enseguida se presenta el costopor galón, implicado en el transporte de combustible con el objeto de minimizar el costo total de transporte? ¿Cuál es el costo mínimo de transporte?

	Desde	
Hacia	**C**	**D**
A	\$0.01	\$0.02
B	\$0.02	\$0.04

* Se refiere a la Sección 9.5.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Terapias con fármacos y radiación*

Con frecuencia existen formas alternativas de tratamiento para pacientes a los que se les diagnostica un complejo específico de padecimientos. Es posible que, para cada tratamiento, existan no sólo efectos positivos, sino también negativos, tales como toxicidad o molestias. Un médico debe hacer la mejor selección entre esos tratamientos, o combinación de tratamientos. Tal selección depende no sólo de los efectos curativos sino también de los efectos negativos y o malestares.

Supóngase que usted es médico, que tiene bajo su cuidado a un enfermo de cáncer y que existen disponibles dos posibles tratamientos: administración de fármacos y terapia con irradiación. Supóngase que se expresa la eficacia de los tratamientos en unidades comunes, unidades curativas, por ejemplo. El medicamento contiene 1000 unidades curativas por onza, y la radiación ofrece 1000 unidades curativas por minuto. Los análisis señalan que el paciente debe recibir cuando menos 3000 unidades curativas.

Sin embargo, cada tratamiento tiene asociado un cierto grado de toxicidad. Supóngase que se miden los efectos tóxicos de cada tratamiento en una unidad común de toxicidaad, unidad tóxica, por ejemplo. El medicamento contiene 400 unidades tóxicas por onza y la radiación induce 1000 unidades tóxicas por minuto. Con base en sus estudios, considera que el paciente no debe recibir más de 2000 unidades tóxicas.

Además, cada tratamiento implica cierto grado de incomodidad para el paciente. La medicina es tres veces más molesta por onza que lo que la radiación es por minuto.

En la Tabla 9.5 se resumen los datos. El problema que se plantea es determinar las dosis medicamentosas y de radiación que satisfacen los requisitos curativos y de toxicidad, y que —al mismo tiempo— minimizan las molestias para el paciente.

Sea x_1 el número de onzas del fármaco y sea x_2 el número de minutos de radiación que se van a administrar. Entonces, se desea minimizar el grado de molestias, D, que está dado por

$$D = 3x_1 + x_2,$$

* Adaptado de R.S. Ledley y I.B. Lusted, "Medical Diagnosis and Modern Decision Making," *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. XIV: Mathematical Problems in the Biological Sciences* (American Mathematical Society, 1962).

TABLA 9.5

	UNIDADES CURATIVAS	UNIDADES TÓXICAS	MOLESTIAS RELATIVAS
Medicamento (por onza)	1000	400	3
Radiación (por minuto)	1000	1	11
Requerimientos	$\geq$ 3000	$\leq$2000	

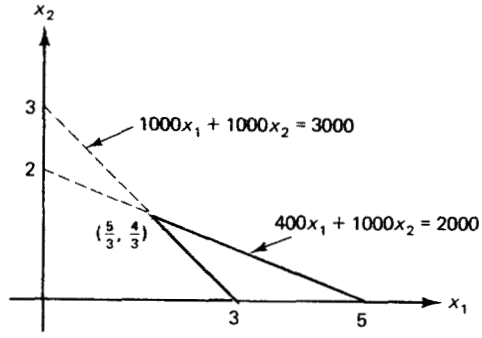


FIGURA 9.24

sujeto a la condición curativa

$$1000x_1 + 1000x_2 \geq 3000$$

y a la condición tóxica

$$400x_1 + 1000x_2 \leq 2000,$$

en donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Se debe estar en posibilidades de reconocer aquí un problema de programación lineal. Al graficar, se obtiene la región factible que se indica en la Fig. 9.24. Los puntos de las esquinas son (3, 0), (5, 0) y (5/3, 4/3). Evaluando D en donde cada esquina se obtiene

$$\begin{aligned} \text{en } (3, 0), &\quad D = 3(3) + 0 = 9 \\ \text{en } (5, 0), &\quad D = 3(5) + 0 = 15 \\ \text{y en } (5/3, 4/3), &\quad D = 3(5/3) + 4/3 = 19/3 \approx 6.3. \end{aligned}$$

Como D es mínimo en (5/3, 4/3), se debe prescribir un tratamiento de 5/3 de onza de fármaco y 4/3 minutos de irradiación. Así, resolviendo un problema de programación lineal se determina el "mejor" tratamiento para el paciente.

EJERCICIOS

1. Supóngase que existen disponibles dos tratamientos para un paciente: con medicamentos y con radiación. Cada onza de medicamento contiene 500 unidades curativas y 400 unidades tóxicas. Cada minuto de radiación produce 1000 unidades curativas y 600 unidades tóxicas. El paciente requiere de cuando menos 2000 unidades curativas y no puede tolerar más de 1400 unidades tóxicas. Si las molestias que ocasionan los medicamentos son iguales a las de la radiación, determine las dosis de fármaco y de radiación, de manera que se minimicen las molestias para el paciente.

2. Supóngase que el medicamento A, el medicamento B y la terapia radiacional son los tratamientos disponibles para un paciente. Cada onza de A contiene 600 unidades curativas y 500 unidades tóxicas. Cada onza de B contiene 500 unidades curativas y 100 unidades tóxicas. Cada minuto de irradiación proporciona 1000 unidades curativas y 100 unidades toxicas. El paciente requiere de cuando menos 3000 unidades curativas y no puede tolerar más de 2000 unidades tóxicas. Si cada onza del medicamento A y cada minuto de radiación son igualmente molestos, y cada onza del medicamento B es doblemente molesta que una del A, determine las dosis de fármaco y de radiación, de modo que se reduzcan al mínimo las molestias para el paciente.

CAPÍTULO 10

Límites y continuidad

10.1 Límites

Es posible que en alguna ocasión, en un estacionamiento, haya tenido que acercarse al máximo al automóvil de enfrente, pero sin desear golpearlo, o ni siquiera tocarlo. Esta noción de "acercarse cada vez más a algo, pero sin tocarlo", es muy importante en matemáticas y tiene que ver con el concepto de *límite*, que es fundamental para el Cálculo. Básicamente, se considera que una variable "se acerca al máximo" a un valor específico, y se examina el efecto que esto tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considérese la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Aunque no está definida en $x = 1$, puede interesar la determinación de qué sucede con lo valores de la función conforme x se acerca mucho a 1. En la Tabla 10.1 se presentan algunos valores de x que son ligeramente inferiores a 1, y otros que son ligeramente superiores a la unidad, con los correspondientes valores de la función. Obsérvese que los valores están cercanos a un número, el 3. De hecho, conforme x toma valores más cercanos a 1, sin importar si x se aproxima a 1 *desde la izquierda* ($x < 1$), o *desde la derecha* ($x > 1$), los correspondientes valores de $f(x)$ se vuelven cada vez más cercanos a 3. Esto es también evidente en la gráfica de f que aparece en la Figura 10.1. Obsérvese

TABLA 10.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

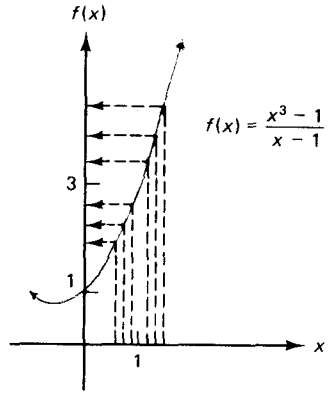


FIGURA 10.1

que, aunque la función no está definida en $x = 1$ (como se señala mediante el pequeño círculo), los valores de la función se aproximan cada vez más a 3 conforme x "se acerca cada vez más" a 1 (o tiende hacia 1). Para expresar esto se dice que el **límite** de $f(x)$ conforme x se acerca a 1, es 3, y se escribe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca de 3 como se desee, haciendo que x se aproxime lo suficiente a 1, pero sin llegar a ser igual.

También puede considerarse el límite de una función conforme x tiende a algún número del dominio. Por ejemplo, se examina el límite de $f(x) = x + 3$ conforme x se aproxima (o tiende) a 2 ($x \to 2$):

$$\lim_{x \to 2} (x + 3).$$

Evidentemente, si x está cerca de 2 (pero no es igual a 2), entonces $x + 3$ está cerca de 5. Esto resulta también obvio en la tabla y en la gráfica que aparecen en la Figura 10.2. Por ello,

$$\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5.$$

$x < 2$

x	$f(x)$
1.5	4.5
1.9	4.9
1.95	4.95
1.99	4.99
1.999	4.999

$x > 2$

x	$f(x)$
2.5	5.5
2.1	5.1
2.05	5.05
2.01	5.01
2.001	5.001

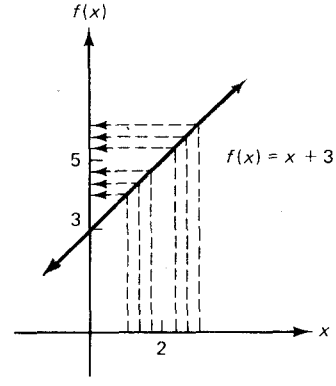


FIGURA 10.2

En general, para cualquier función f, se tiene la siguiente definición de límite.

DEFINICIÓN:

El **límite de** $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es el número* L, *y ello se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si $f(x)$ *está arbitrariamente cerca de* L *para toda* x *suficientemente cercana a* a, *pero no igual a* a a.

Es importante recordar que cuando se determina un límite, lo importante no es lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es igual a a, sino sólo lo que ocurre cuando x está *cerca de* a. Se destaca en que el límite es independiente del sentido en que x se aproxima a a. Es decir, el límite debe ser el mismo independientemente de si x tiende a a desde la izquierda o desde la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

Para determinar límites no siempre es deseable calcular valores de la función o trazar una gráfica. De manera alternativa, existen diversas propiedades de los límites que es posible utilizar. Enseguida se enuncian algunas propiedades de los límites que pueden parecerle muy razonables.

1. Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c.$$

2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n.

EJEMPLO 1

a. $\lim_{x \to 2} 7 = 7$; $\lim_{x \to -5} 7 = 7$.

b. $\lim_{x \to 6} x^2 = 6^2 = 36$.

c. $\lim_{t \to -2} t^4 = (-2)^4 = 16$.

Algunas otras propiedades de los límites se presentan a continuación.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, en donde L_1 y L_2 son números reales, entonces

3. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

Es decir, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

Es decir, el límite de un producto es el producto de los límites

5. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) = cL_1$, en donde c es una constante

Es decir, el límite de una constante que multiplica a una función, es la constante multiplicada por el límite de la función.

EJEMPLO 2

a. $\lim_{x\to 2}(x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x$ (Propiedad 3)

$= 2^2 + 2 = 6$ (Propiedad 2).

b. Es posible ampliar la Propiedad 3 al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,

$$\lim_{q\to -1}(q^3 - q + 1) = \lim_{q\to -1} q^3 - \lim_{q\to -1} q + \lim_{q\to -1} 1$$

$$= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1.$$

c. $\lim_{x\to 2}[(x+1)(x-3)] = \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot\lim_{x\to 2}(x-3)$ [Propiedad 4]

$$= [\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1]\cdot[\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3]$$

$$= [2+1]\cdot[2-3] = 3[-1] = -3.$$

d. $\lim_{x\to -2} 3x^3 = 3\cdot\lim_{x\to -2} x^3$ (Propiedad 5)

$= 3(-2)^3 = -24.$

EJEMPLO 3

Sea $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ una función polinomial f. En este caso,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$

$$= c_n\cdot\lim_{x\to a} x^n + c_{n-1}\cdot\lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1\cdot\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0$$

$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

Por lo tanto, **si f es una función polinomial, entonces**

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Es decir, el límite de una función polinomial, cuando x tiende a a, es simplemente el valor de la función en a.

El resultado del Ejemplo 3 permite encontrar muchos límites conforme $x \to a$ simplemente sustituyendo a por x. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to -3} (x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2,$$

$$\lim_{h \to 3} [2(h - 1)] = 2(3 - 1) = 4.$$

Las dos propiedades finales de los límites se refieren a cocientes y radicales.

Si $\lim f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, en donde L_1 y L_2 son números reales, entonces

6. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$.

Es decir, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre y cuando el denominador no tenga límite 0.

7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$.*

EJEMPLO 4

a. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \dfrac{\lim_{x \to 1} (2x^2 + x - 3)}{\lim_{x \to 1} (x^3 + 4)} = \dfrac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \dfrac{0}{5} = 0.$

b. $\lim_{t \to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t \to 4} (t^2 + 1)} = \sqrt{17}.$

c. $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 3} (x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}.$

EJEMPLO 5

Hallar $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Cuando $x \to -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Debido a que el límite del denominador es 0, no se puede utilizar la Propiedad 6. Sin embargo, puesto que lo que sucede al cociente cuando x es igual a -1 no es de interés, se puede suponer $x \neq -1$ y escribir

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1.$$

* Si n es par se requiere que $\lim_{x \to a} f(x)$ sea positivo.

Esta manipulación algebraica de la función original $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ produce una nueva función $x - 1$, que es la misma que la función original para $x \neq -1$. Por consiguiente

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2.$$

Nótese que, aunque no está definida la función original en -1, *sí* tiene un límite cuando $x \to -1$.

En el Ejemplo 5 el método para hallar el límite mediante sustitución directa no funciona. Reemplazando x por -1 se obtiene $0/0$, lo cual no tiene significado. Cuando surge la forma $0/0$, que no tiene sentido, la manipulación algebraica (tal como se hizo en el Ejemplo 5) puede dar como resultado una forma para la cual *se pueda* determinar el límite. De hecho muchos límites importantes no pueden evaluarse mediante sustitución.

Al principio de la sección se evaluó

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

examinando una tabla de valores de la función de $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ y analizando también la gráfica de f. Ahora se procede a determinar este límite utilizando la técnica que se describió en el Ejemplo 5.

EJEMPLO 6

Determinar $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Como $x \to 1$, tanto el número como el denominador tienden a 0. Por ello se intentará expresar el cociente en forma distinta para $x \neq 1$. Factorizando se tiene

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

(De manera alternativa, la división larga hubiera dado el mismo resultado). Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

tal como se vio antes.

EJEMPLO 7

Si $f(x) = x^2 + 1$, *encontrar* $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h}.$$

Aquí se trata a x como una constante, porque la que está cambiando es h y no x. Cuando $h = 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Consecuentemente, se tratará de expresar el cociente en una forma distinta para $h \neq 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2+2xh+h^2+1]-x^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.$$

EJERCICIOS 10.1

En los Problemas **1–26,** *halle los límites.*

1. $\lim_{x\to 2} 16.$ **2.** $\lim_{x\to 3} 2x.$ **3.** $\lim_{t\to -5} (t^2-5).$ **4.** $\lim_{t\to 1/2} (3t-5).$

5. $\lim_{x\to -1} (x^3-3x^2-2x+1).$ **6.** $\lim_{r\to 9} \frac{4r-3}{11}.$ **7.** $\lim_{t\to -3} \frac{t-2}{t+5}.$

8. $\lim_{x\to -6} \frac{x^2+6}{x-6}.$ **9.** $\lim_{h\to 0} \frac{h}{h^2-7h+1}.$ **10.** $\lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h-4}{h^3-1}.$ **11.** $\lim_{p\to 4} \sqrt{p^2+p+5}.$

12. $\lim_{y\to 9} \sqrt{y+3}.$ **13.** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x+2}.$ **14.** $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x+1}.$ **15.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}.$

16. $\lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t}{t^2-2t}.$ **17.** $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}.$ **18.** $\lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t-1}.$ **19.** $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}.$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}.$ **21.** $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}.$ **22.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2}.$ **23.** $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}.$

24. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}.$ **25.** $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h}.$ **26.** $\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^2-4}{x}.$

27. Obtenga $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ considerando a x como constante.

28. Determine $\lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2+5(x+h)-2x^2-5x}{h}$ considerando a x como una constante.

En los Problemas **29–32,** *halle* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$

29. $f(x) = 4 - x.$ **30.** $f(x) = 2x + 3.$ **31.** $f(x) = x^2 - 3.$ **32.** $f(x) = x^2 + x + 1.$

33. Shonle* señala que la máxima eficiencia teórica, E, para una planta eléctrica está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h},$$

en donde T_c y T_h son las temperaturas absolutas respectivas de las reservas más caliente y más fría. Encontrar (a) $\lim_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

* J.I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

10.2 Límites (continuación)

En la Figura 10.3 se muestra la gráfica de una función f. Obsérvese que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x tiende a 0 *desde el lado derecho*, $f(x)$ tiende a 1. Se escribe esto como

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Por otro lado, cuando x tiende a 0 *desde la izquierda*, $f(x)$ tiende a -1, y se escribe

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

A estos límites se les denomina **límites unilaterales**. De la última sección se sabe que el límite de una función cuando $x \to a$ es independiente de la forma en que x tiende a a. Por ello, el límite existe si, y sólo si, ambos límites unilaterales existen y son iguales. Así, se concluye que

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

Como otro ejemplo de un límite unilateral, considérese $f(x) = \sqrt{x - 3}$ cuando x tiende a 3 (véase la Figura 10.4). Como f está definida sólo cuando $x \geq 3$, se puede hablar del límite cuando x tiende a 3 desde la derecha. Si x es ligeramente mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y, en consecuencia, $\sqrt{x - 3}$ está próximo a 0. Por lo tanto

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} = 0.$$

Este límite también resulta evidente en la Figura 10.4.

Considérese ahora $y = f(x) = 1/x^2$ en las cercanías de $x = 0$. Si x está cercana a 0, entonces x^2 es positiva y está también próxima a 0 y, por consiguiente su recíproco, $1/x^2$ es muy grande. En la Figura 10.5 se muestra una tabla de valores de $f(x)$ cuando x está cercana a 0, junto con la gráfica de la función. Obsérvese que cuando $x \to 0$, $f(x)$ aumenta sin límite tanto por la izquierda como por la derecha. Consecuentemente,

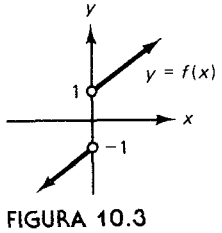


FIGURA 10.3

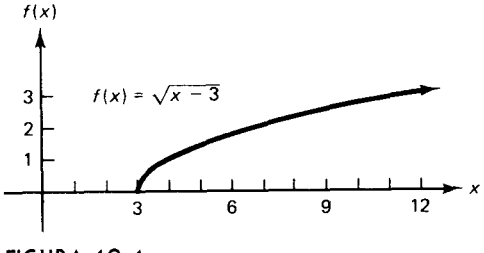
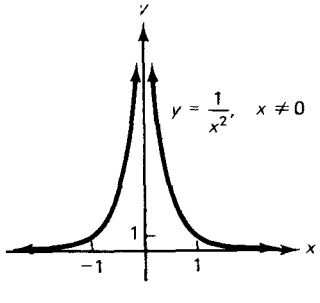


FIGURA 10.4

x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10,000
±0.001	1,000,000

FIGURA 10.5



no existe límite en 0. Se dice que cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve positivamente infinita y, en símbolos, se escribe

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

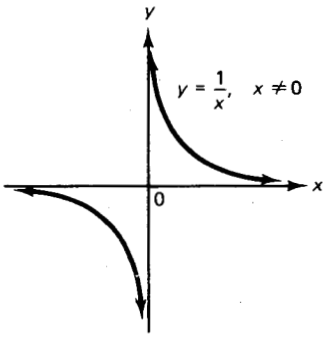
ADVERTENCIA
El uso del signo de "igualdad" en esta situación no significa que exista el límite. Por el contrario, aquí el símbolo (∞) es una forma de decir en términos específicos que no existe límite e indica **por qué** no existe.

Considérese ahora la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ (véase la Figura 10.6). Cuando x tiende a 0 por la derecha, $1/x$ se vuelve positivamente infinito; cuando x tiende a 0 por la izquierda, $1/x$ se vuelve negativamente infinito. En símbolos, se escribe

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Cualquiera de estas conclusiones implica que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$



x	f(x)
0.01	100
0.001	1,000
0.0001	10,000
−0.01	−100
−0.001	−1,000
−0.0001	−10,000

FIGURA 10.6

Ahora se examina esta función cuando x se vuelve infinita, primero en el sentido positivo y después en el sentido negativo. En la Tabla 10.2 se puede observar que al aumentar x sin límite en los valores positivos, los valores de $f(x)$ tienden a 0. De la misma manera, al disminuir x sin límite en los valores regativos, los valores $f(x)$ también tienden a 0. Estas observaciones son también evidentes en la gráfica de la Figura 10.6. Ahí, conforme se avanza hacia la derecha de la curva, sobre los valores positivos de x, los correspondientese valores de y tienden a 0. De manera similar, conforme se avanza hacia la izquierda

TABLA 10.2

x	f(x)	x	f(x)
1,000	0.001	−1,000	−0.001
10,000	0.0001	−10,000	−0.0001
100,000	0.00001	−100,000	−0.00001
1,000,000	0.000001	−1,000,000	−0.000001

de la curva, sobre los valores negativos de x, los correspondientes valores de y tienden a 0. En símbolos se escribe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

EJEMPLO 1

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to-1^+} \dfrac{2}{x+1}$.

Cuando x tiende a -1 por la derecha, (considérense valores de x tales como -0.9, -0.99, etc.), $x + 1$ tiende a 0, pero es siempre positivo. Como se está dividiendo el 2 entre números positivos que tienden a 0, los resultados $2/(x + 1)$, son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes. Por ello

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{2}{x+1} = \infty,$$

y el límite no existe.

b. $\lim_{x\to2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$.

Cuando $x \to 2$ el numerador tiende a 4 y el denominador a 0. Así, se están dividiendo números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven de magnitud arbitrariamente grande. En este punto se puede escribir

$$\lim_{x\to2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ y el límite no existe.}$$

Sin embargo, enseguida se revisa la forma en que se puede utilizar el símbolo ∞ o el símbolo $-\infty$ para ser más específicos con respecto a "no existe". Obsérvese que

$$\lim_{x\to2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{1}{x-2}.$$

Dado que

$$\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

entonces $\lim_{x\to2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ no es ni ∞ ni $-\infty$.

c. $\lim_{t\to2} \dfrac{t-2}{t^2-4}$.

Cuando $t \to 2$ *tanto* el numerador como el denominador tienden a 0 (forma 0/0). En consecuencia primero se simplifica la fracción, como se hizo en la Sección 10.1.

$$\lim_{t\to2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t\to2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t\to2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}.$$

Obsérvese que este problema asumió la forma 0/0, mientras que en la parte (b) la forma fue 4/0, que se trató de modo diferente.

EJEMPLO 2

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{4}{(x-5)^3}$.

Cuando x se hace muy grande, se hace también muy grande $x - 5$. Puesto que el cubo de un número grande es también grande, $(x-5)^3 \to \infty$. Dividir 4 entre números muy grandes da como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0.$$

b. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4-x}$.

Conforme x se vuelve negativamente infinita, $4 - x$ se vuelve positivamente infinita. Como las raíces cuadradas de números grandes son números grndes, se concluye que

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4-x} = \infty.$$

En el análisis que sigue se requerirá de cierto límite, en específico, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p$, en donde $p > 0$. Cuando x se hace muy grande, se hace también grande x^p. Dividir 1 entre números muy grandes da como resultado números cercanos a 0. Por consiguiente, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0,$$

en donde $p > 0$,* Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0.$$

Se determinará ahora el límite de la función racional.

$$f(x) = \frac{4x^3 + x}{2x^3 + 3}$$

cuando $x - \infty$. (Recuérdese de la Secc. 4.2 que una función racional es un cociente de polinomios.) Conforme x se vuelve cada vez mayor, *tanto* el numerador *como* el denominador de $f(x)$ se vuelven infinitos. Sin embargo, se puede cambiar la forma del cociente de manera que se pueda extraer una conclusión con respecto a si tiene o no un límite. Para hacer esto, se divide tanto el numerador como el denominador entre la mayor

* Para $\lim_{x\to-\infty} 1/x^p$, se supone que p es tal que $1/x^p$ está definida $x < 0$.

potencia de x que se presente en el denominador, en este caso es x^3. Haciendo esto resulta.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x}{2x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^3 + x}{x^3}}{\dfrac{2x^3 + 3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^3}{x^3} + \dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3} + \dfrac{3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{3}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + 3 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3}}.$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x}{2x^3 + 3} = \frac{4 + 0}{2 + 3(0)} = \frac{4}{2} = 2.$$

De igual forma, el límite cuando $x \to -\infty$ es 2.

Para la función anterior existe una forma más fácil de encontrar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x el término que implica la mayor potencia de x en el numerador, es decir $4x^3$, domina la suma $4x^3 + x$, y el término dominante en el denominador $2x^3 + 3$, es $2x^3$. Para determinar el límite de $f(x)$, es suficiente determinar el límite de $(4x^3)/(2x^3)$. Es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x}{2x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

como se vio antes. En general, se tiene lo siguiente:

> Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos del numerador y del denominador, respectivamente, con las mayores potencias de x, entonces
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$
>
> y
>
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = \infty.$$

(Obsérvese que en la penúltima etapa, al volverse x muy negativa, también lo hace x^3; además, la multiplicación de $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo es muy positivo.) De modo análogo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = -\infty.$$

A partir de esto se concluye que *cuando el grado del numerador de una función racional es mayor que el grado del denominador, la función no tiene límite cuando* $x \to 0$ *o cuando* $x \to -\infty$.

EJEMPLO 3

Hallar el límite (si existe)

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{8x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

b. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{(3x - 1)^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(3x - 1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{9x^2 - 6x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{9x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{9x} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}(0) = 0.$$

c. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2}$.

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe límite. En términos más precisos,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

ADVERTENCIA Para obtener $\lim_{x\to0} \dfrac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$, no se determina el límite de $x^2/(8x^2)$ porque x no tiende a ∞ o bien $-\infty$. Se tiene que

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \frac{0 - 1}{7 - 0 + 0} = -\frac{1}{7}.$$

Considérese ahora el límite de la función polinomial $f(x) = 8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x).$$

Como una polinomial es una función racional con denominador 1, se tiene

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2 - 2x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{1} = \lim_{x\to\infty} 8x^2.$$

Es decir, el límite de $8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$ es el mismo que el límite del término que contiene la mayor potencia de x, es decir, $8x^2$. Conforme x se vuelve muy grande, también $8x^2$ se vuelve muy grande. Por ello

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty} 8x^2 = \infty.$$

En general, se tiene lo siguiente.

> Cuando $x \to \infty$ (o bien $x \to -\infty$), el límite de una función polinomial es el mismo límite de su término con la mayor potencia de x.

EJEMPLO 4

a. $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3$. Conforme x se vuelve muy negativa, también x^3 se vuelve muy negativa. Por ello,

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

b. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 multiplicado por un número muy negativo da un número muy positivo.

La técnica que consiste en concentrarse en los términos dominantes para evaluar límites como $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no es necesariamente válida para otros tipos de funciones. Considérese, por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + x} - x). \tag{1}$$

Obsérvese que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que, como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite de (1) es el mismo que el límite de $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2} - x)$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x\to\infty}(x - x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0.$$

Se puede demostrar (véase el Problema 58) que el límite de (1) no es 0 sino $\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 5

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$, *encontrar el límite (si existe).*

a. $\lim_{x\to1^+} f(x)$.

Aquí, x tiende a 1 desde la derecha. Para $x > 1$, $f(x) = x^2 + 1$. Por ello,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1).$$

Si x es mayor que 1, pero muy cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ está cerca de 2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2.$$

b. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Aquí x se aproxima a 1 por la izquierda. para $x < 1$, $f(x) = 3$. Por ello,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3 = 3.$$

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$.

De las partes (b) y (c) $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Por ello,

$$\lim_{x \to 1} f(x) \quad \text{no existe.}$$

d. $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Para valores muy grandes de x, $f(x) = x^2 + 1$. Por ello,

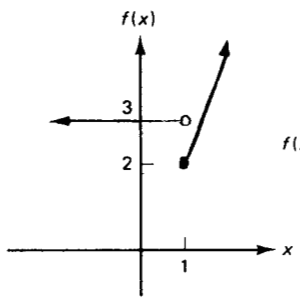
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty.$$

e. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Para valores muy pequeños (es decir, muy negativos) de x, $f(x) = 3$. Por ello,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3.$$

Todos los límites de las partes (a) hasta (e) deben resultar evidentes en la gráfica de f que aparece en la Figura 10.7.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ si } x \geq 1 \\ 3, \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

FIGURA 10.7

Se concluye esta sección con una nota respecto a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

En la Figura 10.8 se muestra la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Cuando $x \to 0$ resulta evidente que existe el límite de $(1 + x)^{1/x}$. Es aproximadamente 2.71828 y se le denota por la letra e. Tal número, si se recuerda, es la base del sistema de los logaritmos naturales. Se puede considerar que el límite

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

es la definición de e.

x	$(1 + x)^{1/x}$	x	$(1 + x)^{1/x}$
0.5	2.2500	−0.5	4.0000
0.1	2.5937	−0.1	2.8680
0.01	2.7048	−0.01	2.7320
0.001	2.7169	−0.001	2.7196

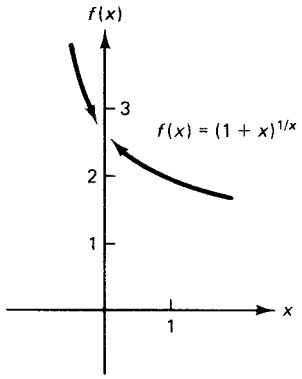


FIGURA 10.8

EJERCICIOS 10.2

1. Para la función f dada en la Figura 10.9(a), encontrar los siguientes límites. Si no existe el límite, hágase este señalamiento o utilícense los símbolos ∞ o $-\infty$ cuando sea apropiado.

a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, **b.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$, **d.** $\lim_{x\to\infty} f(x)$,

e. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, **f.** $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, **g.** $\lim_{x\to -2} f(x)$, **h.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$,

i. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, **j.** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, **k.** $\lim_{x\to -1} f(x)$.

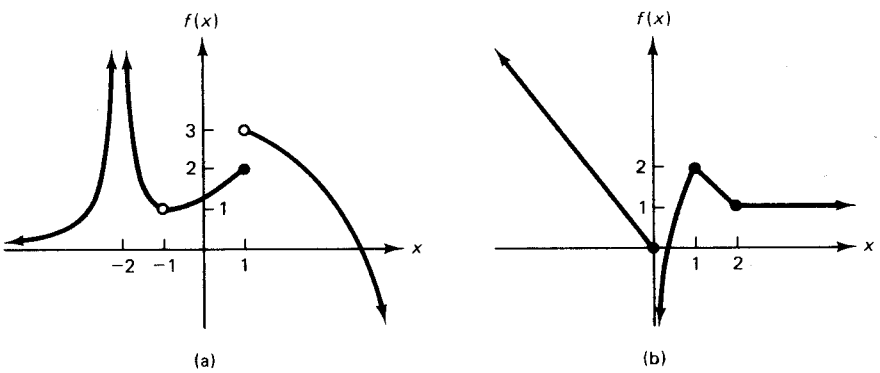


FIGURA 10.9

2. Para la función f dada en la Figura 10.9(b), halle los siguientes límites. Si no existe el límite, mencionarlo o utilizar el símbolo ∞ p $-\infty$ cuando sea apropiado.

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, **b.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, **c.** $\lim_{x\to 0} f(x)$, **d.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$,
e. $\lim_{x\to 1} f(x)$, **f.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, **g.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, **h.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

En cada uno de los Problemas **3-50**, *obtenga el límite. Si no existe, mencionarlo o utilizar los símbolos* ∞ *o bien* $-\infty$, *cuando sea apropiado.*

3. $\lim_{x\to 3^+} (x - 2)$.

4. $\lim_{x\to -1^-} (1 - x^2)$.

5. $\lim_{x\to -\infty} 5x$.

6. $\lim_{x\to \infty} 3$.

7. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{6x}{x^4}$.

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5}{x - 1}$.

9. $\lim_{x\to -\infty} x^2$.

10. $\lim_{t\to \infty} (t - 1)^3$.

11. $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h}$.

12. $\lim_{h\to 5^-} \sqrt{5 - h}$.

13. $\lim_{x\to 5} \dfrac{3}{x - 5}$.

14. $\lim_{x\to 0^-} 2^{1/2}$.

15. $\lim_{x\to 1^+} (4\sqrt{x - 1})$.

16. $\lim_{x\to 2^+} (x\sqrt{x^2 - 4})$.

17. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x + 10}$.

18. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2 - 3x}$.

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

20. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$.

21. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x + 2}{x + 3}$.

22. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x - 4}{3 - 2x}$.

23. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 3}$.

24. $\lim_{r\to \infty} \dfrac{r^3}{r^2 + 1}$.

25. $\lim_{t\to \infty} \dfrac{5t^2 + 2t + 1}{4t + 7}$.

26. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{3x^6 - x + 4}$.

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{7}{2x + 1}$.

28. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(4x - 1)^3}$.

29. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3 - 4x - 2x^3}{5x^3 - 8x + 1}$.

30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{7 - 2x - x^4}{9 - 3x^4 + 2x^2}$.

31. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$.

32. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{2x}{4 - x^2}$.

33. $\lim_{w\to \infty} \dfrac{2w^2 - 3w + 4}{5w^2 + 7w - 1}$.

34. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4 - 3x^3}{x^3 - 1}$.

35. $\lim_{x\to -5} \dfrac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 5x}$.

36. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 + 2t - 8}{2t^2 - 5t + 2}$.

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

38. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^3 - x^2}{2x + 1}$.

39. $\lim_{x\to 1^+} \left[1 + \dfrac{1}{x - 1}\right]$.

40. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 - 4}$.

41. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x + x^2}$.

42. $\lim_{x\to \infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

43. $\lim_{x\to 1} x(x - 1)^{-1}$.

44. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{2x - 1}$.

45. $\lim_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{3}{x}\right)$.

46. $\lim_{x\to 0} \left(-\dfrac{3}{x}\right)$.

47. $\lim_{x\to 0} |x|$.

48. $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

49. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + 1}{x}$.

50. $\lim_{x\to \infty} \left[\dfrac{2}{x} - \dfrac{x^2}{x^2 - 1}\right]$

En los Problemas **51-54**, trazar las gráficas de las funciones y encontrar los límites que se indican. Si no existe el límite, mencionarlo o utilizar los símbolos ∞ o $-\infty$, *cuando sea apropiado.*

51. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$; **a.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, **b.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$, **d.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$, **e.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

52. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$; **a.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, **b.** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$, **d.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$, **e.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

53. $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **a.** $\lim_{x \to 0^+} g(x)$, **b.** $\lim_{x \to 0^-} g(x)$, **c.** $\lim_{x \to 0} g(x)$, **d.** $\lim_{x \to \infty} g(x)$, **e.** $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

54. $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **a.** $\lim_{x \to 0^+} g(x)$, **b.** $\lim_{x \to 0^-} g(x)$, **c.** $\lim_{x \to 0} g(x)$, **d.** $\lim_{x \to \infty} g(x)$, **e.** $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

55. Si c es el costo total en dólares en el que se incurre para fabricar q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad $\bar{c}$ para una producción de q unidades está dado por $\bar{c} = c/q$. Por ello, si la ecuación de costos totales es $c = 5000 + 6q$, entonces $\bar{c} = (5000/q) + 6$. Por ejemplo, el costo total de una producción de 5 unidades es \$5030 y el costo promedio por unidad a este nivel de producción es \$1006. Hallando $\lim_{q \to \infty} \bar{c}$, muestre que el costo promedio tiende a un nivel de estabilidad si el fabricante aumenta en forma continua la producción. ¿Cuál es el valor limitante del costo promedio? Trace la gráfica de la función de costos promedio.

56. Repita el Problema 51 considerando que el costo fijo es de \$12000 y que los costos variables están dados por la función $c_v = 7q$.

57. Se pronostica que la población N de cierta ciudad pequeña dentro de t años, será

$$N = 20{,}000 + \frac{10{,}000}{(t + 2)^2}.$$

Determine la población a largo plazo; es decir, obtenga $\lim_{t \to \infty} N$.

58. Mostrar que $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$. *Sugerencia:* Racionalizar el numerador multiplicando $\sqrt{x^2 + x} - x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Después expresar el denominador en forma tal que x sea un factor.

59. Se determinó para una relación específica entre anfitrión y parásito que cuando la densidad de los anfitriones (número de anfitriones por unidad de área) es x, entonces el número de anfitriones con parásitos en un cierto periodo es y, en donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

Si aumentara sin límite la densidad de los anfitriones, ¿a qué valor tendería y?

En los Problemas **60** *y* **61**, *evalúe la función* dada cuando $x = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. *A partir de los resultados, plantéese una conclusión con respecto a* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

60. $f(x) = x \ln x$.

61. $f(x) = x^{2x}$.

10.3 Interés compuesto en forma continua

Si se invierte un capital P y el interés se capitaliza k veces al año a una tasa anual r, entonces la tasa de conversión por periodo es r/k. En t años existen kt periodos. De lo visto en el Capítulo 7, el monto acumulado, S al final de t años es

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si $k \to \infty$ el número de periodos de conversión aumenta en forma indefinida y la longitud de cada periodo tiende a 0. En este caso, se dice que el interés **se capitaliza continuamente**, es decir, en cada instante. El monto total es

$$\lim_{k \to \infty} P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

lo cual puede escribirse como

$$P\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k/r}\right]^{rt}.$$

Haciendo $x = r/k$, entonces cuando $k \to \infty$, se tiene que $x \to 0$. Así, el límite puesto entre los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$, la cual, como se vio en la Sección 10.2 es e. Por lo tanto,

$$S = Pe^{rt}$$

es el monto total de un capital de P dólares después de t años, a una tasa anual de interés r compuesta continuamente.

EJEMPLO 1

Si se invierten \$100 *a una tasa anual del* 5% *compuesto continuamente, calcular el monto acumulado al final de (a)* 1 *año y (b)* 5 *años.*

a. Aquí, $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 1$.

$$S = Pe^{rt} = 100e^{(0.05)(1)} \approx 100(1.0513) = \$105.13.$$

Se puede comparar este valor con el valor después de un año, para una inversión de \$100, a una tasa anual de 5% compuesto semestralmente; es decir, $100(1.025)^2 \approx \$105.06$. La diferencia no es significativa.

b. Aquí, $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 5$.

$$S = 100e^{(0.05)(5)} = 100e^{0.25} \approx 100(1.2840) = \$128.40.$$

Se puede determinar una expresión que dé la tasa efectiva que corresponde a una tasa anual de r compuesta continuamente. (Del capítulo 6, la tasa efectiva es la tasa equivalente capitalizable anualmente). Si i es la tasa efectiva correspondiente, entonces después de un año, un capital P se convierte en $P(1 + i)$. Esta cantidad debe ser igual a la cantidad que se acumula por interés continuo, Pe^r. En consecuencia, $P(1 + i) = Pe^r$ o bien $1 + i = e^r$, por lo que $i = e^r - 1$. Por consiguiente,

$$e^r - 1$$

es la tasa efectiva correspondiente a una tasa anual de r compuesta continuamente.

EJEMPLO 2

Encontrar la tasa efectiva que corresponde a la tasa anual del 5% *capitalizable continuamente.*

La tasa efectiva es

$$e^r - 1 = e^{0.05} - 1 \approx 1.0513 - 1 = 0.0513$$

o sea 5.13%.

Si se despeja P en $S = Pe^{rt}$, se obtiene $P = S/e^{rt}$. Aquí P es el capital que se debe invertir ahora a una tasa anual r capitalizable continuamente, de manera que al final de t años el monto compuesto sea S. A P se le denomina **valor actual** (o **presente**) de S. Así

$$P = Se^{-rt},$$

da el valor actual de S que vence al final de t años a una tasa anual r capitalizable continuamente.

EJEMPLO 3

Se va a constituir un fideicomiso mediante un solo depósito, de manera que se tengan \$25,000 *dólares en el fondo al final de* 20 *años. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de* 7%, *¿cuánto dinero se debe colocar inicialmente en el fondo?*

Se desea el valor actual de \$25,000 que vencen en 20 años.

$$\begin{aligned} P &= Se^{-rt} = 25{,}000e^{-(0.07)(20)} \\ &= 25{,}000e^{-1.4} \approx 25{,}000(0.24660) \\ &= 6165. \end{aligned}$$

Consecuentemente, el depósito inicial debe ser de \$6165.

EJERCICIOS 10.3

En los Problemas **1-2**, *determine la tasa efectiva de interés que corresponde a la tasa anual dada capitalizable continuamente.*

1. $5\frac{1}{2}\%$.

2. 9%.

En los Problemas **3** *y* **4**, *obtenga el valor actual de* \$2,500 *a los* 8 *años si el interés se capitaliza continuamente a la tasa anual dada.*

3. $6\frac{3}{4}\%$.

4. 8%.

En los Problemas **5-8**, *determine la tasa efectiva de interés que corresponde a la tasa anual dada capitalizable continuamente.*

5. 4%.

6. 7%.

7. 10%.

8. 9%.

9. Si se depositan \$100 en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa anual del $5\frac{1}{2}\%$ compuesto continuamente, ¿cuál es el valor de la cuenta al final de 2 años?

10. Si se invierten \$1000 a una tasa anual del 6% capitalizable continuamente, encontrar el monto total al final de 8 años.

11. El consejo de administración de una compañía acuerda redimir parte de sus acciones preferentes redimibles en 5 años. En ese momento se requerirán \$1,000,000. Si la compañía puede invertir dinero a una tasa anual de interés del 8% capitalizable continuamente, ¿cuánto se debe invertir en el momento actual para que el valor futuro sea suficiente para redimir las acciones?

12. Se va a constituir un fideicomiso mediante un solo depósito, de manera que al final de 30 años se tengan \$50,000 en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual del 9%, ¿cuánto dinero se debe colocar en el fondo al principio?

13. ¿Qué tasa anual compuesta continuamente es equivalente a una tasa efectiva del 5%?

14. ¿Qué tasa anual r compuesta continuamente equivale a una tasa nominal del 6% compuesta semestralmente? [*Sugerencia:* En primer lugar, mostrar que $r = 2 \ln (1.03)$.]

15. Una imposición anual o anualidad en la que se colocan R dólares cada año mediante entregas uniformes que son pagaderas continuamente se denomina *anualidad continua* o *flujo continuo de ingresos*. El valor actual de una anualidad continua durante t años es

$$R\frac{1 - e^{-rt}}{r},$$

en donde r es la tasa anual de interés compuesto continuamente. Obtenga el valor actual de una anualidad continua de \$100 al año, durante 20 años y al 9% compuesto continuamente. Proporcione la respuesta redondeando a unidades.

16. Supóngase que un negocio tiene utilidades anuales de \$40,000 durante los 5 años siguientes y que las utilidades se obtienen en forma continua a lo largo de cada año. En este caso, se pueden considerar las utilidades como una anualidad continua (véase el Problema 15). Si el dinero vale 5% en capitalización continua, halle el valor actual de las utilidades.

17. Si el interés es capitalizable continuamente a una tasa anual de 0.07, ¿cuántos años se requieren para que un capital P se triplique? Proporcione la respuesta al año más cercano.

18. Si el interés se capitaliza continuamente, ¿a qué tasa anual se duplicará en 10 años un capital P? Dé la respuesta al porcentaje entero más cercano.

10.4 Continuidad

Muchas funciones tienen la propiedad de que no existe ninguna interrupción o "quiebre" en sus gráficas. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq 1, \\ 2, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

cuyas gráficas aparecen en las Figuras 10.10 y 10.11, respectivamente. Cuando $x = 1$, la gráfica de la función f no tiene interrupciones, pero la gráfica de g sí las tiene. Planteado de otra forma, si se pidiera trazar ambas gráficas con un lápiz, se tendría que

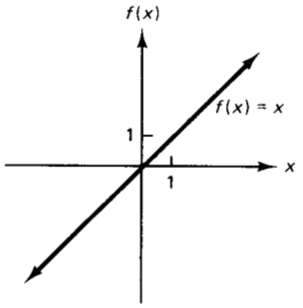


FIGURA 10.10

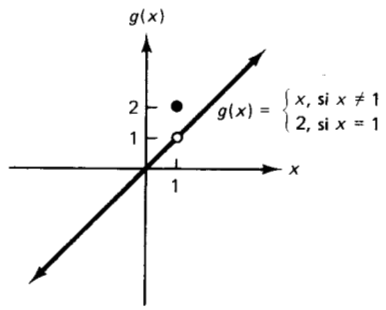


FIGURA 10.11

levantar el lápiz al trazar la gráfica g cuando $x = 1$, pero no se tendría que hacerlo con la gráfica de f.

Se pueden expresar estos casos mediante límites. Conforme x se aproxima a 1, compárese al límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1),$$

$$\text{en tanto que} \quad \lim_{x \to 1} g(x) = 1 \neq g(1) = 2.$$

El límite de f cuando $x \to 1$ es el mismo que el de $f(1)$, pero el límite de g cuando $x \to 1$ *no* es el mismo que el de $g(1)$. Por estas razones se dice que f es *continua en* $x = 1$ y que g es *discontinua* en $x = 1$.

DEFINICIÓN

Una función f es ***continua*** *en el punto $x = a$ si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. *$f(x)$ está definida en $x = a$, es decir, a se encuentra en el dominio de f.*
2. *Existe* $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en un punto, se dice que es ***discontinua*** *ahí.*

EJEMPLO 1

a. *Muéstrese que $f(x) = 5$ es continua en $x = 7$.*

Se debe verificar que se satisfacen las tres condiciones. En primer lugar, f está definida en $x = 7$; es decir, $f(7) = 5$. En segundo lugar,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} 5 = 5.$$

Así, f tiene un límite cuando $x \to 7$. En tercer lugar,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 5 = f(7).$$

Por lo tanto, $f(x) = 5$ es continua en $x = 7$

b. *Muéstrese que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en $x = -4$.*

La función g está definida en $x = -4$: $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x \to -4} g(x) = \lim_{x \to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4).$$

Por lo tanto, $g(x) = x^2 - 3$ es continua en $x = -4$.

Se dice que una función es *continua en un intervalo* si es continua en todos los puntos del mismo. En un caso como éste, la función tiene una gráfica que es conexa para todo intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo [2,5]. De hecho, en el Ejemplo 3 de la Secc. 10.1 que para *cualquier* función polinomial f, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por ello,

> Una función polinomial es continua en todos los puntos,

y, por lo tanto, en el intervalo. Se dice que las funciones polinomiales son **continuas en todas partes** o, en términos más simples, que son **continuas**.

EJEMPLO 2

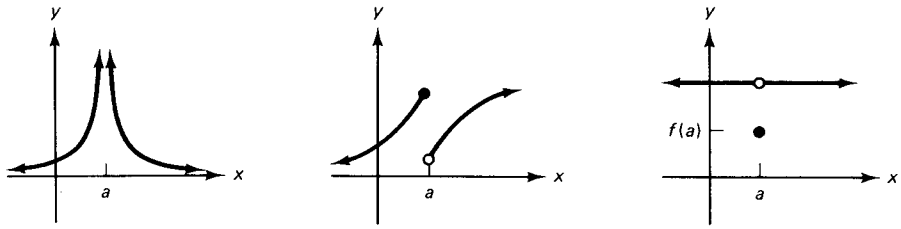
Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^3 - 9x + 9x + 3$ son funciones polinomiales. Son por tanto continuas, Por ejemplo, son continuas en $x = 3$.

Si una función no está definida en a, automáticamente es discontinua ahí. Si *está* definida en a, entonces es discontinua en a si

1. no tiene límite cuando entra $x \to a$,

o bien 2. tiene un límite que es diferente de $f(a)$ cuando $x \to a$.

En la Figura 10.12 se pueden encontrar puntos de discontinuidad mediante inspección.



No está definida en a.

Está definida en a pero no tiene límite cuando $x \to a$

Discontinuidades en a

Está definida en a y tiene límite cuando $x \to a$, pero el límite no es $f(a)$.

FIGURA 10.12

EJEMPLO 3

a. Sea $f(x) = 1/x$ (véase la Figura 10.13). Como f no está definida en $x = 0$, es discontinua ahí. Además, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene una **discontinuidad infinita** en $x = a$ en los casos en los que cuando menos uno de los límites de un lado son ∞ o bien $-\infty$ cuando $x \to a$. Por ello, f tiene una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

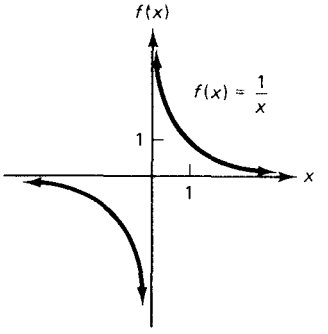


FIGURA 10.13

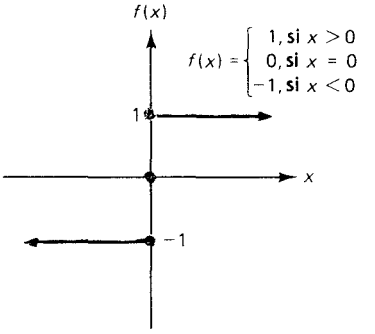


FIGURA 10.14

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$ (véase la Figura 10.14). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. Por ello, f es discontinua en $x = 0$.

---

se puede mostrar que

> una función racional es discontinua en los puntos en los que el denominador es 0 y continua en los demás puntos.

EJEMPLO 4

Encuéntrense todos los puntos de discontinuidad para cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$.

Esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2),$$

que es 0 cuando $x = -4$ o bien $x = 2$. Por ello, f es discontinua sólo en -4 y 2.

b. $h(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 4}$.

Para esta función racional, el denominador no es nunca 0 (siempre es positivo). Por ello, h no tiene discontinuidad.

EJEMPLO 5

Encuentre todos los puntos de discontinuidad para cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

El único problema posible puede ocurrir cuando $x = 3$ porque este es el único lugar en el que podría ser inconexa la gráfica de f. Se sabe que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Cuando $x \to 3^+$, entonces $f(x) \to 3 + 6 = 9$. Cuando $x \to 3^-$, entonces $f(x) \to 3^2 = 9$. Por ello, $\lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$, por lo que la función es continua en $x = 3$, al igual que en todos los demás valores de x. Se puede llegar a la misma conclusión inspeccionando la gráfica de f (Figura 10.15).

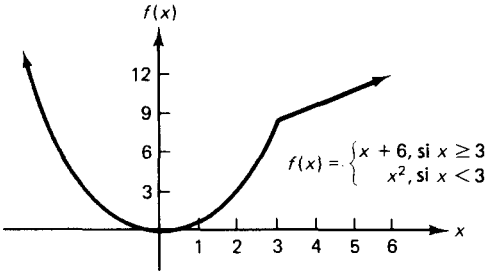


FIGURA 10.15

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x > 2, \\ x^2, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

Como f no está definida en $x = 2$, es discontinua en ese punto. Es continua para todos los demás valores de x.

EJEMPLO 6

La "función del servicio postal" (de Estados Unidos)

$$c = f(x) = \begin{cases} 25, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 45, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 65, & \text{si } 2 < x \leq 3, \\ 85, & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

da el costo c (en centavos de dólar) del envío por correo de un paquete que pesa x (onzas),

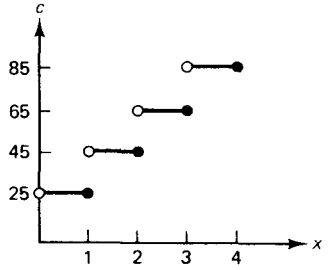


FIGURA 10.16

$0 < x \leq 4$, en enero de 1990. Resulta evidente en la gráfica de la Figura 10.16 que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3, y que es constante para los valores de x que se encuentran entre discontinuidades sucesivas. A una función como ésta se la denomina *función en escalones* debido al aspecto de su gráfica.

Existe otra manera de expresar la continuidad, aparte de la que se plantea en la definición. Si con el planteamiento

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

se reemplaza x por $a + h$, entonces, cuando $x \to a$ se tiene que $h \to 0$ (Figura 10.17). Por ello el planteamiento

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

define la continuidad en a.

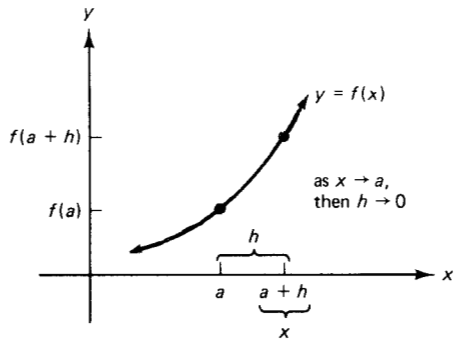


FIGURA 10.17

A menudo conviene describir una situación mediante una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la Tabla 10.13 señala el número de unidades que los consumidores demandarían de un producto específico cada semana a diversos precios. Se puede proporcionar esta información en forma gráfica, como en la Figura 10.15(a) trazando cada par de cantidad y precio como un punto. Resulta claro que esa

TABLA 10.3
Programa de demanda

Precio/Unidad, p	Cantidad por semana, q
$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95

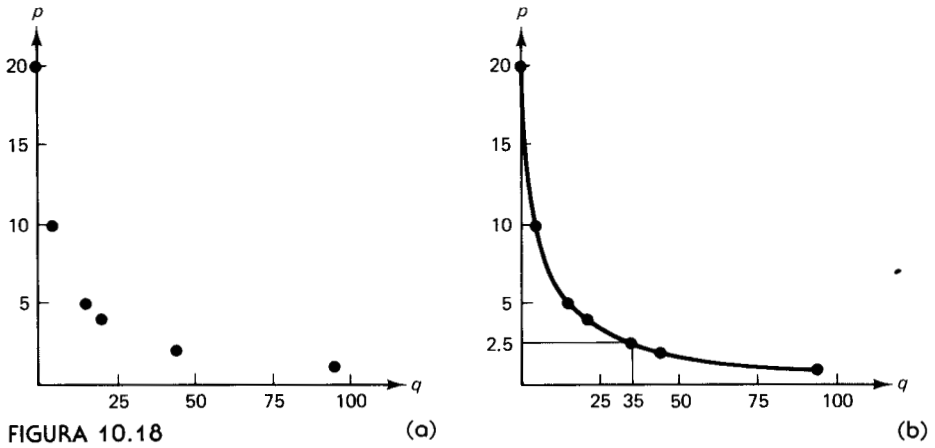


FIGURA 10.18

gráfica no representa una función continua. Además, no ofrece información con respecto al precio al que, por ejemplo, habría una demanda de 35 unidades. Sin embargo, si se unen los puntos de la Figura 10.18(a) mediante una curva alisada [véase la Figura 10.18(b)], se obtiene lo que se denomina una curva de demanda. A partir de ésta se podría estimar que a un precio de más o menos \$2.50 por unidad habría una demanda de 35 unidades.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica, tal como la de la Figura 10.18(b), por una ecuación que defina una función continua f. Esa función no sólo presenta la ecuación de demanda, $p = f(q)$, que permite anticipar precios y cantidades demandadas correspondientes, sino que también permite realizar análisis matemáticos convenientes de la naturaleza y las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto, se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$ pero, desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades podría carecer de sentido en una situación particular. Por ejemplo, si la unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos no tiene sentido.

En general, será deseable contemplar situaciones prácticas en términos de funciones continuas cuando sea posible hacerlo y cuando permitan realizar mejores análisis de su naturaleza.

EJERCICIOS 10.4

En los Problemas **1-6**, *use la definición de continuidad para demostrar que la función dada es continua en el punto indicado.*

1. $f(x) = x^3 - 5x$; $x = 2$.

2. $f(x) = \dfrac{x-3}{9x}$; $x = -3$.

3. $g(x) = \sqrt{2 - 3x}$; $x = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{8}$; $x = 2$.

5. $h(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$; $x = 4$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x = -1$.

En los Problemas **7-12** *determine si la función es continua en los puntos dados.*

7. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$; $-2, 0$.

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{6}$; $2, -2$.

9. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$; $3, -3$.

10. $h(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4}$; 2, −2. **11.** $F(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \geq 2 \\ x^2, & \text{si } x < 2 \end{cases}$; 2, 0. **12.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$; 0, −1.

En los Problemas **13–16,** *señale una razón por la cual la función es continua en todas partes.*

13. $f(x) = 2x^2 - 3$. **14.** $f(x) = \dfrac{x + 2}{5}$. **15.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$. **16.** $f(x) = x(1 - x)$.

En los Problemas **17–34,** *halle todos los puntos de discontinuidad.*

17. $f(x) = 3x^2 - 3$. **18.** $h(x) = x - 2$. **19.** $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$. **20.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$.

21. $g(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{5}$. **22.** $f(x) = 0$. **23.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$. **24.** $g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + x}$.

25. $h(x) = \dfrac{x - 7}{x^3 - x}$. **26.** $f(x) = \dfrac{x}{x}$. **27.** $p(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. **28.** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4 - 1}$.

29. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$ **30.** $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \geq -1, \\ 1, & \text{si } x < -1. \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$ **32.** $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{si } x > 2, \\ 3 - 2x, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 2, \\ x - 1, & \text{si } x < 2. \end{cases}$ **34.** $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } x \geq 3, \\ 2x - 1, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

35. Supóngase que la tarifa de larga distancia para una llamada telefónica de Hazleton, Pennsylvania a Los Angeles, California es de \$0.29 (dólares) por el primer minuto y \$0.20 por cada minuto adicional o fracción. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, trazar la gráfica de f para $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$. Utilizar la gráfica para determinar los valores de t, en donde $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$, en los cuales ocurre discontinuidad.

36. La *función mayor entero*, $f(x) = [x]$, se define como el mayor número entero que es menor que o igual a x, en donde x es cualquier número real. Por ejemplo, $[3] = 3$, $[1.999] = 1$, $[\frac{1}{4}] = 0$ y $[-4.5] = -5$. Trace la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice la gráfica para determinar los valores de x en los que ocurren discontinuidades.

37. Trace la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600, & \text{si } 0 \leq x < 5, \\ -100x + 1100, & \text{si } 5 \leq x < 10, \\ -100x + 1600, & \text{si } 10 \leq x < 15. \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el tiempo x. ¿Es f continua en 2? ¿En 5? ¿En 10?

10.5 Aplicación de la continuidad a las desigualdades

En esta sección se estudia la forma en que se puede aplicar la continuidad para resolver desigualdades como $x^2 + 3x - 4 > 0$. Pero, en primer lugar, se debe considerar una estructura sobre la cual basar la técnica.

Se llama la atención del lector hacia la relación que existe entre las intercepciones x de la gráfica de una función g (es decir, los puntos en los que la gráfica corta al eje x) y las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. Si la gráfica de g tiene una intersección $(r, 0)$

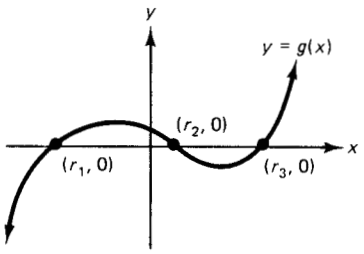


FIGURA 10.19

con el eje x, entonces $g(r) = 0$, de modo que r es una raíz de la ecuación $g(x) = 0$. Por ello, de la gráfica de $y = g(x)$ en la Figura 10.19, se concluye que r_1, r_2 y r_3 son raíces de $g(x) = 0$. Por otro lado, si r es cualquier raíz real de la ecuación $g(x) = 0$, entonces $g(r) = 0$ y, así, $(r, 0)$ queda en la gráfica de g. Esto significa que todas las raíces reales de la ecuación $g(x) = 0$ pueden representarse mediante puntos en los que la gráfica de g corta al eje x. Obsérvese también en la Figura 10.19 que estos puntos determinan cuatro intervalos abiertos en el eje x:

$$(-\infty, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), \quad \text{y} \quad (r_3, \infty).$$

En este punto ya se puede pasar a la solución de desigualdades. Volviendo a $x^2 + 3x - 4 > 0$, se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Puesto que f es una función polinomial, es continua en todas partes. Las raíces de $f(x) = 0$ son -4 y 1; en consecuencia, la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x en $(-4, 0)$ y $(1, 0)$ (véase la Figura 10.20. Las raíces, o para ser más precisos las intercepciones, determinan tres intervalos en el eje x:

$$(-\infty, -4), (-4, 1), \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

Considérese el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, se afirma que $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ *en todo* el intervalo. Supóngase que $f(x)$ en realidad cambiara de signo ahí. Entonces, por la continuidad de f, habría un punto en el que la gráfica interceptara al eje x, por ejemplo en $(x_0, 0)$ (véase la Figura 10.21). Pero entonces x_0 sería una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Esto no puede ser, puesto que no existe raíz de $x^2 + 3x - 4 = 0$ que sea menor que -4. Por lo tanto, $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$ al igual que en los otros intervalos.

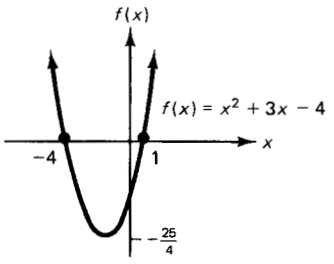


FIGURA 10.20

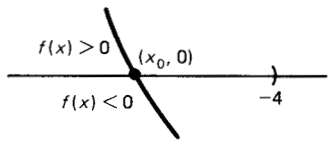


FIGURA 10.21

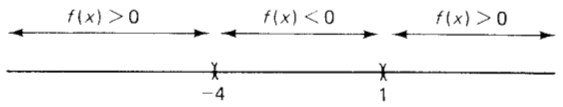


FIGURA 10.22

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de estos intervalos, es suficiente determinar su signo en cualquier punto del intervalo. Por ejemplo, -5 se encuentra en $(-\infty, -4)$ y $f(-5) = 6 > 0$. Por lo tanto, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$. Dado que 0 se encuentra en $(-4, 1)$, y $f(0) = -4 < 0$, entonces $f(x) < 0$ en $(-4, 1)$. De igual forma, 3 se encuentra en $(1, \infty)$ y $f(3) = 14 > 0$; por consiguiente, $f(x) > 0$ se halla en $(1, \infty)$ (véase la Figura 10.22). Por lo tanto, $x^2 + 3x - 4 > 0$ para $x < -4$ y para $x > 1$, consecuentemente, se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son evidentes en la gráfica que aparece en la Figura 10.20.

EJEMPLO 1

Resolver $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es continua en todas partes. Para encontrar las raíces de $f(x) = 0$, se tiene

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0,$$

$$x = -2, 5.$$

En la Figura 10.23 se muestran las raíces -2 y 5, las cuales determinan tres intervalos:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 5), \quad \text{and} \quad (5, \infty).$$

Como -3 se encuentra en $(-\infty, -2)$, el signo de $f(x)$ en $(-\infty, -2)$ es el mismo que el de $f(-3)$. Como

$$f(x) = (x + 2)(x - 5) \qquad \text{[forma factorizada de } f(x)\text{]},$$

se tiene

$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5) = (-)(-) = +.$$

FIGURA 10.23

[Nótese la conveniencia de hallar el signo de $f(-3)$ utilizando los signos de los facores de $f(x)$]. Por tanto, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$. Para los otros intervalos se encuentra que

$$f(0) = (0 + 2)(0 - 5) = (+)(-) = -,$$

por lo que $f(x) < 0$ en $(-2, 5)$, y

$$f(6) = (6 + 2)(6 - 5) = (+)(+) = +,$$

Así $f(x) >$ en $(5, \infty)$. En la gráfica de signos de la Figura 10.24 se presenta un resumen de los resultados. De modo que $x^2 \times 3x - 10 < 0$, para $-2 < x < 5$.

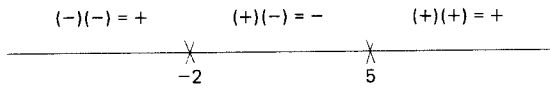


FIGURA 10.24

EJEMPLO 2

Resolver $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$.

Si $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$, entonces f es continua en todas partes. Las raíces de $f(x) = 0$ son 0, 1 y −4, lo cual se muestra en la Figura 10.20.

Estas raíces determinan cuatro intervalos:

$$(-\infty, -4), (-4, 0), (0, 1), \text{ y } (1, \infty).$$

Ahora se encuentra el signo de $f(x)$ en un punto de cada intervalo:

$$f(-5) = (-)(-)(-) = -, \text{ por lo que } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -4);$$

$$f(-2) = (-)(-)(+) = +, \text{ por lo que } f(x) > 0 \text{ en } (-4, 0);$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = (+)(-)(+) = -, \text{ por lo que } f(x) < 0 \text{ en } (0, 1);$$

$$\text{and} \quad f(2) = (+)(+)(+) = +, \text{ por lo que } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty).$$

En la Figura 10.26 se presenta una gráfica de signos. Así, $x(x \times 1)(x + 4) \leq 0$ para $x \leq -4$ y para $0 \leq x \leq 1$. Obsérvese que −4, 0 y 1 se incluyen en la solución pues estas raíces satisfacen la parte de igualdad (=) de la desigualdad ($\leq$).

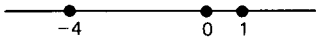


FIGURA 10.25

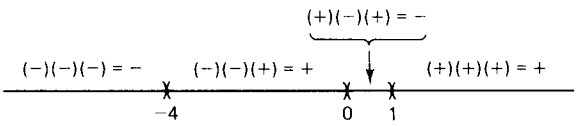


FIGURA 10.26

EJEMPLO 3

Resolver $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} = \dfrac{(x - 1)(x - 5)}{x}$. Para un cociente se resuelve la desigualdad considerando que los intervalos están determinados por las raíces de $f(x) = 0$, a saber, 1 y 5, y los puntos en donde f es discontinua. La función es discontinua en $x = 0$ y continua en las demás partes. En la Figura 10.27 se coloca un círculo hueco

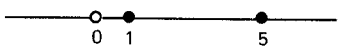


FIGURA 10.27

en 0 para señalar que f no está definida ahí. Se consideran los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 5), \text{ y } (5, \infty).$$

Determinando el signo de $f(x)$ en un punto de cada intervalo, se encuentra que

$$f(-1) = \frac{(-)(-)}{(-)} = (-), \quad \text{por lo que } f(x) < 0 \text{ se encuentra sobre } (-\infty, 0);$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-)(-)}{(+)} = (+), \quad \text{por lo que } f(x) > 0 \text{ se encuentra sobre } (0, 1);$$

$$f(2) = \frac{(+)(-)}{(+)} = (-), \quad \text{por lo que } f(x) < 0 \text{ se encuentra sobre } (1, 5);$$

y

$$f(6) = \frac{(+)(+)}{(+)} = (+), \quad \text{por lo que } f(x) > 0 \text{ se encuentra sobre } (5, \infty).$$

La gráfica de signos se encuentra en la Figura 10.28. Por lo tanto, $f(x) \geq 0$ para $0 < x \leq 1$ y para $x \geq 5$ (véase la Figura 10.29) ¿Por qué se incluyen 1 y 5 y se excluye el 0?

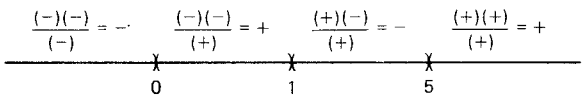


FIGURA 10.28

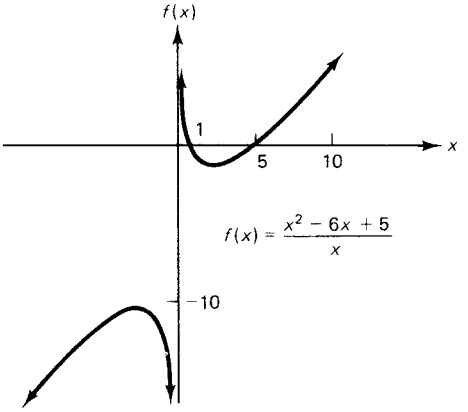


FIGURA 10.29

Resumiendo: $f(x)$ puede cambiar de signo sólo alrededor de los puntos en los que $f(x) = 0$ o en los puntos en que f tiene una discontinuidad.

EJEMPLO 4

Resolver las siguientes desigualdades.

a. $x^2 + 1 > 0$.

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por consiguiente, la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ no tiene intersecciones con el eje x. También, f es continua en todas

partes. Consecuentemente, $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. Pero x^2 es siempre positiva o bien 0, de modo que, $x^2 + 1$ es siempre positiva. Así, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $-\infty < x < \infty$.

b. $x^2 + 1 < 0$.

De la parte (a), $x^2 + 1$ es siempre positiva, de manera que, la desigualdad $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

EJERCICIOS 10.5

Mediante la técnica que se analizó en esta sección, resuelva las siguientes desigualdades.

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$.

2. $x^2 - 8x + 15 > 0$.

3. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

4. $14 - 5x - x^2 \leq 0$.

5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$.

6. $x^2 - 4 < 0$.

7. $x^2 + 4 < 0$.

8. $2x^2 - x - 2 \leq 0$.

9. $(x + 2)(x - 3)(x + 6) \leq 0$.

10. $(x - 5)(x - 2)(x + 3) \geq 0$.

11. $-x(x - 5)(x + 4) > 0$.

12. $(x + 2)^2 > 0$.

13. $x^3 + 4x \geq 0$.

14. $(x + 2)^2(x^2 - 1) < 0$.

15. $x^3 + 2x^2 - 3x > 0$.

16. $x^3 - 4x^2 + 4x > 0$.

17. $\dfrac{x}{x^2 - 1} < 0$.

18. $\dfrac{x^2 - 1}{x} < 0$.

19. $\dfrac{4}{x - 1} \geq 0$.

20. $\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0$.

21. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$.

22. $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$.

23. $\dfrac{3}{x^2 + 6x + 8} \leq 0$.

24. $\dfrac{2x + 1}{x^2} \leq 0$.

25. $x^2 + 2x \geq 2$.

26. $x^4 - 16 \geq 0$.

27. Supóngase que los consumidores adquirirían q unidades de un producto cuando el precio de *cada* unidad fuera de $20 - 0.1q$ dólares. ¿Cuántas unidades se deben vender para que los ingresos por ventas no sean inferiores a $750?

28. Una compañía maderera es propietaria de un bosque que tiene forma rectangular y dimensiones de 1 milla × 2 millas. La compañía desea cortar una franja uniforme de árboles a lo largo de las orillas exteriores del bosque. Cuando mucho, ¿qué tan ancha puede ser la franja si la compañía desea conservar $\frac{3}{4}$ de milla cuadrada de bosque?

29. Un fabricante de envases desea fabricar una caja abierta cortando un cuadrado de 4 pulgadas de lado en cada una de las esquinas de una hoja cuadrada de aluminio y doblando después los lados. La caja debe contener cuando menos 324 plg^3. Obtenga las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que se puede utilizar.

30. La Imperial Education Services (I.E.S.) está ofreciendo un taller sobre procesamiento de datos a cierto personal de la Zeta Corporation. El precio por persona es de $50 y la Zeta Corporation garantiza que asistirán cuando menos 50 personas. Supóngase que la I.E.S. ofrece reducir la cuota para *todas las personas* en $ 0.50 por cada persona, por encima de las 50 que asistan. ¿De qué manera debe la I.E.S. limitar el tamaño del grupo para que los ingresos totales que reciba nunca sean inferiores a los que se reciben por 50 personas?

10.6 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 10.1 $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Sección 10.2 límites unilaterales $\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Sección 10.3 capitalización continua

Sección 10.4 continua discontinua continua en un intervalo continua en todas partes

RESUMEN

La noción del límite es la base del Cálculo. Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que es posible hacer que los valores de $f(x)$ sean tan cercanos al número L como se desee haciendo que x se aproxime lo suficiente a a. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen y si c es una constante, entonces

1. $\lim_{x\to a} c = c$,
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$,
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,
5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$,
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$,
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$,
8. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La Propiedad 8 significa que se puede encontrar el límite de una función polinomial simplemente sustituyendo x por a. Sin embargo, con otras funciones la sustitución puede conducir a la forma 0/0, que carece de sentido. En estos casos, la manipulación algebraica, tal como la factorización, puede dar como resultado una forma a partir de la cual puedan determinarse los límites.

Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la derecha, entonces se escribe $\lim_{x\to a^+} f(x)$. De manera similar, si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se tiene $\lim_{x\to a^-} f(x)$. A estos límites se les denomina límites unilaterales.

El símbolo del infinito ∞, que no representa un número, se utiliza para describir límites. El planteamiento

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x aumenta indefinidamente, los valores de $f(x)$ tienden al número L. Se aplica un planteamiento similar cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que x disminuye indefinidamente. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^p} = 0.$$

Si $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando $x \to a$, entonces se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. De modo análogo, si $f(x)$ disminuye indefinidamente, se tiene $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞(o $-\infty$) no significa que exista ese límite. Más bien es una forma de decir que el límite no existe y además se dice *por qué* no existe.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de polinomios) cuando $x \to \infty$ o bien $-\infty$. Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos del numerador y del denominador, respectivamente, que tienen las mayores potencias de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En particular, cuando $x \to \infty$ o bien $-\infty$ el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término que contiene la mayor potencia de x. Esto significa que, un polinomio que no contiene constantes, el límite cuando $x \to \infty$ o bien $-\infty$ es ∞ o bien $-\infty$.

Una función f es continua en $x = a$ si y sólo si,

1. $f(x)$ está definida en $x = a$.
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En términos geométricos, esto significa que la gráfica de f no se interrumpe cuando $x = a$. Si una función no es continua en un punto, se dice que es discontinua ahí. Las funciones polinomiales son continuas en todas partes, y las funciones racionales sólo son discontinuas en los puntos en donde el denominador es cero.

Cuando el interés se capitaliza en cada instante, se dice que se compone continuamente. Bajo capitalización continua a la tasa anual r durante t años, la fórmula $S = Pe^{rt}$ arroja el monto total S de un capital P. La fórmula $P = Se^{-rt}$ da el valor actual P de S unidades monetarias. La tasa efectiva correspondiente a una tasa anual r capitalizable continuamente es $e^r - 1$.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ (o bien $f(x) < 0$), primero se encuentran los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos, y en cada intervalo, $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. Para hallar el signo en cualquiera de estos intervalos, es suficiente obtener el signo de $f(x)$ en cualquier punto. Después de determinar los signos para todos los intervalos resulta sencillo dar la solución de $f(x) > 0$ (o bien $f(x) < 0$).

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-26**, *encontrar los límites, si existen. Si no existen límites, mencionar esto o utilizar el símbolo* ∞ *o* $-\infty$, *lo que sea apropiado.*

1. $\lim_{x \to -1} (2x^2 + 6x - 1)$.

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$.

3. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

4. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$.

5. $\lim_{h \to 0} (x + h)$.

6. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

7. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$.

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5}$.

9. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2}{x + 1}$.

10. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$.

11. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x - 2}{5x + 3}$.

12. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$.

13. $\lim_{t \to 3} \dfrac{2t - 3}{t - 3}$.

14. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^6}{x^5}$.

15. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x + 3}{1 - x}$.

16. $\lim_{x \to 4} \sqrt{4}$.

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$.

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

19. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$.

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x - 2}$.

21. $\lim_{x \to 2} \sqrt{3x}$.

22. $\lim_{y \to 5^+} \sqrt{y - 5}$.

23. $\lim_{x \to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

24. $\lim_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{si } x < 3, \\ 6, & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$

25. Si $f(x) = 8x - 2$, evaluar $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

26. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, evaluar $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

27. Se determinó, para una relación específica entre anfitrión y parásito, que, cuando la densidad de anfitrión (número de anfitriones por unidad de área) es x, entonces el número de anfitriones con parasitación, en un periodo determinado, es y, en donde

$$y = 11\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right).$$

Si aumentara ilimitadamente la densidad de los anfitriones, ¿a qué valor tendería?

28. Se determinó, para una determinada relación entre depredador y presa, que el número de presas que consume un solo depredador en un cierto tiempo es función de la densidad de presas x (número de presas por unidad de área). Supóngase que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}.$$

Si aumenta ilimitadamente la densidad de presas, ¿a qué valor tendería?

29. Para una tasa anual de interés del 7% capitalizable continuamente, halle:

a. el monto total de \$2,500 a los 14 años. **b.** el valor actual de \$2,500 que vencen en 14 años.

30. Para una tasa anual de interés del 6% compuesto continuamente, halle

a. el monto compuesto de \$800 después de 9 años. **b.** el valor actual de \$800 que vencen en 9 años.

31. Obtenga la tasa efectiva equivalente a una tasa anual del 6% compuesto continuamente.

32. Determine la tasa efectiva equivalente a una tasa anual del 1% compuesto continuamente.

33. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = x + 5$ es continua en $x = 7$.

34. Empleando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 4}$ es continua en $x = 3$.

35. Determine si $f(x) = x/4$ es continua en todas partes. Mencione alguna razón para la respuesta.

36. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Proporcione una razón para la respuesta.

En los Problemas **37–44,** *obtenga los puntos de discontinuidad (si existen) para cada función.*

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$. **38.** $f(x) = \dfrac{0}{x^3}$. **39.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x^2 + 3}$. **40.** $f(x) = (3 - 2x)^2$.

41. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$. **42.** $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^3 + x}$. **43.** $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{si } x > -2, \\ 3x + 6, & \text{si } x \leq -2. \end{cases}$

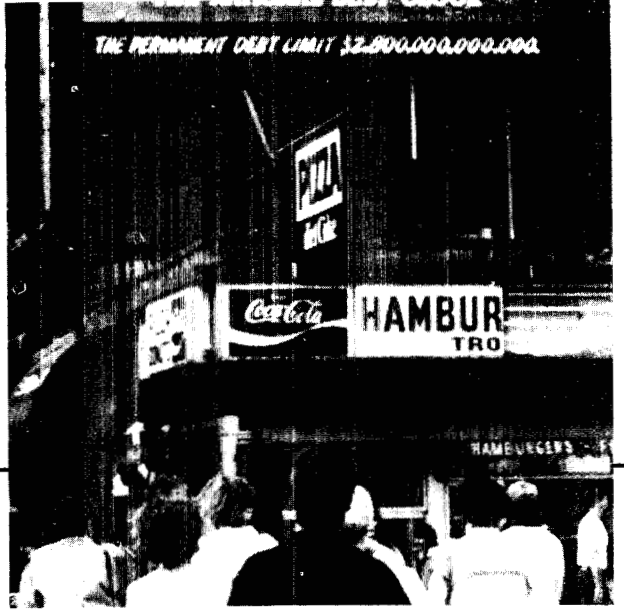
44. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

En los Problemas **45–52,** *resuelva las desigualdades dadas.*

45. $x^2 + 4x - 12 > 0$. **46.** $2x^2 - 6x + 4 \leq 0$. **47.** $x^3 \geq 2x^2$. **48.** $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$.

49. $\dfrac{x + 5}{x^2 - 1} < 0$. **50.** $\dfrac{x(x + 5)(x + 8)}{3} < 0$. **51.** $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$. **52.** $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$.

APLICACIÓN PRÁCTICA



Déficit de Presupuesto

La magnitud del déficit presupuestario de Estados Unidos preocupa en gran medida a muchos estadounidenses y es un tema frecuente en las noticias. El déficit en el año fiscal de 1988 fue de 155,000 millones de dólares*. La magnitud del déficit afecta la confianza de los inversionistas, tanto nacionales como extranjeros, tienen en la economía de Estados Unidos. Afecta, asimismo, la confianza de los funcionarios de compañías privadas y la de los líderes políticos. Según el *Wall Street Journal**, el déficit presupuestal propuesto por el presidente Reagan para el año fiscal de 1990, fue de 92,500 millones de dólares. Aunque esto significa una considerable reducción con respecto a la cifra de 1988, muchas personas consideran que sigue siendo demasiado grande y que habrá que lograr mayores reducciones en el futuro, incluso hasta lograr el equilibrio del presupuesto. Existen quienes creen que para reducir el presupuesto, se deben hacer recortes en los gastos del gobierno, lo cual podría afectar los programas gubernamentales o que, por otro lado, debe darse un aumento en los ingresos, posiblemente a través de incrementos en los impuestos. Otros preferirían que el presidente fijara una cantidad que no fuera posible rebasar (un *line-item veto*).

Supóngase que se reduce el déficit D_0 en el tiempo $t = 0$ a una tasa anual r. Supóngase, además, que existen k periodos de igual duración en un año. Al final del primer lapso, el déficit original a una cierta suma, se estaría restando del déficit en cada momento. Véase ahora como se puede elaborar un modelo de esta situación.

Supongase que se reduce el déficit D_0 en el tiempo $t = 0$ a una tasa anual r. Supóngase, además, que existen k periodos de igual duración en un año. Al final del primer lapso, el déficit original se reduce en $D_0\left(\frac{r}{k}\right)$, de manera que el nuevo déficit es

$$D_0 - D_0\left(\frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right).$$

* Wall Street Journal, 10 de enero, 1989, Sec. A, pp. 1, 12

Al final del segundo periodo, este déficit se reduce en $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$, de modo que el nuevo déficit es

$$D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k} = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\left(1 - \frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^2.$$

El proceso continúa. Al final del tercer periodo, el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$, y así sucesivamente. Al final de t años, el número de periodos es kt y el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si se va a reducir el déficit en cada instante, entonces $k \to \infty$. Por esto se desea evaluar

$$\lim_{k\to\infty} D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

que puede ser replanteado como

$$D_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r}\right]^{-rt}.$$

Si se fija $x = -r/k$, entonces la condición $k \to \infty$ implica que $x \to 0$. Por ello, el límite que se encuentra dentro de los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$ que, como es bien sabido, es e. Así, si se reduce continuamente el déficit D_0 en el tiempo $t = 0$, a una tasa anual r, entonces el déficit D, a los t años está dado por

$$D = D_0 e^{-rt}.$$

Por ejemplo, suponiendo que el déficit de 1990 haya sido de 92,500 millones y que se haya dado una tasa continua de reducción del 6% anual, entonces el déficit t años después está dado por

$$D = 92.5e^{-0.06t}.$$

Esto significa que en el año 2000 ($t = 10$), el déficit será de $92.5e^{-0.6} \approx 50{,}800$ millones. En la Figura 10.30 se tienen las gráficas de $D = 92.5e^{-rt}$ para diversas tasas r. Por supuesto, cuanto mayor sea

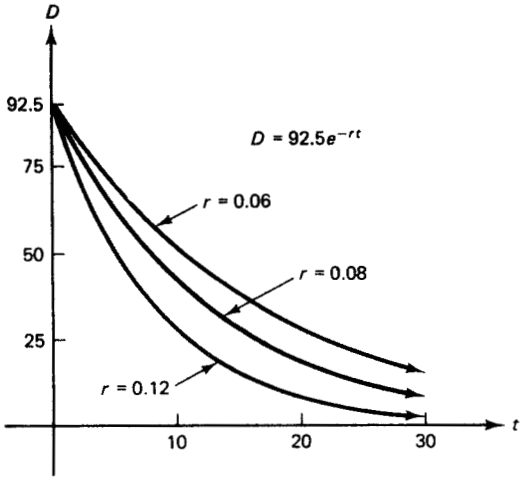


FIGURA 10.30

el valor de r, tanto más rápida será la reducción del déficit. Obsérvese que para $r = 0.06$, el déficit al final de 30 años sigue siendo considerable (aproximadamente 15,300 millones de dólares).

Resulta interesante observar que los elementos radiactivos que decrecen también siguen el modelo de la reducción continua del déficit, $D = D_0e^{-rt}$

EJERCICIOS

En los siguientes problemas, suponga un déficit en el presupuesto de 1990 igual a 92,500 millones de dólares.

1. La propuesta Reagan indica un déficit de 66,800 millones de dólares para 1991.* ¿Qué tasa anual de reducción continua del déficit se requeriría para lograr esto?

2. Para una reducción continua del déficit a una tasa anual del 6%, determine el número de años que se requiere, después de 1990, a fin de que el déficit se reduzca a la mitad. Proporciónese la respuesta al año más cercano.

* *Wall Street Journal*, 10 de enero, 1989, sec. A, pp. 1,12

CAPÍTULO 11

Diferenciación (o derivación)

En este punto comienza propiamente el estudio del Cálculo. Las ideas que intervienen en el Cálculo son muy distintas de las del Álgebra y la Geometría. El poder y la importancia de estas ideas y sus aplicaciones resultarán evidentes en una parte más avanzada del texto. El objetivo de este capítulo es no sólo explicar qué es lo que se denomina "derivada" de una función, sino también enseñar las técnicas para obtener derivadas aplicando en forma apropiada ciertas reglas.

11.1 La derivada

Uno de los principales problemas de los que se ocupa el Cálculo consiste en determinar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. En Geometría suele pensarse en una recta tangente, como la *tangente* a un círculo, como la recta que toca a dicha figura exactamente en un punto (Figura 11.1). Por desgracia, esta idea de tangente no es muy útil para otra clase de curvas.

Por ejemplo, en la Figura 11.2 (a) las rectas L_1 y L_2, cortan a la curva exactamente en un punto. Aunque no se pensaría que L_2 es tangente en este punto, es evidente que L_1 sí lo es. En la Figura 11.2(b) se consideraría que L_3 es tangente al punto P aun cuando L_3 corta a la curva en otros puntos. De estos ejemplos puede observarse que es necesario eliminar la idea de que una tangente es simplemente una recta que

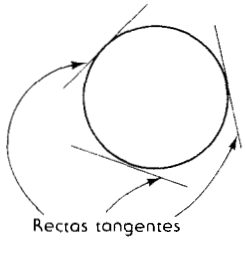
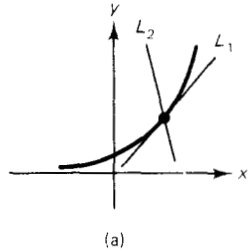
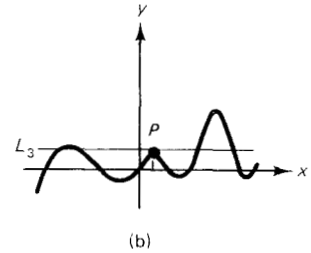


FIGURA 11.1



(a)



(b)

FIGURA 11.2

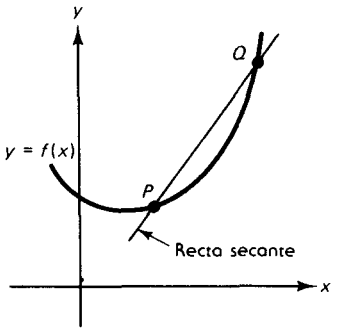


FIGURA 11.3

toca a una curva en un solo punto. Para desarrollar una definición apropiada de recta tangente, se utiliza el concepto de límite.

Obsérvese la gráfica de la función $y = f(x)$ de la Figura 11.3. Aquí, P y Q son dos puntos diferentes sobre la curva. A la recta PQ que pasa por ellos se le denomina **recta secante**. Si Q se mueve a lo largo de la curva y se aproxima a P por la derecha, PQ', PQ'', y sucesivamente, son rectas secantes típicas, como se muestra en la Figura 11.4. Conforme se aproxima Q a P por la izquierda, las rectas son PQ_1, PQ_2, etcétera. *En ambos casos las rectas secantes se aproximan a la misma posición limitante.* A esta posición común de las rectas secantes se le define como la **recta tangente** de la curva en P. Esta definición parece ser razonable y evita las dificultades que se mencionaron al principio de esta sección.

Una curva no necesariamente tiene una tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ tiene tangente en (0, 0) por la siguiente razón. En la Figura 11.5 una recta secante que una 60,0) con un punto cercano a su derecha debe siempre ser la recta $y = x$ y con un punto cercano a su izquierda es la recta $y = -x$. Por ello, la posición limitante de las rectas secantes que pasan por (0, 0) y los puntos de la curva que se encuentran del lado derecho de (0, 0) es la recta $y = x$, pero la posición limitante de las rectas secantes que pasan por (0, 0) y los puntos a su izquierda es la recta $y = -x$. Como no existe posición limitante común, no existe tangente.

Ahora que se tiene una definición apropiada de tangente a una curva en un punto, puede definirse la *pendiente de una curva* en un punto.

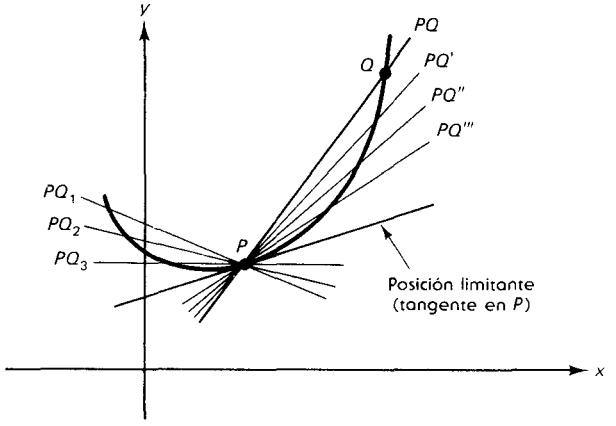


FIGURA 11.4

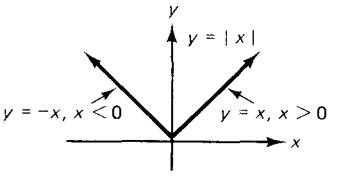


FIGURA 11.5

DEFINICIÓN

*La **pendiente de una curva** en un punto P es la pendiente de su recta tangente en P.*

Puesto que la tangente en P es una posición limitante de las rectas secantes PQ, la pendiente de la tangente es el valor límite de las pendientes de las rectas secantes, conforme Q se aproxima a P. Se encontrará una expresión para la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_1, f(x_1))$ que se muestra en la Figura 11.6. Si $Q = (x_2, f(x_2))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Si se denomina h a la diferencia $x_2 - x_1$ entonces se puede escribir x_2 como $x_1 + h$. Aquí, se tiene que $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $x_2 = x_1$ y no existe recta secante. En consecuencia,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Conforme Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, entonces x_2 se aproxima a x_1. Esto significa que h tiende a cero. El valor limitante de las pendientes de las rectas secantes [que es la pendiente de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ es el siguiente límite:

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \tag{1}$$

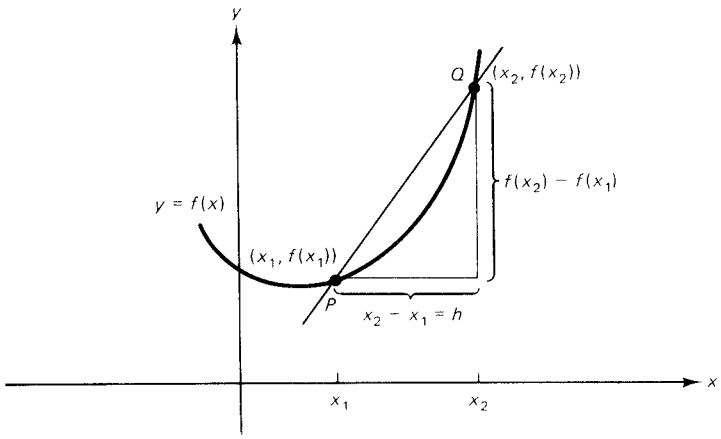


FIGURA 11.6

EJEMPLO 1

Obtener la pendiente de la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto (1, 1).

La pendiente es el límite de la Ecuación (1), con $f(x) = x^2$ y $x_1 = 1$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

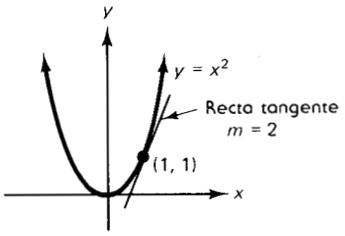


FIGURA 11.7

Por lo tanto, la recta tangente a $y = x^2$ en (1, 1) tiene pendiente 2 (Figura 11.7).

Se puede generalizar la Ecuación (1) para que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ de una curva. Reemplazando x_1 por x se obtiene una función, a la que se denomina *derivada* de f, cuyo dato de entrada es x y cuyo dato de salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$. Por consiguiente, se tiene la siguiente definición que forma la base del Cálculo diferencial.

DEFINICIÓN

La ***derivada*** *de una función f es la función que se denota por f' (y se lee "f prima") que está definida por*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

(suponiendo que existe este límite). Si se puede evaluar $f'(x)$, se dice que f es ***diferenciable*** *y a $f'(x)$ se le denomina derivada de f en x o la derivada de f con respecto a x. Al proceso de determinar la derivada se le denomina* ***diferenciación****.*

EJEMPLO 2

Si $f(x) = x^2$, hallar la derivada de f.

Aplicando la definición anterior,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Obsérvese que al obtener el límite se consideró a x como constante porque la que varia-

ba era h, y no x. Obsérvese también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, que se puede interpretar que da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2(1) = 2$, lo cual confirma el resultado del Ejemplo 1.

Además de $f'(x)$, otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$ en x son:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{(que se lee "de } y \text{ en de } x\text{")},$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad [\text{de } f(x) \text{ en de } x],$$

$$y' \quad (y \text{ prima}),$$

$$D_x y \quad (\text{de respecto a } x \text{ de } y),$$

$$D_x[f(x)] \quad [\text{de respecto a } x \text{ de } f(x)].$$

ADVERTENCIA

$\frac{dy}{dx}$ no se considera como una fracción sino como un simple símbolo para una derivada. Todavía no se asignan significados a los símbolos dy y dx.

Si se puede evaluar la derivada de $y = f(x)$ en $x = x_1$, al *número* resultante $f'(x_1)$ se le denomina derivada de f en x_1 y se dice que f es *diferenciable* en x_1. Como f' da la pendiente de la recta tangente,

> $f'(x_1)$ es la pendiente de la tangente a $y\, f(x)$ en $(x_1, f(x_1))$.

Otras notaciones para $f'(x_1)$ son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} \quad \text{y} \quad y'(x_1).$$

EJEMPLO 3

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, *determinar* $f'(1)$. *Después hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en* $(1, 7)$.

En primer lugar, se obtiene $f'(x)$ y se le evalúa en $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3] - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2). \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x + 2.$$
$$f'(1) = 4(1) + 2 = 6.$$

Consecuentemente, la tangente a la gráfica en (1, 7) tiene pendiente igual a 6. Una forma de punto-pendiente de la recta tangente es $y - 7 = 6(x - 1)$. Simplificando, resulta $y = 6x + 1$.

ADVERTENCIA
En el Ejemplo 3, **no** es correcto decir que como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en (1, 7) es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

EJEMPLO 4

Encontrar la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ *en el punto en donde* $x = 6$.

Haciendo $y = f(x) = 2x + 3$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x + h) + 3] - (2x + 3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2.$$

Como $\frac{d}{dx}(2x + 3) = 2$, la pendiente cuando $x = 6$, o de hecho en cualquier punto, es 2. Obsérvese que la curva es una recta y, por ello, tiene la misma pendiente en cualquier punto.

EJEMPLO 5

Hallar $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Se puede evitar esto racionalizando el numerador.

$$\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{(x + h) - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$$
$$= \frac{h}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Obsérvese que la función original $\sqrt{x}$, está definida para $x \geq 0$. Pero la derivada $1/(2\sqrt{x})$, está definida sólo cuando $x > 0$. De la gráfica de $y = \sqrt{x}$ que aparece en

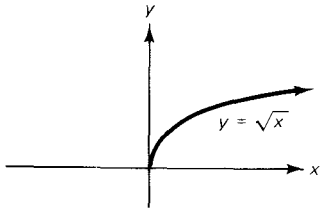


FIGURA 11.8

la Figura 11.8, resulta evidente que cuando $x = 0$ la tangente es una recta vertical, para la cual la pendiente no está definida.

Si una variable, por ejemplo p, es función de alguna otra variable, por ejemplo q, entonces se habla de la derivada de p con respecto a q, y se escribe dp/dq.

EJEMPLO 6

Si $p = f(q), = \dfrac{1}{2q}$, *determinar* $\dfrac{dp}{dq}$.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2q}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(q+h)-f(q)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{2(q+h)} - \dfrac{1}{2q}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{q-(q+h)}{h[2q(q+h)]} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h[2q(q+h)]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}.$$

Obsérvese que cuando $q = 0$ no existe ni la función ni su derivada.

Como nota final se debe señalar que la derivada de $y = f(x)$ en x no es otra cosa que el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Aunque se puede interpretar la derivada como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, esta interpretación es sólo una conveniencia geométrica que facilita la comprensión. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como se verá más adelante, existen otras interpretaciones útiles.

EJERCICIOS 11.1

En los Problemas **1-16,** *utilice la definición de derivada para encontrar cada una de las siguientes.*

1. $f'(x)$ si $f(x) = x$.

2. $f'(x)$ si $f(x) = 4x - 1$.

3. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 3x + 7$.

4. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = -5x$.

5. $\dfrac{d}{dx}(5 - 4x)$.

6. $\dfrac{d}{dx}\left(2 - \dfrac{x}{4}\right)$.

7. $f'(x)$ si $f(x) = 3$.

8. $f'(x)$ si $f(x) = 7.01$.

9. $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$.

10. y' si $y = x^2 + 5$.

11. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = 2q^2 + 5q - 1$.

12. $\dfrac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$.

13. y' si $y = \dfrac{1}{x}$.

14. $\dfrac{dC}{dq}$ si $C = 7 + 2q - 3q^2$.

15. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

16. $g'(x)$ si $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$.

17. Halle la pendiente de la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-2, 8)$.

18. Obtenga la pendiente de la curva $y = 2 - 3^2$ en el punto $(1, -1)$.

19. Determine la pendiente de la curva $y = 4x^2 - 5$ cuando $x = 0$.

20. Determine la pendiente de la curva $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 1$.

En los Problemas **21-26,** *halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.*

21. $y = x + 4$; $(3, 7)$.

22. $y = 2x^2 - 5$; $(-2, 3)$.

23. $y = 3x^2 + 3x - 4$; $(-1, -4)$.

24. $y = (x - 1)^2$; $(0, 1)$.

25. $y = \dfrac{3}{x + 1}$; $(2, 1)$.

26. $y = \dfrac{5}{1 - 3x}$; $(2, -1)$.

27. Algunas ecuaciones pueden implicar derivadas de funciones. En un artículo acerca de la disminución de reglamentaciones sobre tasas de interés, Christofi y Agapos* resuelven la ecuación

$$r = \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)\left(r_L - \frac{dC}{dD}\right)$$

para determinar η (la letra griega eta). Aquí, r es la tasa de depósito que pagan los bancos comerciales, r_L es la tasa que ganan los bancos comerciales, C es el costo administrativo implicado en transformar depósitos en activos que pagan rendimientos, D es el nivel de los depósitos de ahorro y η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Obtenga η.

11.2 Reglas para la diferenciación

Es probable que el lector esté de acuerdo en que diferenciar una función mediante el uso directo de la definición de derivada puede ser un trabajo tedioso. Por fortuna, existen reglas que ofrecen procedimientos eficientes y completamente mecánicos para llevar a cabo la diferenciación. Evitan también el uso directo de límites. En esta sección, se observan algunas reglas.

Para comenzar, recuérdese que la gráfica de la función constante $f(x) = c$ es una recta horizontal (Figura 11.9), que tiene pendiente cero en todas partes. Esto significa que $f'(x) = 0$, la cual es la primera regla. Enseguida se presenta una prueba formal.

* A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research*, XX, núm. 1 (1984), 39-49.

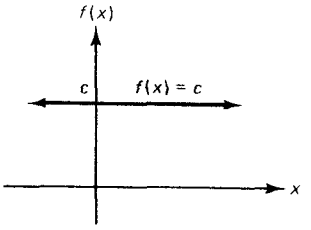


FIGURA 11.9

Regla 1

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

Demostración. Si $f(x) = c$, aplicando la definición de derivada resulta

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

EJEMPLO 1

a. $D_x(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

b. Si $g(x) = \sqrt{5}$, entonces $g'(x) = 0$ porque g es una función constante. Por ejemplo, la derivada de g cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

c. Si $s(t) = (1{,}938{,}623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

Para demostrar la siguiente regla se debe desarrollar un binomio. Recuérdese que

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

y $$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

En ambos desarrollos, los exponentes de x disminuyen de izquierda a derecha, en tanto que los de h aumentan. Esto es cierto para el caso general $(x + h)^n$, en donde n es un entero positivo. Se puede probar que

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + (\quad)x^{n-2}h^2 + \cdots + (\quad)xh^{n-1} + h^n,$$

en donde los números faltantes en los paréntesis son ciertas constantes. Se utiliza esta fórmula para demostrar la siguiente regla, que implica la derivada de x elevada a un exponente constante.

Regla 2

Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Suponiendo que x^{n-} está definida. Es decir, la derivada de una potencia de x con exponente constante es igual al exponente multiplicado por x a una exponente igual al dado.

Demostración. Enseguida se presenta una prueba para el caso en el que n es un entero positivo. Si $f(x) = x^n$, aplicando la definición de derivada se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Del análisis anterior con respecto al desarrollo de $(x + h)^n$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\quad)x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}.$$

En el numerador es cero la suma de los términos primero y último. Dividiendo entre h cada uno de los términos restantes,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [nx^{n-1} + (\quad)x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}].$$

Cada uno de los términos que aparecen después del primero tiene a h como factor y debe tender a 0 cuando $h \to 0$. En consecuencia, $f'(x) = nx^{n-1}$.

EJEMPLO 2

a. Por la regla 2, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

b. Si $F(x) = x = x^1$, entonces $F'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Por lo tanto, la derivada de x con respecto a x es 1.

c. Para diferenciar $y = \sqrt{x}$, se escribe $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$, de manera que tiene la forma x^n. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

d. Sea $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Para aplicar la Regla dos, se *debe* escribir $h(x)$ como $h(x) = x^{-3/2}$, para que tenga la forma x^n.

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}.$$

ADVERTENCIA
No se debe escribir $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ y después diferenciar simplemente el denominador, es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \neq \frac{1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}.$$

La siguiente regla se refiere a una constante que multiplica a una función

Regla 3

Si f es una función diferenciable y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Es decir, la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

Demostración. Si $g(x) = cf(x)$, aplicando la definición de la derivada de g resulta

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Pero, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es $f'(x)$, y por consiguiente, $g'(x) = cf'(x)$.

EJEMPLO 3

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $g(x) = 5x^3$.

Aquí, g es una constante (5) multiplicada por una función (x^3).

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(q) = \frac{13q}{5}$.

Como $\frac{13q}{5} = \frac{13}{5}q$, f es una constante $\left(\frac{13}{5}\right)$ multiplicada por una función (q).

$$f'(q) = \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= \frac{13}{5}\cdot 1 = \frac{13}{5} \qquad \text{(Regla 2).}$$

c. $y = \dfrac{0.702}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.702x^{-2/5}$.

Obsérvese que se puede considerar que y es una constante multiplicada por una función.

$$y' = 0.702\frac{d}{dx}(x^{-2/5}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 0.702\left(-\frac{2}{5}x^{-7/5}\right) = -0.2808x^{-7/5} \qquad \text{(Regla 2).}$$

ADVERTENCIA

Si $f(x) = (4x)^3$, se podría pensar en escribir $f'(x) = 3(4x)^2$. ¡Esto es **incorrecto**! La razón es que la Regla 2 se aplica a la potencia de la variable x, y **no** a la potencia de una expresión que implica a x, tal como $4x$. Para aplicar las reglas se debe obtener una forma apropiada para $f(x)$. Se puede escribir $(4x)^3$ como 4^3x^3 o bien $64x^3$. Consecuentemente,

$$f'(x) = 64\frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2.$$

La siguiente regla implica derivadas de sumas y diferencias de funciones.

Regla 4

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$y \quad \frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

Es decir, la derivada de la suma (o la diferencia) de dos funciones es la suma (o la diferencia) de sus derivadas.

Demostración. Para el caso de una suma, si $F(x) = f(x) + g(x)$, aplicando la definición de la derivada de F se obtiene

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \qquad \text{(reagrupando)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right].$$

Puesto que el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Pero estos dos límites son $f'(x)$ y $g'(x)$. Por ello,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La prueba para la derivada de la diferencia de dos funciones es similar a ésta.

La Regla 4 se puede extender a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x).$$

EJEMPLO 4

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$.

Aquí, F es la suma de dos funciones, $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Así,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{5}{z^{1/3}}$.

Obsérvese que se puede escribir $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$. Dado que f es la diferencia de dos funciones,

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(\tfrac{1}{4}z^4) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= \tfrac{1}{4}(4z^3) - 5(-\tfrac{1}{3}z^{-4/3}) \qquad \text{(Regla 2)}$$

$$= z^3 + \tfrac{5}{3}z^{-4/3}.$$

c. $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0$$

$$= 18x^2 - 4x + 7.$$

EJEMPLO 5

Hallar la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ *cuando* $x = 2$.

Se multiplica y después se diferencia cada término.

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x.$$
$$f'(x) = 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1)$$
$$= 6x^2 - 20x + 4.$$
$$f'(2) = 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12.$$

EJEMPLO 6

Determinar una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Escribiendo y como diferencia de dos funciones, se tiene

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2[(-1)x^{-2}] = 3 + \frac{2}{x^2}.$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5.$$

Para encontrar la coordenada y del punto de la curva en donde $x = 1$, se sustituye este valor de x en la ecuación de la *curva*. Esto da

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1.$$

Por lo tanto, el punto (1, 1) queda tanto en la curva como en la recta tangente. Por consiguiente, una ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1),$$
$$y = 5x - 4.$$

EJERCICIOS 11.2

En los Problemas **1-54**, *diferencie las funciones.*

1. $f(x) = 5$.

2. $f(x) = (\frac{11}{13})^{4/5}$.

3. $f(x) = x^5$.

4. $f(x) = 0.3x$

5. $f(x) = 8x^4$.

6. $f(x) = \sqrt{2}\,x^{83/4}$.

7. $g(w) = w^{-7}$.

8. $f(t) = 3t^{-2}$.

9. $f(x) = 4x^{-14/5}$.

10. $v(x) = x^e$.

11. $f(x) = 3x - 2$.

12. $f(w) = 5w - 7 \ln \frac{4}{5}$.

13. $f(p) = \dfrac{13p}{5} + \dfrac{7}{3}$.

14. $q(x) = \dfrac{5x + 2}{8}$.

15. $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$.

16. $f(q) = 7q^2 - 7q + 3$.

17. $f(x) = 14x^3 - 6x^2 + 7x - e^3$.

18. $f(r) = -8r^3 + 9^{2/3}$

19. $f(q) = -3q^3 + \frac{9}{2}q^2 + 9q + 9$.

20. $f(x) = 100x^{-3} - 50x^{-1/2} + 10x - 1$.

21. $f(x) = 2x^{501} - 125x^{100} + 0.2x^{3.4}$.

22. $f(x) = 17 + 8x^{1/7} - 10x^{12} - 3x^{-15}$.

23. $f(x) = 2(13 - x^4)$.

24. $f(s) = 5(s^4 - 3)$.

25. $g(x) = \dfrac{13 - x^4}{3}$.

26. $f(x) = \dfrac{5(x^4 - 3)}{2}$.

27. $f(x) = x^{-4} - 9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$.

28. $f(z) = 3z^{1/4} - 12^2 - 8z^{-3/4}$.

29. $h(x) = -2(27x - 14x^5)$.

30. $f(x) = \dfrac{-(1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5)}{2}$.

31. $f(x) = -2x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{x^4}{4} + 2$.

32. $p(x) = \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x}{2}$.

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

34. $f(x) = \dfrac{7}{x^3}$.

35. $f(s) = \dfrac{1}{4s^5}$.

36. $g(w) = \dfrac{2}{3w^3}$.

37. $f(t) = 4\sqrt{t}$.

38. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

39. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

40. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$.

41. $f(x) = x(3x^2 - 7x + 7)$.

42. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$.

43. $g(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{2}{t^2}$.

44. $f(x) = x\sqrt{x}$.

45. $f(x) = x^3(3x)^2$.

46. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$.

47. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$.

48. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 1)$.

49. $f(q) = \dfrac{4q^3 + 7q - 4}{q}$.

50. $f(w) = \dfrac{w - 5}{w^5}$.

51. $f(x) = (x + 1)(x + 3)$.

52. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$.

53. $w(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{x^2}$.

54. $f(x) = \dfrac{7x^3 + x}{2\sqrt{x}}$.

Para cada una de las curvas de los Problemas **55-58,** *determine las pendientes en los puntos que se señalan.*

55. $y = 3x^2 + 4x - 8$; $(0, -8)$, $(2, 12)$, $(-3, 7)$.

56. $y = 5 - 6x - 2x^3$; $(0, 5)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{43}{4})$, $(-3, 77)$.

57. $y = 4$; cuando $x = -4$, $x = 7$, $x = 22$.

58. $y = 2x - 3\sqrt{x}$; cuando $x = 1$, $x = 16$, $x = 25$.

En los Problemas **59** *y* **60,** *halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto que se indica.*

59. $y = 4x^2 + 5x + 2$; $(1, 11)$.

60. $y = (1 - x^2)/5$; $(4, -3)$.

61. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3 + x - 5x^2 + x^4$ cuando $x = 0$.

62. Repita el Problema 61 para la curva $y = \dfrac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$ cuando $x = 4$.

63. Determine todos los puntos de la curva $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ en los que la recta tangente es horizontal.

64. Encuentre todos los puntos de la curva $y = x^2 - 5x + 3$ en los que la pendiente es 1.

65. Eswaran y Kotwal* analizan economías agrarias en las que existen dos tipos de trabajadores, permanentes y ocasionales. A los trabajadores permanentes se les da empleo con contratos a largo plazo y pueden obtener prestaciones como días de asueto y ayuda en emergencias. A los trabajadores ocasionales se les contrata por día y llevan a cabo trabajos rutinarios y menores como deshierbar, cosechar y desgranar. La diferencia z en el costo o valor actual de la contratación de un trabajador permanente con respecto al costo de contratar a un trabajador ocasional está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

en donde w_p y w_c son los salarios para mano de obra permanente y mano de obra ocasional, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

Verificar lo anterior

11.3 La derivada como tasa de variación

Históricamente, una aplicación importante de la derivada implica el movimiento rectilíneo. Esta aplicación ofrece una forma conveniente de interpretar la derivada como *tasa de variación o razón de cambio*. Para denotar el cambio en una variable como x, es común que se utilice el símbolo Δx (que se lee "delta x"). Por ejemplo, si x varía de 1 a 3, entonces el cambio en x es $\Delta x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de $x(= 3)$ es el valor inicial más el cambio, es decir $1 + \Delta x$. De igual forma, si t aumenta en Δt, el nuevo valor es $t + \Delta t$. En el análisis que sigue se utiliza la notación con Δ.

Supóngase que una partícula se mueve a lo largo de la recta numérica que se presenta en la Figura 11.10, de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2,$$

en donde s es la posición de la partícula en el tiempo t. A esta ecuación se le denomina *ecuación de movimiento*. Supóngase que t está en segundos y s, en metros. En $t = 1$ la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de tiempo de 2 segundos la partícula tiene un cambio en posición *desplazamiento* y la ***velocidad media*** (v_{med}) de la partícula se define como

$$v_{\text{med}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{intervalo de tiempo}} \tag{1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}.$$

FIGURA 11.10

* M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-77.

Decir que la velocidad media es de 4 m/s, de $t = 1$ a $t = 3$, significa que, *en promedio*, la posición de la partícula cambió 4 m hacia la derecha, en cada segundo de ese intervalo. Denotando los cambios en los valores de s y t mediante Δs y Δt, respectivamente, entonces la velocidad media está dada por

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \qquad \text{(para el intervalo } t = 1 \text{ a } t = 3\text{)}.$$

Al cociente $\Delta s/\Delta t$ se le denomina también la **tasa media de variación de s con respecto a t** sobre el intervalo de $t = 1$ a $t = 3$.*

Fíjese ahora la duración del intervalo de tiempo en sólo un segundo [es decir, $\Delta t = 1$]. Entonces, para el intervalo más corto de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t = 2$, se tiene $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}.$$

En términos más generales, para el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$, la partícula se mueve de la posición $f(1)$ a la posición $f(1 + \Delta t)$. Por ello, el desplazamiento es $f(1 + \Delta t) - f(1)$:

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1).$$

Como el intervalo de tiempo dado es Δt, entonces la velocidad media de la partícula está dada por

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si Δt se reduce cada vez más, la velocidad media o promedio sobre el intervalo de t a $t + \Delta t$ se aproxima a lo que se puede denominar *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$; es decir, la velocidad es un *punto* en el tiempo ($t = 1$) en contraposición a la velocidad sobre un *intervalo* de tiempo.

Para algunos valores típicos de Δt entre 0.1 y 0.001, se obtienen las velocidades medias que aparecen en la Tabla 11.1 y que el lector puede verificar.

Los datos de la tabla indican que, conforme la magnitud del intervalo se aproxima al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando Δt tiende a 0, entonces $\Delta s/\Delta t$ tiende a

TABLA 11.1

MAGNITUD DEL INTERVALO DE TIEMPO Δt	INTERVALO DE DE TIEMPO $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$	VELOCIDAD MEDIA $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

*(**N. del R.**) Una tasa de variación (respecto al tiempo) se llama *rapidez* de variación. (F.P.)

2 m/s. Se define que el límite de la velocidad media, cuando $\Delta t \to 0$, es la **velocidad instantánea** (o, simplemente, la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. También se la denomina la **tasa instantánea de variación** de s con respecto a t (o **rapidez de variación**) en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{med}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

El límite del lado derecho es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Por ello, la velocidad instantánea de la partícula en $t = 1$ es simplemente ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t,$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s},$$

lo cual confirma la conclusión anterior.

En resumen, para una ecuación de movimiento rectilíneo de la forma $s = f(t)$, la velocidad v en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

EJEMPLO 1

Supóngase que la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta numérica está dada por $s = \dfrac{3t^2 + 5}{4}$. *Encontrar la velocidad cuando* $t = 10$.

La velocidad en cualquier tiempo t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2 + 5}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(3t^2 + 5)$$

$$= \frac{1}{4}[6t + 0] = \frac{3}{2}t.$$

Cuando $t = 10$,

$$v = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15.$$

El análisis de la tasa de variación o razón de cambio de s con respecto a t se aplica de igual manera a *cualquier* función $y = f(x)$. Esto significa lo siguiente.

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left\{\begin{array}{l}\textbf{tasa media de variación de } y \\ \textbf{con respecto a } x \textbf{ sobre el in-} \\ \textbf{tervalo de } x \textbf{ a } x + \Delta x\end{array}\right.$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \textbf{tasa instantánea de variación de } y \\ \textbf{con respecto a } x. \end{cases} \tag{2}$$

Como la tasa de variación instantánea de $y = f(x)$ en un punto es una derivada, es también la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$, en ese punto. Por conveniencia, comúnmente se hace referencia a la tasa de variación instantánea simplemente como *tasa de variación* (o *razón de cambio*).

De la Ecuación (2), si Δx (un cambio en x) se acerca a 0, entonces $\Delta y/\Delta x$ se acerca a dy/dx. Es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x.$$

Es decir, si x cambia en Δx, entonces el cambio en y, Δy, es aproximadamente igual a dy/dx multiplicada por el cambio en x. En particular, si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es dy/dx.

EJEMPLO 2

Si $y = f(x)$, $f(3) = 5$, $\dfrac{dy}{dx} = 8$, *estimar la variación en* y *si* x *cambia de* 3 *a* 3.5

Se tiene $dy/dx = 8$ y $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$. El cambio en y está dado por Δy

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4.$$

Se destaca que $f(3.5) = f(3) + \Delta y$ y que puede estimarse mediante $5 + 4 = 9$.

EJEMPLO 3

Evaluar la tasa de variación de $y = x^4$ *con respecto a* x. *Evaluar la razón de cambio cuando* $x = 2$ *y cuando* $x = -1$.

La razón de variación o cambio es dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Cuando $x = 2$, $dy/dx = 4(2)^3 = 32$. Eso significa que si x aumenta en una cantidad pequeña, entonces y aumenta aproximadamente en 32 veces el aumento en x. En términos simples, se dice que y aumenta a un ritmo 32 veces superior al de x. Cuando $x = -1$, entonces $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$. La importancia del signo menos en -4 es que señala que y *disminuye* a un ritmo 4 veces superior al del aumento en x.

La interpretación de la derivada como tasa o razón de cambio tiene aplicaciones en Administración y Economía, así como en otras áreas.

EJEMPLO 4

Sea $p = 100 - q^2$ la función de demanda para el producto de un fabricante. Hallar la tasa de variación del precio p por unidad con respecto a la cantidad q. ¿Cuán rápido cambia el precio con respecto a q cuando $q = 5$? El precio p está en unidades monetarias.

La tasa de variación de p con respecto a q es dp/dq.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q.$$

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=5} = -2(5) = -10.$$

Esto significa que cuando existe una demanda de 5 unidades, el *aumento* de una unidad en la demanda corresponde a una disminución de aproximadamente \$10 en el precio por unidad que los consumidores están dispuestos a pagar.

EJEMPLO 5

Un sociólogo está estudiando varios programas que se sugiere pueden ayudar en la educación de niños en edad preescolar de cierta ciudad. El sociólogo considera que después de x años de iniciado un programa específico, $f(x)$ millares de preescolares se inscribirán. Se tiene que

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2), \qquad 0 \le x \le 12.$$

¿A qué tasa cambiará la inscripción (a) después de 3 años del inicio de ese programa? (b) ¿Después de 9 años?

La tasa de variación de $f(x)$ es $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x).$$

a. Después de 3 años la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}[12 - 2(3)] = \frac{10}{9} \cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Por ello, la inscripción estaría aumentando a una tasa de $6\frac{2}{3}$ millares de preescolares por año.

b. Después de 9 años la tasa de variación es

$$f'(9) = \frac{10}{9}[12 - 2(9)] = \frac{10}{9}[-6] = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}.$$

Así, la inscripción *disminuiría* a la tasa o razón de $6\frac{2}{3}$ millares de preescolares por año.

La **función de costo total** de un fabricante $c = f(q)$ da el costo total c de fabricar y vender q unidades de un producto. La tasa de cambio de c con respecto a q se denomina **costo marginal**. En consecuencia,

$$\textbf{costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Por ejemplo, supóngase que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, en donde c está en dólares y q en libras. Entonces,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal, cuando se producen 4 libras, es dc/dq, evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si se aumenta la producción en una libra, de cuatro a cinco libras, entonces el cambio en los costos es de aproximadamente \$0.80 (dólares). Es decir, la libra adicional cuesta más o menos \$0.80. En general, se *interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción.* [El costo real de fabricar una libra más por encima de 4 libras es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$.]

Si c es el costo total de fabricar q unidades de un producto, entonces el **costo promedio** por unidad, $\bar{c}$, es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}. \tag{3}$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es \$100, entonces el costo promedio por unidad es $\bar{c} = 100/20 = \$5$. Multiplicando ambos lados de la Ecuación (3) por q, se tiene

$$c = q\bar{c}.$$

Es decir, el costo total es el producto del número de unidades fabricadas y el costo promedio por unidad.

EJEMPLO 6

Si la ecuación de costos promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

obtener la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se fabrican 50 unidades?

En primer lugar, se encuentra el costo total c. Como $c = q\bar{c}$, entonces

$$\begin{aligned} c &= q\bar{c} \\ &= q\left[0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right]. \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000. \end{aligned}$$

Diferenciando c se obtiene la función de costo marginal:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dq} &= 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0 \\ &= 0.0003q^2 - 0.04q + 5. \end{aligned}$$

El costo marginal cuando se fabrican 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75.$$

Si c está en dólares y se aumenta la producción en una unidad de $q = 50$ a $q = 51$, entonces el costo de la unidad adicional es aproximadamente \$3.75. Si se aumenta la producción en un tercio de unidad a partir de $q = 50$, entonces el costo de la producción adicional es aproximadamente $(\frac{1}{3})(3.75) = \$1.25$.

Supongáse que $r = f(q)$ es la **función del ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor total en unidades monetarias que se recibe por la venta de q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la tasa de variación del valor total que se recibe con respecto al número total de unidades que se vende. Por consiguiente, el ingreso marginal es simplemente la derivada de r con respecto a q.

$$\textbf{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

Los ingresos marginales señalan la tasa a la cual varían los ingresos con respecto a las unidades que se venden. Se le interpreta como los ingresos aproximados que se reciben por la venta de una unidad adicional de producción.

EJEMPLO 7

Supóngase que un fabricante vende un producto en \$2 (dólares) por unidad. Si se venden q unidades, los ingresos totales están dados por

$$r = 2q.$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2,$$

que es una función constante. Consecuentemente, los ingresos marginales valen 2 sin importar el número de unidades que se vendan. Esto es lo que se esperaría debido a que el fabricante recibe \$2 por cada unidad que vende.

Para la función de ingreso total del Ejemplo 6, $r = f(q) = 2q$,

$$\frac{dr}{dq} = 2.$$

Esto significa que los ingresos cambian a razón de \$2 por unidad sin importar el número de unidades que se vendan. Aunque esta información es valiosa, puede resultar más importante cuando se le compara con r. Por ejemplo, si $q = 50$, entonces $r = 2(50) = \$100$. Así la tasa de variación de los ingresos es $2/100 = 0.02$ **de** r. Por otro lado, si $q = 5000$, entonces $r = 2(5000) = \$10{,}000$, de modo que, la tasa de variación de r es $2/10{,}000 = 0.0002$ **de** r. Aunque r varía a la misma tasa a cualquier nivel, cuando se le compara

con r esta misma tasa es relativamente inferior cuando $r = 10{,}000$ que cuando $r = 100$. Considerando el cociente.

$$\frac{dr/dq}{r},$$

se tiene una forma para comparar la tasa de variación de r consigo misma. A este cociente se le denomina la *tasa de variación relativa* de r. Ya se mostró antes que la tasa relativa cuando $q = 50$ es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02,$$

y cuando $q = 5000$, es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10{,}000} = 0.0002.$$

Multiplicando por 100 estas tasas relativas se obtiene lo que se denomina tasas de variación porcentuales. La tasa porcentual de variación cuando $q = 50$ es $(0.02)(100) = 2\%$; cuando $q = 5000$ es $(0.0002)(100) = 0.02\%$. En consecuencia, por ejemplo, si se vende una unidad adicional por encima de 50, entonces los ingresos aumentan en aproximadamente 2%.

En general, para cualquier función f se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN

***La tasa relativa de variación** de $f(x)$ es*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

***La tasa porcentual de variación** de $f(x)$ es*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

EJEMPLO 8

Determinar las tasas relativa y porcentual de variación de $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$ cuando $x = 5$.

$$f'(x) = 6x - 5.$$

Puesto que $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$ y $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$, la tasa relativa de variación de y cuando $x = 5$ es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333.$$

Multiplicando 0.333 por 100 se obtiene la tasa porcentual de cambio: $(0.333)(100) = 33.3\%$.

EJERCICIOS 11.3

En cada uno de los Problemas **1-6**, *se presenta una ecuación de movimiento. Para el valor dado de t, halle (a) la posición y (b) la velocidad. Supóngase que t está en segundos y s en metros.*

1. $s = t^2 - 3t; \quad t = 4.$

2. $s = \frac{1}{2}t + 1; \quad t = 2.$

3. $s = 2t^3 + 6; \quad t = 1.$

4. $s = -3t^2 + 2t + 1; \quad t = 1.$

5. $s = t^4 - 2t^3 + t; \quad t = 2.$

6. $s = t^4 - t^{5/2}; \quad t = 0.$

7. Algunos sociólogos estudiaron la relación entre los ingresos y el número de años de educación para los miembros de un grupo urbano específico. Descubrieron que se puede esperar que una persona con x años de educación antes de buscar empleo constante reciba un ingreso anual promedio de y dólares por año, en donde

$$y = 4x^{5/2} + 4900, \qquad 4 \le x \le 16.$$

Halle la tasa de cambio de los ingresos con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

8. Obtenga la tasa de cambio del área A de un círculo con respecto a su radio r si $A = \pi r^2$. Evalúela cuando $r = 3$ pulgadas.

9. La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del ambiente, está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20),$$

en donde T y T_e están en grados Celsius*. Determine la tasa de cambio de t con respecto a T_e.

10. El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, en donde r es el radio. Halle la tasa de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.5 \times 10^{-4}$ cm.

En los Problemas **11-16**, *se presentan funciones de costo en las que c es el costo de fabricar q unidades de un producto. En cada caso, halle la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal al valor o valores dados de q?*

11. $c = 500 + 10q; \quad q = 100.$

12. $c = 5000 + 6q; \quad q = 36.$

13. $c = 0.3q^2 + 2q + 850; \quad q = 3.$

14. $c = 0.1q^2 + 3q + 2; \quad q = 3.$

15. $c = q^2 + 50q + 1000; \quad q = 15, q = 16, q = 17.$

16. $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700; \quad q = 10, q = 20, q = 100.$

En los Problemas **17-20**, $\bar{c}$ *representa el costo promedio por unidad, que es función del número q de unidades fabricadas. Obtenga la función de costo marginal y el costo marginal para los valores señalados de q.*

17. $\bar{c} = 0.01q + 5 + \dfrac{500}{q}; \quad q = 50, q = 100.$

18. $\bar{c} = 2 + \dfrac{1000}{q}; \quad q = 25, q = 235.$

19. $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \dfrac{20{,}000}{q}; \quad q = 100, q = 500.$

20. $\bar{c} = 0.001q^2 - 0.3q + 40 + \dfrac{7000}{q}; \quad q = 10, q = 20.$

En los Problemas **21-24**, *r representa los ingresos totales y es función del número de unidades vendidas, q. Determine la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores que se señalan de q.*

21. $r = 0.7q; \quad q = 8, q = 100, q = 200.$

22. $r = q(15 - \frac{1}{30}q); \quad q = 5, q = 15, q = 150.$

23. $r = 250q + 45q^2 - q^3; \quad q = 5, q = 10, q = 25.$

24. $r = 2q(30 - 0.1q); \quad q = 10, q = 20.$

* R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

25. Dean† estimó la función de costo total para una fábrica de calcetas y calcetines de la siguiente manera:

$$c = -10{,}484.69 + 6.750q - 0.000328q^2,$$

en donde q es la producción en docenas de pares y c son los costos totales en dólares. Halle la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 5000$.

26. La función de costo total para una planta de energía y luz eléctrica, fue estimada por Nordin:‡

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3, \qquad 20 \le q \le 90,$$

en donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total del combustible en dólares. Halle la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

27. Supóngase que las cien ciudades de mayor tamaño de Estados Unidos, en 1920, se jerarquizan de acuerdo con su magnitud (áreas). De Lotka,§ se verifica aproximadamente la siguiente relación:

$$PR^{0.93} = 5{,}000{,}000,$$

en donde P es la población de la ciudad que tiene el rango respectivo R. A esta relación se le denomina *ley de la concentración urbana* para 1920. Resuélvala despejando P en términos de R y después obtenga la rapidez con la que cambia la población con respecto a su posición de acuerdo al rango.

28. Con el método de depreciación en línea recta, el valor v de cierta máquina después de haber transcurrido t años está dado por $v = 50{,}000 - 5000t$, en donde $0 \le t \le 10$. ¿Cuán rápido cambia v con respecto a t cuando $t = 2$? ¿Cuando $t = 3$? ¿En cualquier momento?

29. En Nueva Escocia se hizo un estudio (adaptado de Embree*) de la polilla de invierno. La preninfa de la polilla cae al piso, soltándose de los árboles anfitrión. A una distancia de x pies de la base de un árbol anfitrión, la densidad de estas preninfas (número de ellas por pie cuadrado de terreno) fue y, en donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2, \qquad 1 \le x \le 9.$$

a. ¿A qué tasa cambia la densidad de las preninfas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?

b. ¿Para qué valor de x disminuye la densidad de las preninfas a una tasa de 6 de ellas por pie cuadrado y por pie de distancia?

30. Para la función de costo $c = 0.4q^2 + 4q + 5$, determine la tasa de cambio de c con respecto a q cuando $q = 2$. También, ¿qué es $\Delta c/\Delta q$ sobre el intervalo [2, 3]?

En los Problemas **31-36,** *halle (a) la tasa de cambio de y con respecto a x y (b) la tasa relativa de cambio de y. Al valor dado de x evalúe (c) la tasa de cambio de y, (d) la tasa relativa de cambio de y y (e) la tasa porcentual de cambio de y.*

31. $y = f(x) = x + 4; \quad x = 5.$

32. $y = f(x) = 4 - 2x; \quad x = 3.$

33. $y = 3x^2 + 6; \quad x = 2.$

34. $y = 2 - x^2; \quad x = 0.$

35. $y = 8 - x^3; \quad x = 1.$

36. $y = x^2 + 3x - 4; \quad x = -1.$

37. Para la función de costos $c = 0.2q^2 + 1.2q + 4$, ¿con qué rapidez varía c con respecto a q cuando $q = 5$? Determine la tasa porcentual de cambio de c con respecto a q cuando $q = 5$.

38. En un análisis de las aguas contemporáneas de mares poco profundos, Odum** afirma que en esas aguas el total de materia orgánica y (en miligramos por litro) es función de la diversidad de las especies x (en número de especies por millar de individuos). Si $y = 100/x$, ¿a qué tasa varía el total de materia orgánica con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$? ¿Cuál es la tasa porcentual de cambio cuando $x = 10$?

39. Para cierto fabricante los ingresos r que obtiene con la venta de q unidades de un producto están dados por $r = 30q - 0.3q^2$. (a) ¿Con qué intensidad

† J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

‡ J.A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), 231-35.

§ A.J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

* D.G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth at Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

** H.T. Odum, "Biological Circuits and the Marine Systems of Texas", en *Pollution and Marine Biology*, ed. T.A. Olsen y F.J. Burgess (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).

varía r con respecto a q? Cuando $q = 10$ (b) obtenga la tasa relativa de cambio de r, y (c) al porciento más cercano, calcule la tasa porcentual de cambio de r.

40. Repita el Problema 39 para la función de ingresos dada por $r = 20q - 0.1q^2$ y $q = 100$.

41. El peso W de la rama de un árbol está dado por $W = 2t^{0.432}$, en donde t es tiempo. Halle la tasa relativa de cambio de W con respecto a t.

42. Se llevó a cabo un experimento psicológico§ para analizar la reacción humana a descargas o choques eléctricos (estímulos). Los sujetos recibieron choques de diversas intensidades. La respuesta R a un choque de intensidad I (en microamperes) sería el número que indicara la magnitud relativa que se había percibido ante ese choque "normal". A tal choque normal se le asignó una magnitud de 10. Se sometieron a la prueba dos grupos de sujetos en condiciones ligeramente distintas. Las reacciones R_1 y R_2 de los grupos primero y segundo ante un choque de intensidad I estuvieron dadas por

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24}, \qquad 800 \le I \le 3500,$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29}, \qquad 800 \le I \le 3500.$$

a. Para cada grupo, determine la tasa relativa de cambio de la reacción con respecto a la intensidad.

b. ¿Qué diferencias existen entre estos cambios?

c. En general, si $f(x) = C_1x^n$ y $g(x) = C_2x^n$, en donde C_1 y C_2 son constantes, ¿cómo se comparan las tasas relativas de cambio de f y de g?

11.4 Diferenciabilidad y continuidad

En la siguiente sección se utilizará una relación importante entre la diferenciabilidad y la continuidad, es decir

> Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a

Para establecer este resultado se reconsidera en primer lugar el concepto de continuidad.

En la Sección 10.4 se planteó que si

$$\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a), \tag{1}$$

entonces f es continua en a.

Ahora se relacionará la diferenciabilidad con la continuidad. Supóngase que f es diferenciable en a. Entonces, existe $f'(a)$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Considerando el numerador de $f(a + h) - f(a)$ cuando $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} [f(a + h) - f(a)] &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

§ H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

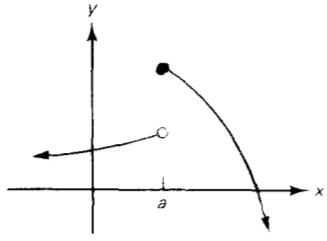


FIGURA 11.11

Consecuentemente, $\lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] = 0$. Esto significa que $f(a + h) - f(a)$ tiende a 0 cuando $h \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a),$$

que es la Ecuación (1). Esto prueba que f es continua en a cuando f es diferenciable en ese punto. En términos más simples, se dice que la **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en ese punto**.

Si una función no es continua en un punto, entonces no puede tener ahí una derivada. Por ejemplo, la función de la Figura 11.11 es discontinua en a. La curva no tiene tangente en ese punto, de manera que la función no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 1

a. Sea $f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$ está definida para todos los valores de x, entonces $f(x) = x^2$ debe ser continua para todos los valores de x.

b. La función $f(p) = \dfrac{1}{2p}$ no es continua en $p = 0$ porque f no está definida ahí. Por ello, no existe derivada en $p = 0$.

Lo inverso del planteamiento de que la diferenciabilidad implique continuidad es *falso*. En el Ejemplo 2 se verá una función que es continua en un punto, pero que no es diferenciable en él.

EJEMPLO 2

La función $y = f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ (véase la Figura 11.12). Como se mencionó en la Sección 11.1 no existe recta tangente en $x = 0$. Así, ahí no existe derivada. Esto muestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

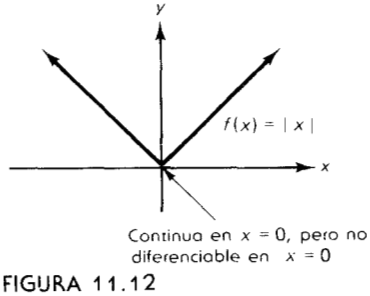


FIGURA 11.12

11.5 Reglas del producto y el cociente

La ecuación $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ expresa a $F(x)$ como producto de dos funciones: $x^2 + 3x$ y $4x + 5$. Para determinar $F'(x)$ utilizando sólo las reglas anteriores, primero se multiplican las funciones, lo cual da $F(x) = 4x^3 + 17x^2 + 15x$. Después, se diferencia término a término:

$$F'(x) = 12x^2 + 34x + 15. \tag{1}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican la diferenciación de un producto de funciones, la multiplicación no es tan simple como la que se presenta aquí. Con frecuencia ni siquiera resulta práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto y esa regla evita ese tipo de multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de sus derivadas, se podría pensar que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de sus derivadas. **No** es éste el caso, como se muestra en la siguiente regla.

Regla 5

REGLA DEL PRODUCTO. *Si f y g son funciones diferenciables, entonces*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Es decir, la derivada del producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

Demostración. Si $F(x) = f(x)g(x)$, entonces por la definición de la derivada de F,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

Ahora se utilizará un "truco". Sumando y restando $f(x + h)g(x)$ en el numerador,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) + [f(x + h)g(x) - f(x + h)g(x)]}{h}$$

Reagrupando,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x)] + [f(x + h)g(x) - f(x)g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h)[g(x + h) - g(x)] + g(x)[f(x + h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h)[g(x + h) - g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x + h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x + h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Como se supuso que f y g son diferenciables, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

y $$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

La diferenciabilidad de f implica que f es continua y, de la Sección 11.4,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

En consecuencia,

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

EJEMPLO 1

Si $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$, hallar $F'(x)$.

Aquí se puede considerar que F es un producto de dos funciones: $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 4x + 5$. Por la Regla 5, la regla del producto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= (x^2 + 3x)\,D_x(4x + 5) + (4x + 5)\,D_x(x^2 + 3x) \\ &= (x^2 + 3x)(4) + (4x + 5)(2x + 3) \\ &= 12x^2 + 34x + 15 \qquad \text{(simplificando).} \end{aligned}$$

Esto concuerda con el resultado anterior [véase la Ecuación (1)].

ADVERTENCIA

Repitiendo: la derivada del producto de dos funciones **no** es el producto de sus derivadas. Por ejemplo, $D_x(x^2 + 3x) = 2x + 3$ y $D_x(4x + 5) = 4$, pero del Ejemplo 1

$$D_x[(x^2 + 3x)(4x + 5)] = 12x^2 + 34x + 15 \neq (2x + 3)4.$$

EJEMPLO 2

a. *Obtener la pendiente de la gráfica de* $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ *cuando* $x = 1$.

Aquí $f(x)$ es el producto de $7x^3 - 5x + 2$ y $2x^4 + 7$. Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x^3 - 5x + 2)D_x(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\,D_x(7x^3 - 5x + 2) \\ &= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5). \end{aligned}$$

Evaluando $f'(x)$ en $x = 1$ resulta la pendiente de la gráfica en ese punto:

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176.$$

Nota: **No es necesario simplificar la derivada antes de evaluarla.**

b. *Si* $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, *determinar* $D_x y$.

$$D_x y = (x^{2/3} + 3)\,D_x(x^{-1/3} + 5x) + (x^{-1/3} + 5x)\,D_x(x^{2/3} + 3)$$

$$= (x^{2/3} + 3)(-\tfrac{1}{3}x^{-4/3} + 5) + (x^{-1/3} + 5x)(\tfrac{2}{3}x^{-1/3})$$
$$= \tfrac{25}{3}x^{2/3} + \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15.$$

c. *Si* $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$, *encontrar* y'.

Agrupando, se puede considerar que y es un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4).$$

La regla del producto da

$$y' = [(x + 2)(x + 3]\, D_x(x + 4) + (x + 4)\, D_x[(x + 2)(x + 3)]$$
$$= [(x + 2)(x + 3)](1) + (x + 4)\, D_x[(x + 2)(x + 3)].$$

Aplicando de nueva cuenta la regla del producto,

$$y' = [(x + 2)(x + 3)(1) + (x + 4)[(x + 2)\, D_x(x + 3) + (x + 3)\, D_x(x + 2)]$$
$$= [(x + 2)(x + 3)](1) + (x + 4)[(x + 2)(1) + (x + 3)(1)].$$

Después de simplificar se obtiene

$$y' = 3x^2 + 18x + 26.$$

Por lo general, no se utiliza la regla del producto cuando se observa claramente que existen formas más simples. Por ejemplo, si $f(x) = 2x(x + 3)$, entonces resulta más sencillo escribir $f(x) = 2x^2 + 6x$, de lo cual $f'(x) = 4x + 6$. De forma similar, normalmente no se utiliza la regla del producto para diferenciar $y = 4(x^2 - 3)$. Como 4 es un multiplicador constante, por la Regla 3 se tiene $y' = 4(2x) = 8x$.

La siguiente regla se utiliza para diferenciar el *cociente* de dos funciones.

Regla 6

REGLA DEL COCIENTE. *Si* f *y* g *son funciones diferenciables y* $g(x) \neq 0$, *entonces*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Es decir, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, y ambos divididos entre el cuadrado del denominador.

Demostración. Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$F(x)g(x) = f(x).$$

Por la regla del producto (Regla 5),

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x).$$

Despejando $F'(x)$ se tiene

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}.$$

Pero $F(x) = f(x)/g(x)$. Por lo tanto,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}.$$

Simplificando resulta*

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

ADVERTENCIA

La derivada del cociente de dos funciones **no** es el cociente de sus derivadas. Por ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}\right) \neq \frac{\dfrac{d}{dx}(4x^2 + 3)}{\dfrac{d}{dx}(2x - 1)}.$$

EJEMPLO 3

a. *Si* $F(x) = \dfrac{4x^2 + 3}{2x - 1}$, *encontrar* $F'(x)$.

Sean $f(x) = 4x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces $F(x) = f(x)/g(x)$ y, por la Regla 6, regla del cociente,

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(2x - 1)\dfrac{d}{dx}(4x^2 + 3) - (4x^2 + 3)\dfrac{d}{dx}(2x - 1)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{(2x - 1)(8x) - (4x^2 + 3)(2)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2(4x^2 - 4x - 3)}{(2x - 1)^2}.$$

b. *Hallar* $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Aunque puede utilizarse la regla del cociente, un método más simple y directo es escribir $1/x^2$ como x^{-2} y después aplicar la regla para diferenciar x^n.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

* Quizá se haya observado que esta demostración supone la existencia de $F'(x)$. Sin embargo, la regla puede demostrarse sin tal hipótesis.

En forma alternativa, aplicando la regla del cociente a este problema queda

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{(x^2)\frac{d}{dx}(1) - (1)\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(0) - 1(2x)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

c. *Determinar una ecuación de la recta tangente a la curva*

$$y = \frac{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)}{1 - x}$$

en (0, 5).

Por la regla del cociente,

$$y' = \frac{(1 - x)\frac{d}{dx}[(x + 1)(x^2 + 2x + 5)] - [(x + 1)(x^2 + 2x + 5)]\frac{d}{dx}(1 - x)}{(1 - x)^2}.$$

Utilizando la regla del producto para evaluar $\frac{d}{dx}[(x + 1)(x^2 + 2x + 5)]$, se tiene que

$$y' = \frac{(1 - x)[(x + 1)(2x + 2) + (x^2 + 2x + 5)(1)] - [(x + 1)(x^2 + 2x + 5)](-1)}{(1 - x)^2}.$$

La pendiente de la curva en (0, 5) es $y'(0) = 12$. Una ecuación de la recta tangente es

$$y - 5 = 12(x - 0),$$

$$y = 12x + 5.$$

EJEMPLO 4

Si la ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1000/(q + 5)$, *hallar la función de ingreso marginal y evaluarla cuando* $q = 45$.

El ingreso r que se obtiene por la venta de q unidades es

ingreso = (precio)(cantidad),

$$r = pq.$$

Por consiguiente, la función de ingreso es

$$r = \left(\frac{1000}{q + 5}\right)q,$$

$$r = \frac{1000q}{q + 5}.$$

La función de ingreso marginal es dr/dq.

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q + 5)\,D_q(1000q) - (1000q)\,D_q(q + 5)}{(q + 5)^2}$$

$$= \frac{(q + 5)(1000) - (1000q)(1)}{(q + 5)^2} = \frac{5000}{(q + 5)^2}.$$

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=45} = \frac{5000}{(45 + 5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2.$$

Esto significa que vender una unidad adicional por encima de 45 da como resultado aproximadamente \$2 más en ingreso.

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo**. La función de consumo $C = f(I)$ expresa una relación entre los ingresos nacionales totales I y el consumo nacional total C. Por lo general, tanto I como C se expresan en millares de millones de unidades monetarias e I está restringida a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la tasa de cambio del consumo con respecto a los ingresos. Es simplemente la derivada de C con respecto a I.

$$\textbf{propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}.$$

Si se supone que la diferencia entre los ingresos I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C.$$

Diferenciando ambos lados con respecto a I da

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}.$$

Se define dS/dI como la **propensión marginal al ahorro**. Consecuentemente, esta magnitud señala la tasa con que los ahorros cambian con respecto a los ingresos.

EJEMPLO 5

Si la función de consumo está dada por

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3} + 3)}{I + 10},$$

determinar la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$.

$$\frac{dC}{dI} = \frac{(I + 10)\dfrac{d}{dI}[5(2I^{3/2} + 3)] - 5(2\sqrt{I^3} + 3)\dfrac{d}{dI}[I + 10]}{(I + 10)^2}$$

$$= \frac{(I + 10)[5(3I^{1/2})] - 5(2\sqrt{I^3} + 3)[1]}{(I + 10)^2}.$$

Cuando $I = 100$ la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = \frac{6485}{12{,}100} \approx 0.536.$$

La propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$ es $1 - 0.536 = 0.464$. Esto significa que si los ingresos actuales de \$100,000 millones aumentan en un millar de millones

de unidades monetarias, la nación consumiría aproximadamente 53.6%(536/1000) y ahorraría 46.4%(464/1000) de ese aumento.

EJERCICIOS 11.5

En los Problemas **1-42,** *diferencie las funciones.*

1. $f(x) = (4x + 1)(6x + 3)$.

2. $f(x) = (3x - 1)(7x + 2)$.

3. $s(t) = (8 - 7t)(t^2 - 2)$.

4. $Q(x) = (5 - 2x)(x^2 + 1)$.

5. $f(r) = (3r^2 - 4)(r^2 - 5r + 1)$.

6. $C(I) = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$.

7. $y = (x^2 + 3x - 2)(2x^2 - x - 3)$.

8. $y = (2 - 3x + 4x^2)(1 + 2x - 3x^2)$.

9. $f(w) = (8w^2 + 2w - 3)(5w^3 + 2)$.

10. $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$.

11. $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - (x + 4)(4x^2 + 2x + 1)$.

12. $h(x) = 4(x^5 - 3)(2x^3 + 4) + 3(8x^2 - 5)(3x + 2)$.

13. $f(p) = \frac{3}{2}(\sqrt{p} - 4)(4p - 5)$.

14. $g(x) = (\sqrt{x} - 3x + 1)(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x})$.

15. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$.

16. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

17. $y = (2x - 1)(3x + 4)(x + 7)$.

18. $y = \dfrac{2x - 3}{4x + 1}$.

19. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

20. $f(x) = \dfrac{-2x}{1 - x}$.

21. $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

22. $h(w) = \dfrac{3w^2 + 5w - 1}{w - 3}$.

23. $h(z) = \dfrac{5 - 2z}{z^2 - 4}$.

24. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1}$.

25. $y = \dfrac{8x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x}$.

26. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

27. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$.

28. $F(z) = \dfrac{z^4 + 4}{3z}$.

29. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100} + 1}$.

30. $y = \dfrac{3}{7x^3}$.

31. $u(v) = \dfrac{v^5 - 8}{v}$.

32. $y = \dfrac{x - 5}{2\sqrt{x}}$.

33. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$

34. $y = \dfrac{x^{6.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$.

35. $y = 7 - \dfrac{4}{x - 8} + \dfrac{2x}{3x + 1}$.

36. $q(x) = 13x^2 + \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{4}{x}$.

37. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$.

38. $y = \dfrac{(2s - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$.

39. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$.

40. $f(s) = \dfrac{17}{s(5s^2 - 10s + 4)}$.

41. $y = 3x - \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-1}}{x-2}$.

42. $y = 7 - 10x^2 + \dfrac{1 - \dfrac{7}{x^2+3}}{x+2}$.

43. Halle la pendiente de la curva $y = (4x^2 + 2x - 5)(x^3 + 7x + 4)$ en $(-1, 12)$.

44. Halle la pendiente de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4+1}$ en $(1, \frac{1}{2})$.

En los Problemas **45-48,** *obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.*

45. $y = \dfrac{6}{x-1}$; $(3, 3)$.

46. $y = \dfrac{4x+5}{x^2}$; $(-1, 1)$.

47. $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]$; $(0, 24)$.

48. $y = \dfrac{x+1}{x^2(x-4)}$; $(2, -\frac{3}{8})$.

En los Problemas **49 y 50,** *determine la tasa relativa de cambio de y con respecto a x para el valor dado de x.*

49. $y = \dfrac{x}{2x-6}$; $x = 1$.

50. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $x = 5$.

En los Problemas **51-54,** *cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, en donde p denota precio por unidad, y q, unidades. Encontrar la función marginal de ingresos en cada caso. Recuérdese que ingresos = pq.*

51. $p = 25 - 0.02q$.

52. $p = 500/q$.

53. $p = \dfrac{108}{q+2} - 3$.

54. $p = \dfrac{q+750}{q+50}$.

55. Para Estados Unidos (en 1922-1942) la función de consumo se estimó mediante*

$$C = 0.672I + 113.1.$$

Halle la propensión marginal al consumo.

56. Repita el Problema 55 si $C = 0.712I + 95.05$ para Estados Unidos, en 1929-1941.*

En los Problemas **57-60,** *cada ecuación representa una función de consumo. Obtenga la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro para el valor dado de I.*

57. $C = 2 + 2\sqrt{I}$; $I = 9$.

58. $C = 6 + \dfrac{3I}{4} - \dfrac{\sqrt{I}}{3}$; $I = 25$.

59. $C = \dfrac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}$; $I = 36$.

60. $C = \dfrac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}$; $I = 100$.

61. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{q+3} + 5000,$$

determine la función de costo marginal.

62. En un análisis de las prestaciones de seguridad social, Felstein† diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1+x) - b(2+n)x}{a(2+n)(1+x) - b(2+n)x},$$

en donde a, b y n son constantes. Determina que

$$f'(x) = \frac{-(1+n)ab}{[a(1+x) - bx]^2(2+n)}.$$

Verifique lo anterior. (*Sugerencia:* Por conveniencia, sea $2 + n = c$.)

63. Para una relación específica entre anfitrión y parásito, se determinó que cuando la densidad de los anfitriones (números de anfitriones por unidad de área) es x, el número de ellos que están parasitados

† M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, num. 2 (1985), 303-20.

* T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), 105-22.

es y, en donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

¿A qué tasa cambia el número de anfitriones parasitados con respecto a la densidad anfitriónica cuando $x = 2$?

64. La persistencia del sonido en un local después de que la fuente sonora se inactiva se denomina *reverberación* o *reverbero*. El *tiempo de reverberación*, RT de una habitación es el tiempo que se requiere para que el nivel de intensidad del sonido se reduzca en 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la siguiente fórmula para calcular el RT del recinto:‡

$$RT = \frac{0.05V}{A + xV},$$

en donde V es el volumen del local, A es la absorción total del recinto y x es el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, probar que la tasa de cambio de RT con respecto a V es siempre positiva. Si se aumenta en una unidad el volumen total del recinto, ¿el tiempo de reverberación aumenta o disminuye?

65. En un experimento realizado con depredadores y presas[||] se determinó estadísticamente que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual, es la función de la densidad de presas x (el número de ellas por unidad de área), en donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}.$$

Determine la tasa de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

11.6 La regla de la cadena y de la potencia

El siguiente procedimiento, la regla de la cadena, es uno de los más importantes para obtener derivadas. Antes de formularla, se considerará la siguiente situación. Supóngase que

$$y = u^2 \qquad \text{y} \qquad u = 2x + 1.$$

Aquí, y es una función de u y u es función de x. Si se substituye u por $2x + 1$ en la primera ecuación, puede considerarse que y es función de x:

$$y = (2x + 1)^2.$$

Después de desarrollar, puede hallarse dy/dx en la forma común.

$$y = 4x^2 + 4x + 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4.$$

En este ejemplo se puede ver que evaluar dy/dx llevando a cabo primero una sustitución puede ser muy laborioso, en especial si se tuviera $y = u^{100}$ en vez de tener $y = u^2$. Por fortuna, la regla de la cadena permite manejar con facilidad este tipo de situaciones.

Regla 7

REGLA DE LA CADENA. *Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x y entonces*

‡ L.L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).

|| C.S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7, 385-98.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Enseguida se observa por qué es razonable la regla de la cadena. Supóngase $y = 8u + 5$ y $u = 2x - 3$. Si x varía en una unidad, ¿cómo cambia u? Respuesta: $du/dx = 2$. Pero, para *cada* cambio unitario en u, existe un cambio en y de $dy/du = 8$. Por lo tanto, ¿cuál es el cambio en y si x varía en una unidad, es decir, cuánto vale dy/dx? Respuesta: $8 \cdot 2$, que es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Por ello, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

EJEMPLO 1

a. *Si* $y = 2u^2 - 3u - 2$ *y* $u = x^2 + 4$, *determinar* dy/dx.

Por la Regla 7, regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$
$$= (4u - 3)(2x).$$

Se puede escribir la respuesta en términos sólo de x reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x.$$

b. *Si* $y = \sqrt{w}$ *y* $w = 7 - t^3$, *encontrar* dy/dt.

Aquí y es función de w y w es función de t. Así puede considerarse que y es función de t. Por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w}) \cdot \frac{d}{dt}(7 - t^3)$$
$$= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)$$
$$= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7 - t^3}}.$$

c. *Si* $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ *y* $u = 4/(3x - 5)$, *hallar* dy/dx *cuando* $x = 1$.

Por la citada regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3 + 10u^2 - 3u - 7) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x - 5}\right)$$
$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{(3x - 5)\,D_x(4) - 4\,D_x(3x - 5)}{(3x - 5)^2}$$
$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{-12}{(3x - 5)^2}.$$

Aun cuando dy/dx está en términos de x y u, se puede evaluar cuando $x = 1$ si se determina el valor correspondiente de u. Cuando $x = 1$, entonces $u = \dfrac{4}{3(1) - 5} = -2$. En consecuencia,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = [12(-2)^2 + 20(-2) - 3] \cdot \frac{-12}{[3(1) - 5]^2}$$
$$= 5 \cdot (-3) = -15.$$

La regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una función compuesta porque

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Por consiguiente, y, como función de x es $f \circ g$. Esto significa que se puede utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando se sabe que la función es compuesta. Sin embargo, primero debe descomponerse la función en sus partes.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$$

se considera que la función es una función compuesta. Sean

$$y = f(u) = u^{100} \qquad \text{y} \qquad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6.$$

Entonces, $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = f(g(x))$. Ahora que se tienen las partes de la composición, se diferencia. Puesto que $y = u^{100}$ y $u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (100u^{99})(3x^2 - 2x)$$
$$= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x).$$

Se acaba de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$, que es la potencia de una *función* de x, y no simplemente una potencia de x. La siguiente regla, a la que se denomina *regla de la potencia*, generaliza este resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Regla 8

REGLA DE LA POTENCIA. *Si u es una función diferenciable de x y n es cualquier número real, entonces*

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Demostración. Sea $y = u^n$. Dado que y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Pero $dy/du = nu^{n-1}$. Consecuentemente

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx},$$

que es la regla de la potencia.

Otra forma de escribir la citada regla es

$$\frac{d}{dx}([u(x)]^n) = n[u(x)]^{n-1}\,u'(x).$$

EJEMPLO 2

a. *Si* $y = (x^3 - 1)^7$, *encontrar* y'.

Debido a que y es potencia de una *función* de x, se aplica la regla de la potencia. Haciendo $u(x) = x^3 - 1$ y $n = 7$,

$$\begin{aligned} y' &= n[u(x)]^{n-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6. \end{aligned}$$

b. *Si* $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, *hallar* dy/dx *cuando* $x = -2$.

Como $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$ se utiliza la regla de la potencia con $u = 4x^2 + 3x - 2$ y $n = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\,D_x(4x^2 + 3x - 2) \\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3) \\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}. \end{aligned}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}.$$

c. *Si* $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, *obtener* $\dfrac{dy}{dx}$.

Aunque puede utilizarse aquí la regla del cociente, se considerará al lado derecho como la potencia $(x^2 - 2)^{-1}$ y se utiliza la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}\\ &= (-1)(x^2 - 2)^{-1-1}D_x(x^2 - 2)\\ &= (-1)(x^2 - 2)^{-2}(2x)\\ &= -\frac{2x}{(x^2 - 2)^2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

a. *Si* $z = \left(\dfrac{2s + 5}{s^2 + 1}\right)^4$, *determinar* $\dfrac{dz}{ds}$.

Como z es una potencia de una función, se utiliza en primer lugar la regla de la potencia.

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s + 5}{s^2 + 1}\right)^{4-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s + 5}{s^2 + 1}\right).$$

Por la regla del cociente,

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s + 5}{s^2 + 1}\right)^3\frac{(s^2 + 1)(2) - (2s + 5)(2s)}{(s^2 + 1)^2}.$$

Simplificando, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4 \cdot \frac{(2s + 5)^3}{(s^2 + 1)^3} \cdot \frac{(-2s^2 - 10s + 2)}{(s^2 + 1)^2}\\ &= \frac{-8(s^2 + 5s - 1)(2s + 5)^3}{(s^2 + 1)^5}.\end{aligned}$$

b. *Si* $y = (x^2 - 4)^5(3x + 5)^4$, *encontrar* y'.

Puesto que y es un producto, se aplica en primer lugar la regla del producto.

$$y' = (x^2 - 4)^5\frac{d}{dx}[(3x + 5)^4] + (3x + 5)^4\frac{d}{dx}[(x^2 - 4)^5].$$

Ahora se puede utilizar la regla de la potencia:

$$y' = (x^2 - 4)^5[4(3x + 5)^3(3)] + (3x + 5)^4[5(x^2 - 4)^4(2x)].$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}y' &= 12(x^2 - 4)^5(3x + 5)^3 + 10x(3x + 5)^4(x^2 - 4)^4\\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3[6(x^2 - 4) + 5x(3x + 5)] \quad \text{[por factorización]}\\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3(21x^2 + 25x - 24).\end{aligned}$$

Por lo general, se debe utilizar la regla de la potencia para diferenciar $y = [u(x)]^n$. Aunque una función como $y = (x^2 + 2)^2$ puede escribirse como $y = x^4 + 4x^2 + 4$

y se le puede diferenciar con facilidad, este método resulta impráctico para una función como $y = (x^2 + 2)^{1000}$. Ya que $y = (x^2 + 2)^{1000}$ es de la forma $y = [u(x)]^n$, se tiene

$$y' = 1000(x^2 + 2)^{999}(2x).$$

Ahora, se utilizará lo que ya se ha analizado del Cálculo para desarrollar un concepto que es importante en estudios económicos. Supóngase que un fabricante contrata a m trabajadores que fabrican un total de q unidades de un producto al día. Se puede considerar a q como una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe por la venta de esas unidades, entonces también puede considerarse que r es función de m. Por ello, hay que analizar dr/dm, que es la tasa de variación del ingreso con respecto al número de empleados. A la derivada dr/dm se le denomina **producto de ingreso marginal.** es aproximadamente el cambio que resulta en los ingresos cuando un fabricante contrata un empleado adicional.

EJEMPLO 4

Un fabricante determina que n trabajadores fabricarían un total de q unidades de un producto al día, en donde $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 19}$. *Si la ecuación de demanda para el producto es* $p = 900/(q + 9)$, *determinar el producto de ingreso marginal cuando* $n = 9$.

Se debe evaluar dr/dm, en donde r son ingresos. Obsérvese que, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}.$$

La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left(\frac{900}{q + 9}\right)q = \frac{900q}{q + 9},$$

por lo que, mediante la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q + 9)(900) - 900q(1)}{(q + 9)^2} = \frac{8100}{(q + 9)^2}.$$

Con objeto de evaluar lo anterior cuando $m = 9$, se utiliza en primer lugar la ecuación dada $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 19}$ para obtener el correspondiente valor de q.

$$q = \frac{10(9^2)}{\sqrt{9^2 + 19}} = 81.$$

Por lo que

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9} = \left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81} = \frac{8100}{(81 + 9)^2} = 1.$$

Ahora, de las reglas del cociente y la potencia,

$$\frac{dq}{dm} = \frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}\right)$$

$$= \frac{(m^2 + 19)^{1/2}\frac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2)\frac{d}{dm}[(m^2 + 19)^{1/2}]}{[(m^2 + 19)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{(m^2 + 19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2 + 19)^{-1/2}(2m)]}{m^2 + 19},$$

por lo que

$$\left.\frac{dq}{dm}\right|_{m=9} = \frac{(81 + 19)^{1/2}(20\cdot 9) - (10\cdot 81)[\frac{1}{2}(81 + 19)^{-1/2}(2\cdot 9)]}{81 + 19}$$

$$= 10.71.$$

Por tanto, de la regla de la cadena,

$$\left.\frac{dr}{dm}\right|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71.$$

Esto significa que si se contrata a un décimo empleado, el ingreso aumentaría aproximadamente en 10.71 (unidades monetarias) por día.

EJERCICIOS 11.6

En los Problemas **1-8**, *utilice la regla de la cadena.*

1. Si $y = u^2 - 2u$ y $u = x^2 - x$, halle dy/dx.

2. Si $y = 2u^3 - 8u$ y $u = 7x - x^3$, obtenga dy/dx.

3. Si $y = \dfrac{1}{w^2}$ y $w = 2 - x$, determine dy/dx.

4. Si $y = \sqrt[3]{z}$ y $z = x^6 - x^2 + 1$, calcule dy/dx.

5. Si $w = u^2$ y $u = \dfrac{t + 1}{t - 1}$, halle dw/dt cuando $t = 3$.

6. Si $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$ y $u = 2s^2 - 1$, obtenga dz/ds cuando $s = -1$.

7. Si $y = 3w^2 - 8w + 4$ y $w = 3x^2 + 1$, determine dy/dx cuando $x = 0$.

8. Si $y = 3u^3 - u^2 + 7u - 2$ y $u = 3x - 2$, calcule dy/dx cuando $x = 1$.

En los Problemas **9-44**, *evalúe* y'.

9. $y = (3x + 2)^6$.

10. $y = (5 - x^2)^3$.

11. $y = 3(x^3 - 8x^2 + x)^{100}$.

12. $y = \dfrac{(2x^2 + 1)^4}{2}$.

13. $y = (x^2 - 2)^{-3}$.

14. $y = (7x - x^4)^{-3/2}$.

15. $y = \sqrt{5x^2 - x}$.

16. $y = \sqrt{3x^2 - 7}$.

17. $y = 2\sqrt[5]{(x^3 + 1)^2}$.

18. $y = 3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$.

19. $y = \dfrac{6}{2x^2 - x + 1}$.

20. $y = \dfrac{2}{x^4 + 2}$.

21. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$.

22. $y = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$.

23. $y = \dfrac{2}{\sqrt{8x - 1}}$.

24. $y = \dfrac{1}{(3x^2 - x)^{2/3}}$.

25. $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7}x$.

26. $y = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

27. $y = x^2(x - 4)^5$.

28. $y = x\sqrt{1 - x}$.

29. $y = 2x\sqrt{6x - 1}$.

30. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.

31. $y = (8x - 1)^3(2x + 1)^4$.

32. $y = (6x + 1)^7(2x - 3)^3$.

33. $y = \left(\dfrac{x - 7}{x + 4}\right)^{10}$.

34. $y = \left(\dfrac{2x}{x + 2}\right)^4$.

35. $y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 3}}$.

36. $y = \sqrt[3]{\dfrac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$.

37. $y = \dfrac{2x - 5}{(x^2 + 4)^3}$.

38. $y = \dfrac{(2x + 3)^3}{x^2 + 4}$.

39. $y = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5}$.

40. $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)^3}$.

41. $y = 8t + \dfrac{t - 1}{t + 4} - \left(\dfrac{8t - 7}{4}\right)^2$

42. $y = 6 + 3x - 4x(7x + 1)^2$.

43. $y = \dfrac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3}$.

44. $y = \dfrac{(4x^2 - 2)(8x - 1)}{(3x - 1)^2}$.

En los Problemas **45** *y* **46**, *utilice la regla del cociente y la regla de la potencia para obtener y'. No simplifique la respuesta.*

45. $y = \dfrac{(2x + 1)(3x - 5)^2}{(x^2 - 7)^4}$.

46. $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}\,(4x^2 - 1)^2}{9x - 3}$.

47. Si $y = (5u + 6)^3$ y $u = (x^2 + 1)^4$, determine dy/dx cuando $x = 0$.

48. Si $z = 2y^2 - 4y + 5$, $y = 6x - 5$ y $x = 2t$, halle dz/dt cuando $t = 1$.

49. Obtenga la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto (8, 0).

50. Evaluar la pendiente de la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en el punto (8, 3).

En los Problemas **51-54**, *halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.*

51. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}$; (3, 1).

52. $y = (2x + 3)^2$; (−2, 1).

53. $y = \dfrac{\sqrt{7x + 2}}{x + 1}$; $(1, \frac{3}{2})$.

54. $y = \dfrac{-3}{(3x^2 + 1)^3}$; (0, −3).

En los Problemas **55** *y* **56**, *determine la razón de cambio porcentual de y con respecto a x para el valor dado de x.*

55. $y = (x^2 + 9)^3$; $x = 4$.

56. $y = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$; $x = -3$.

En los Problemas* 57-60**, *q es el número total de unidades que fabrican al día m obreros de una fábrica y p es el precio por unidad al que se venden las q unidades. En cada caso, halle el producto de ingreso marginal para el valor dado de m.

57. $q = 2m$, $p = -0.5q + 20$; $m = 5$.

58. $q = (200m - m^2)/20$, $p = -0.1q + 70$; $m = 40$.

59. $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 9}$, $p = 525/(q + 3)$; $m = 4$.

60. $q = 100m/\sqrt{m^2 + 19}$, $p = 4500/(q + 10)$; $m = 9$.

61. Supóngase que $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante. (a) obtenga la tasa de cambio de p con respecto a q. (b) Determine la tasa de cambio relativa de p con respecto a q. (c) Halle la función de ingreso marginal.

62. Si $p = k/q$, en donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante, y $q = f(m)$ define una función que da el número total de unidades que fabrican cada día m obreros, demuestre que el producto de ingreso marginal es siempre cero.

63. El costo c de fabricar q unidades de un producto está dado por $c = 4000 + 10q + 0.1q^2$. Si el precio p por unidad está dado por la ecuación $q = 800 - 2.5p$, utilice la regla de la cadena para encontrar la tasa de cambio del costo con respecto al precio por unidad cuando $p = 80$.

64. Una agencia gubernamental de salud examina los registros de un grupo de personas que estuvieron hospitalizadas con una enfermedad particular. Se descubrió que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización es $f(t)$, en donde

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Halle $f'(300)$ e interprete la respuesta.

65. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000,$$

obtenga la función de costo marginal.

66. Para cierta población si E es el número de años de educación de una persona y S representa un valor numérico de la posición social de la persona con base en ese nivel educativo, entonces $S = 4\left(\frac{E}{4} + 1\right)^2$.

(a) ¿Con qué rapidez cambia la posición social con respecto a la educación cuando $E = 16$? (b) ¿A qué nivel de educación la tasa de cambio de posición social es igual a 8?

67. El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, en donde r es el radio. A los t segundos, el radio r (en centímetros) está dado por $r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$. Utilice la regla de la cadena para determinar dV/dt cuando $t = 10$.

68. En ciertas condiciones, la presión p que desarrollan rayos ultrasónicos en el tejido corporal está dada por una función de la intensidad I:*

$$p = (2\rho VI)^{1/2},$$

en donde ρ (la letra griega ro) es densidad y V es la velocidad de propagación. Aquí, ρ y V son constantes. (a) Calcule la tasa de cambio de p con respecto a I. (b) Evalúe la tasa de cambio relativa.

69. Supóngase que para cierto grupo de 20 000 nacimientos el número l_x de personas que sobreviven a la edad de x años es

$$l_x = 2000\sqrt{100 - x}, \qquad 0 \le x \le 100.$$

(a) Halle la tasa de cambio de l_x con respecto a x y evalúe la respuesta para $x = 36$. (b) Obtenga la tasa de cambio relativa de l_x cuando $x = 36$.

70. Un músculo tiene la capacidad de encogerse cuando se le impone una carga, tal como un peso. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se denomina "ecuación fundamental de la contracción muscular".* Aquí, P es la carga que se impone al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares; a, b y k son constantes positivas. Exprese v como función de P. Utilice el resultado para encontrar dv/dP.

11.7 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 11.1 recta secante recta tangente pendiente de una curva derivada

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \qquad f'(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[f(x)]$$

* R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Sección 11.3 Δx velocidad tasa de variación (o razón de cambio) función de costo total costo marginal costo promedio función de ingreso total ingreso marginal tasa de variación relativa tasa de variación porcentual

Sección 11.5 regla del producto regla del cociente función de consumo propensión marginal al consumo propensión marginal al ahorro

Sección 11.6 regla de la cadena regla de la potencia producto de ingresos marginales

RESUMEN

La recta tangente (o la tangente) a una curva en un punto P es la posición limitante de las rectas secantes PQ conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva. A la pendiente de la tangente en P se le denomina pendiente de la curva en P.

Si $y = f(x)$, la derivada de f respecto a x es la función definida por el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Geométricamente, la derivada da la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Una ecuación de la tangente a un punto específico (x_1, y_1) se obtiene evaluando $f'(x_1)$ que es la pendiente m de la tangente, y sustituyéndola en la forma de punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$. Cualquier función que sea diferenciable en un punto debe ser también continua ahí.

Las reglas básicas para obtener derivadas son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ en donde } c \text{ es una constante.}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \text{ en donde } n \text{ es cualquier número real.}$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ en donde } y \text{ es una función de } u \text{ y } u \text{ es función de } x.$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

También se puede interpretar la derivada dy/dx diciendo que da la tasa (instantánea) de variación a cambio de y con respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

En particular, si $s = f(t)$ es una ecuación de movimiento, en donde s es posición en el tiempo t, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo } t.$$

En Economía se utiliza el término *marginal* para describir las derivadas de tipos específicos de funciones. Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la tasa de variación.

$$\frac{dc}{dq} \text{ se denomina costo marginal.}$$

Se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción. (El costo promedio por unidad, $\bar{c}$, está relacionado con el costo total c mediante $\bar{c} = c/q$ o bien $c = \bar{c}q$.)

Una función de ingreso total $r = f(q)$ da el ingreso r de un fabricante por la venta de q unidades de un producto. (El ingreso r y el precio p están relacionados mediante $r = pq$.) A la tasa de variación.

$$\frac{dr}{dq} \text{ se le denomina ingreso marginal,}$$

y se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene por la venta de una unidad adicional de producción.

Si r es el ingreso que percibe un fabricante cuando se vende la producción total q, elaborada por m obreros, entonces a la derivada dr/dm se la denomina producto de ingreso marginal. El producto de ingreso marginal proporciona el cambio aproximado en los ingresos que se produce cuando el fabricante contrata un trabajador extra.

Si $C = f(I)$ es una función de consumo, en donde I es ingreso nacional y C es consumo nacional, entonces

$$\frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al consumo,}$$

$$1 - \frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al ahorro.}$$

Para cualquier función la tasa de variación relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

que compara la razón de cambio de $f(x)$ con la propia $f(x)$. La tasa de variación porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas **1** *y* **2**, *utilice la definición de derivada para evaluar* $f'(x)$

1. $f(x) = 2 - x^2$.

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

En los Problemas **3-36** *diferencie las funciones dadas.*

3. $y = 6^3$.

4. $y = x$.

5. $y = 7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1$.

6. $y = 4(x^2 + 5) - 7x$.

7. $f(s) = s^2(s^2 + 2)$.

8. $y = \sqrt{x + 3}$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 3}{5}$.

10. $y = \dfrac{1}{x^3}$.

11. $y = (x^2 + 6x)(x^3 - 6x^2 + 4)$.

12. $y = (x^2 + 1)^{100}(x - 6)$.

13. $f(x) = (2x^2 + 4x)^{100}$.

14. $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$.

15. $y = \dfrac{1}{2x + 1}$.

16. $y = \dfrac{x^4 + 4x^2}{2x}$.

17. $y = (8 + 2x)(x^2 + 1)^4$.

18. $g(z) = (2z)^{3.5} + 5$.

19. $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$.

20. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)^2}$.

21. $y = \sqrt[3]{4x - 1}$.

22. $h(t) = (1 + 2^2)^0$.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

24. $y = \dfrac{x(x + 1)}{2x^2 + 3}$.

25. $h(x) = (x - 6)^4(x + 5)^3$.

26. $y = \dfrac{(x + 3)^5}{x}$.

27. $y = \dfrac{5x - 4}{x + 1}$.

28. $f(x) = 5x\sqrt{1 - 2x}$.

29. $y = 2x^{3.8} + (2x)^{3.8}$.

30. $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{x}}$.

31. $y = \dfrac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

32. $y = \sqrt[3]{(1 - 3x^2)^2}$.

33. $y = (x^3 + 6x^2 + 9)^{3/5}$.

34. $y = 0.5x(x + 1)^{-2} + 0.3$.

35. $g(z) = \dfrac{-7z}{(z - 1)^{-1}}$.

36. $g(z) = \dfrac{-3}{4(z^5 + 2z - 5)^4}$.

En los Problemas **37-40**, *obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.*

37. $y = x^2 - 6x + 4$, $x = 1$.

38. $y = -2x^3 + 6x + 1$, $x = 2$.

39. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$.

40. $y = \dfrac{x}{1 - x}$, $x = 3$.

41. Si $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$, obtenga las tasas de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

42. Si $f(x) = x/(x + 4)$, determine las tasas de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

43. Si $r = q(20 - 0.1q)$ es una función de ingreso total, halle la función de ingreso marginal.

44. Si $c = 0.0001q^3 - 0.20q^2 + 3q + 6000$ es una función de costo total, halle el costo marginal cuando $q = 100$.

45. Si $C = 7 + 0.6I - 0.25\sqrt{I}$ es una función de consumo, obtenga la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro cuando $I = 16$.

46. Si $p = (q + 14)/(q + 4)$ es una ecuación de demanda, determine la tasa de cambio del precio p con respecto a la cantidad q.

47. Si $p = -0.5q + 450$ es una ecuación de demanda, halle la función de ingreso marginal.

48. Si $c = 0.03q + 1.2 + (3/q)$ es una funciór de costo promedio, evaluar el costo marginal cuando $q = 100$.

49. La función de costo total para una planta de energía eléctrica se estima mediante*

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2, \quad 20 \leq q \leq 90$$

en donde q es la producción total de 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total de combustible en dólares. Obtenga la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

50. Un fabricante decidió que m trabajadores fabricarían un total de q unidades de un producto por día, en donde $q = m(50 - m)$. Si la función de demanda está dada por $p = -0.01q + 9$, determine el producto de ingreso marginal cuando $m = 10$.

51. En un estudio de la polilla de invierno en Nueva Escocia,† se determinó que el número medio de huevecillos, y, en una polilla hembra, era función del

* J.A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econométrica*, 15 (1947), 231-35.

† D.G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Month in Nova Scotia, 1954-1962," *Memoirs of the Entomological Society of Canadá*, No. 46 (1965).

ancho del abdomen de la hembra (en milímetros), en donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34.$$

y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿Con qué tasa varía el número de huevecillos con respecto a la anchura abdominal cuando $x = 2$?

52. Para una relación específica entre anfitrión y parásito, se encontró que cuando la densidad anfitriónica (número de anfitriones por unidad de área) es x, entonces el número de anfitriones con parásitos es y, en donde

$$y = 10\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right), \qquad x \geq 0.$$

¿Para qué valor de x se tiene que dy/dx es igual a $\frac{1}{5}$?

53. Se tiene un cultivo de bacterias. El tiempo t (en horas) que se requiere para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación) es función de la temperatura T (en grados centígrados) del cultivo y está dada por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{1}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39. \end{cases}$$

Encontrar dt/dT cuando (a) $T = 38$ y (b) $T = 35$.

CAPÍTULO **12**

Temas adicionales sobre diferenciación

12.1 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección se obtendrán las derivadas de funciones logarítmicas. Se comienza con la derivada de $\ln x$. Sea $f(x) = \ln x$, en donde x es positiva. Por la definición de derivada,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}.$$

Utilizando la propiedad de los logaritmos de que $\ln m - \ln n = \ln(m/n)$, se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right].$$

Escribiendo $\dfrac{1}{h}$ como $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{h}$ resulta

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] \text{ (puesto que } r\ln m = \ln m^r\text{)}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Puede demostrarse que el límite del logaritmo es el logaritmo del límite ($\lim \ln u = \ln \lim u$), de modo que,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right]. \tag{1}$$

Para evaluar $\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h}$, en primer lugar debe observarse que cuando $h \to 0$, entonces $\frac{h}{x} \to 0$. De manera que, si se reemplaza $\frac{h}{x}$ por k, el límite tiene la forma

$$\lim_{k \to 0} (1 + k)^{1/k}.$$

Como se estableció en la Sección 10.2 este límite es e. En consecuencia, la Ecuación (1) se convierte en

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}(1) = \frac{1}{x}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.} \tag{2}$$

EJEMPLO 1

Diferenciar cada una de las siguientes funciones

a. $f(x) = 5 \ln x$.

Aquí, f es una constante (5) que multiplica a una función ($\ln x$), por lo que, mediante la Ec. 2, se tiene

$$f'(x) = 5 \frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}.$$

b. $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

Por la regla del cociente y la Ecuación (2),

$$y' = \frac{x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x) \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

Ahora se extiende la Ecuación (2) para abarcar una clase más amplia de funciones. Sea $y = \ln u$, en donde u es una función positiva y diferenciable de x. Mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

EJEMPLO 2

Diferenciar cada una de las siguientes funciones.

a. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Esta función tiene la forma $\ln u$ con $u = x^2 + 1$. Utilizando la Ecuación (3) da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}(2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

b. $y = x^2 \ln(4x + 2)$.

Utilizando la regla del producto y después la Ecuación (3) con $u = 4x + 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2\frac{d}{dx}[\ln(4x + 2)] + [\ln(4x + 2)]\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2\left(\frac{1}{4x + 2}\right)(4) + [\ln(4x + 2)](2x) \\ &= \frac{4x^2}{4x + 2} + 2x \ln(4x + 2).\end{aligned}$$

c. $y = \ln(\ln x)$.

Esta expresión tiene la forma $y = \ln u$, en donde $u = \ln x$. Utilizando las ecuaciones (3) y (2), queda

$$y' = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x}.$$

En ocasiones se puede simplificar el trabajo necesario para diferenciar o derivar una función que contiene logaritmos. Se utilizan las propiedades logarítmicas para replantear la función *antes* de realizar la diferenciación, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Diferenciar cada una de las siguientes funciones.

a. $y = \ln(2x + 5)^3$.

En primer lugar, se simplifica el lado derecho utilizando propiedades de los logaritmos.

$$y = \ln(2x + 5)^3 = 3 \ln(2x + 5).$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x + 5}\right)(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

En forma alternativa, si no se aplicara primero la simplificación,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x + 5)^3}\frac{d}{dx}[(2x + 5)^3]$$

$$= \frac{1}{(2x + 5)^3}(3)(2x + 5)^2(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

b. $f(p) = \ln[(p + 1)^2(p + 2)^3(p + 3)^4]$.

Se simplifica el lado derecho y después se diferencia o deriva:

$$f(p) = 2\ln(p + 1) + 3\ln(p + 2) + 4\ln(p + 3).$$

$$f'(p) = 2\left(\frac{1}{p + 1}\right)(1) + 3\left(\frac{1}{p + 2}\right)(1) + 4\left(\frac{1}{p + 3}\right)(1)$$

$$= \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}.$$

c. $f(w) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + w^2}{w^2 - 1}}$.

De nueva cuenta se simplifica el trabajo utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$f(w) = \frac{1}{2}[\ln(1 + w^2) - \ln(w^2 - 1)].$$

$$f'(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + w^2}(2w) - \frac{1}{w^2 - 1}(2w)\right]$$

$$= \frac{w}{1 + w^2} - \frac{w}{w^2 - 1} = -\frac{2w}{w^4 - 1}.$$

d. $f(x) = \ln^3(2x + 1)$.

El exponente 3 señala que es necesario elevar al cubo $\ln(2x + 1)$. Es decir,

$$f(x) = \ln^3(2x + 1) = [\ln(2x + 1)]^3.$$

Por la regla de la potencia,

$$f'(x) = 3[\ln(2x + 1)]^2\frac{d}{dx}[\ln(2x + 1)]$$

$$= 3[\ln(2x + 1)]^2\left[\frac{1}{2x + 1}(2)\right]$$

$$= \frac{6}{2x + 1}[\ln(2x + 1)]^2 = \frac{6}{2x + 1}\ln^2(2x + 1).$$

En los ejemplos siguientes se muestra la manera de diferenciar una función logarítmica con base distinta de e.

EJEMPLO 4

Diferenciar $y = \log_2 x$.

En primer lugar se expresa $\log_2 x$ en términos de un logaritmo natural para que sea posible aplicar alguna de las fórmulas anteriores. A partir de la fórmula de cambio de base $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln 2}.$$

Vale la pena mencionar que es posible escribir la respuesta en términos de la base original. Como

$$\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\left(\dfrac{\log_b b}{\log_b e}\right)} = \frac{\log_b e}{1} = \log_b e,$$

se puede expresar $\dfrac{1}{x \ln 2}$ como $\dfrac{1}{x}\log_2 e$.

EJEMPLO 5

Si $y = \log(2x + 1)$, *hallar la tasa de cambio de* y *con respecto a* x.

La tasa de variación es dy/dx, y la base involucrada es 10.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\log(2x + 1)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x + 1)}{\ln 10}\right]$$

$$= \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{2x + 1}(2) = \frac{2}{(2x + 1)\ln 10}.$$

EJERCICIOS 12.1

En los Problemas **1-36,** *diferencie las funciones. Si es posible, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.*

1. $y = 4 \ln x$.

2. $y = \dfrac{\ln x}{14}$.

3. $y = \ln(3x - 4)$.

4. $y = \ln(5x - 6)$.

5. $y = \ln x^2$.

6. $y = \ln(ax^2 + b)$.

7. $y = \ln(1 - x^2)$.

8. $y = \ln(-x^2 + 6x)$.

9. $f(p) = \ln(2p^3 + 3p)$.

10. $f(r) = \ln(2r^4 - 3r^2 + 2r + 1)$.

11. $f(t) = t \ln t$.

12. $y = x^2 \ln x$.

13. $y = \log_3(2x - 1)$.

14. $f(w) = \log(w^2 + w)$.

15. $f(z) = \dfrac{\ln z}{z}$.

16. $y = \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$.

17. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$.

18. $y = \ln x^{100}$.

19. $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$.

20. $f(s) = \ln\left(\dfrac{s^2}{1 + s^2}\right)$.

21. $f(l) = \ln\left(\dfrac{1 + l}{1 - l}\right)$.

22. $y = \ln\left(\dfrac{2x + 3}{3x - 4}\right)$.

23. $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

24. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 1}}$.

25. $y = \ln[(x^2 + 2)^2(x^3 + x - 1)]$.

26. $y = \ln[(5x + 2)^4(8x - 3)^6]$.

27. $y = (x^2 + 1)\ln(2x + 1)$.

28. $y = (ax + b)\ln(ax)$.

29. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$.

30. $y = x^{\ln 3}$.

31. $y = \ln^4(ax)$.

32. $y = \ln^2(2x + 3)$.

33. $y = x \ln\sqrt{x - 1}$.

34. $y = \ln(x^2\sqrt{3x - 2})$.

35. $y = \sqrt{4 + \ln x}$.

36. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

37. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 - 2x - 2)$ cuando $x = 3$.

38. Halle la pendiente de la curva $y = \dfrac{x}{\ln x}$ cuando $x = 2$.

39. Obtenga la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = 25/\ln(q + 2)$.

40. Una función de costo total está dada por $c = 25 \ln(q + 1) + 12$. Determine el costo marginal cuando $q = 6$.

41. Demuestre que la tasa relativa de variación de $y = f(x)$ con respecto a x es igual a la derivada de $y = \ln f(x)$.

42. Deduzca la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\log_b u) = \dfrac{1}{u}(\log_b e)\dfrac{du}{dx}$.

12.2 Derivadas de funciones exponenciales

Se obtendrá a continuación una fórmula para la derivada de la función exponencial e^u, en donde u es una función diferenciable de x. Haciendo $y = e^u$, en forma logarítmica se tiene $u = \ln y$. Diferenciando ambos lados con respecto a x se obtiene que

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(\ln y),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Despejando dy/dx y reemplazando y por e^u resulta

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{du}{dx} = e^u\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}. \tag{1}$$

ADVERTENCIA

La regla de la potencia no se aplica a e^x. Es decir $\dfrac{d}{dx}(e^x) \neq xe^{x-1}$.

Como caso especial, sea $u = x$. En este caso, $du/dx = 1$ y

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \tag{2}$$

Se debe observar que la función y su derivada son iguales.

EJEMPLO 1

a. Determinar $\frac{d}{dx}(3e^x)$.

Como 3 es un factor constante,

$$\frac{d}{dx}(3e^x) = 3\frac{d}{dx}(e^x) = 3e^x \qquad \text{(por la Ec. (2))}$$

b. *Si* $y = \frac{x}{e^x}$, *halle* y'.

En *primer lugar*, se utiliza la regla del cociente y después la Ecuación (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1) - x(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$$

c. *Si* $y = e^2 + e^x + \ln 3$, *evalúe* y'.

Debido a que e^2 y $\ln 3$ son constantes, $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$.

EJEMPLO 2

a. *Determinar* $\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$.

La función tiene la forma e^u con $u = x^3 + 3x$. De la Ec. (1).

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x}) = e^{x^3+3x}\frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = e^{x^3+3x}(3x^2 + 3) = 3(x^2 + 1)e^{x^3+3x}.$$

b. *Determinar* $\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)]$.

Por la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)] &= e^{x+1}\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] + [\ln(x^2 + 1)]\frac{d}{dx}(e^{x+1}) \\ &= e^{x+1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(2x) + [\ln(x^2 + 1)]\,e^{x+1}(1) \\ &= e^{x+1}\left[\frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)\right].\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

*La **función densidad de la distribución normal** es una importante función que se utiliza en decisiones económicas y de administración:*

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

*en donde σ (la letra griega sigma) y μ (letra griega mu) son constantes. Su gráfica, la que se denomina **curva normal**, tiene forma de campana (Figura 12.1). Determinar la tasa de variación de y con respecto a x cuando $x = \mu$.*

La razón de cambio de y con respecto a x es dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}[e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}]\left[-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

Evaluando dy/dx cuando $x = \mu$, se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\mu} = 0.$$

Geométricamente esto significa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = \mu$ es horizontal (Figura 12.1).

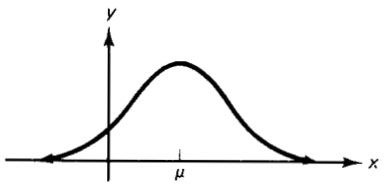


FIGURA 12.1

Para diferenciar una función exponencial a^u con base diferente a e, se utiliza en primer lugar la propiedad $e^{\ln a} = a$ para convertir una función e^u (ésta, por supuesto, es puede ser diferenciada). Se ilustra la técnica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4

Determinar $\dfrac{d}{dx}(4^x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(4^x) &= \frac{d}{dx}[(e^{\ln 4})^x] \\
&= \frac{d}{dx}[e^{(\ln 4)x}] \qquad \left[\text{forma: } \frac{d}{dx}(e^u)\right] \\
&= e^{(\ln 4)x}(\ln 4) \qquad \text{[por la Ec. (1)]} \\
&= 4^x(\ln 4).
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Determinar $\dfrac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}})$.

Aquí se deben diferenciar tres formas distintas; *no* se les debe confundir. La primera de ellas (e^2) es una base constante elevada a un exponente que también es una constante, por lo que es, así, una constante también. Por ello, la derivada es cero. La segunda (x^e) es una base variable elevada a un exponente constante, por lo que se aplica la regla de la potencia. La tercera ($2^{\sqrt{x}}$) es una base constante elevada a un exponente variable, por lo que se debe diferenciar una función exponencial.

$$\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}) = 0 + ex^{e-1} + \frac{d}{dx}[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}]$$

$$= ex^{e-1} + [e^{(\ln 2)\sqrt{x}}](\ln 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= ex^{e-1} + \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}.$$

EJERCICIOS 12.2

En los Problemas **1-28**, *diferencie las funciones que se dan.*

1. $y = 7e^x$.

2. $y = \dfrac{2e^x}{5}$.

3. $y = e^{x^2+1}$.

4. $y = e^{2x^2+5}$.

5. $y = e^{3-5x}$.

6. $f(q) = e^{-q^3+6q-1}$.

7. $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$.

8. $y = e^{9x^2+5x^3-6}$.

9. $y = xe^x$.

10. $y = x^2e^{-x}$.

11. $y = x^2e^{-x^2}$.

12. $y = xe^{2x}$.

13. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

14. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

15. $y = 4^{3x^2}$.

16. $y = 2^x x^2$.

17. $f(w) = \dfrac{e^{2w}}{w^2}$.

18. $y = e^{x-\sqrt{x}}$.

19. $y = e^{1+\sqrt{x}}$.

20. $y = (e^{3x} + 1)^4$.

21. $y = x^3 - 3^x$.

22. $f(z) = e^{1/z}$.

23. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

24. $y = e^{2x}(x + 1)$.

25. $y = e^{\ln x}$.

26. $y = e^{-x} \ln x$.

27. $y = e^{x \ln x}$.

28. $y = \ln e^{4x+1}$.

29. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = e^x$ cuando $x = 2$.

30. *Deduzca la fórmula*

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}.$$

Para cada una de las ecuaciones de demanda de los Problemas **31** *y* **32**, *encontrar la tasa de variación del precio p con respecto a la cantidad q. ¿Cuál es la tasa para el valor que se señala de q?*

31. $p = 15e^{-0.001q}$; $q = 500$.

32. $p = 8e^{-3q/800}$; $q = 400$.

En los Problemas **33-34**, $\bar{c}$ *es el costo promedio de fabricar q unidades de un producto. Halle la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q.*

33. $\bar{c} = \dfrac{7000e^{q/700}}{q}$; $q = 350$, $q = 700$.

34. $\bar{c} = \dfrac{850}{q} + 4000\dfrac{e^{(2q+6)/800}}{q}$; $q = 97$, $q = 197$.

35. Para una empresa la producción diaria q en el t-ésimo día de una corrida de producción está dada por $q = 500(1 - e^{-0.2t})$. Obtenga la tasa de cambio de la producción q con respecto a t en el décimo día.

36. Para la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

determine $f'(0)$.

37. La población P de una ciudad dentro de t años está dada por $P = 20{,}000e^{0.03t}$. Demuestre que $dP/dt = kP$ en donde k es una constante. Esto significa que la tasa de cambio de la población en cualquier momento es proporcional a la población en ese momento.

38. En un análisis de la difusión de un proceso nuevo en un mercado, Hurter y Rubenstein* elaboraron una ecuación de la forma,

$$Y = k\alpha^{\beta^t},$$

en donde Y es el nivel acumulativo de difusión del nuevo proceso en el tiempo t; k, α y β son constantes positivas. Verifique su afirmación de que

$$\frac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta^t}(\beta^t \ln \alpha) \ln \beta.$$

39. Después de t años, el valor S de un capital C que se invierte a la tasa anual de r compuesta continuamente está dado por $S = Ce^{rt}$. Demuestre que la tasa de cambio relativa de S con respecto a t es r.

40. En un artículo acerca de depredadores y presas, Holling† se refiere a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

en donde x es la densidad de presas, y es el número de presas atacadas; K y a son constantes. Verifique su afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y).$$

41. De acuerdo a Richter,** el número N de terremotos de magnitud M o mayor, por unidad de tiempo, está dado por $N = 10^A 10^{-bM}$, en donde A y b son constantes. Determine dN/dM.

42. Peterson y Peterson‡ estudiaron la retención a corto plazo. Analizaron un procedimiento en el cual un experimentador daba en forma verbal a un sujeto un grupo de tres consonantes, tal como CHJ, seguido de un número de tres dígitos, 309. Después, el sujeto repetía el número y contaba hacia atrás, de tres en tres, como 309, 306, 303, ... Después de cierto tiempo se le pedía al sujeto mediante una luz, que recitara las consonantes. Al intervalo de tiempo que transcurría entre la expresión de la última consonante por parte del experimentador y el encendido de la luz se le denominó *intervalo de recordación*. Al tiempo transcurrido entre el encendido de la luz y la terminación de la respuesta se le denominó *latencia*. Después de muchos ensayos se determinó que para intervalos de recordación de t segundos, la proporción aproximada de recuerdos correctos con latencia por debajo de 2.83 segundos era p, en donde

$$p = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t].$$

a. Evalúe dp/dt e interprete el resultado.

b. Si se dispone de una calculadora, evalúe dp/dt cuando $t = 2$. Dé la respuesta con dos cifras decimales.

43. Supóngase que se inyecta en forma instantánea en el corazón un reactivo trazante, como un tinte líquido, en el tiempo $t = 0$ y se mezcla de manera uniforme con la sangre que se encuentra en el corazón. Si la concentración inicial del colorante en el corazón es C_0 y se supone que el órgano tiene un ritmo constante V, y si además se supone que la mezcla diluida de sangre y trazante fluye según una tasa constante positiva de r, cuando fluye sangre fresca hacia el corazón, entonces la concentración $C(t)$ del reactivo en el corazón en el tiempo t está dada por

$$C(t) = C_0 e^{-(r/V)t}.$$

Demuestre que $dC/dt = (-r/V)C(t)$.

44. En el Problema 43 supóngase que se inyecta el reactivo trazante a una tasa constante R. Entonces la concentración en el tiempo t es

$$C(t) = \frac{R}{r}[1 - e^{-(r/V)t}].$$

---

* A.P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein, y cols. "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

† C.S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

** C.F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W.H. Freeman y Company, Publishers, (1958).

‡ L.R. Peterson y M.J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, 58 (1959), 193-98.

(a) Halle $C(0)$. (b) Demuestre que

$$\frac{dC}{dt} = \frac{R}{V} - \frac{r}{V}C(t).$$

45. Se han utilizado diversos modelos para analizar la magnitud de la estadía en un hospital. Para un grupo específico de esquizofrénicos, un modelo es ‡,

$$f(t) = 1 - e^{-0.008t},$$

en donde $f(t)$ es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de t días de hospitalización. Obtenga la tasa de altas (proporción de personas que pueden abandonar el hospital por día) al final de 100 días. Dé la respuesta con cuatro cifras decimales.

12.3 Diferenciación implícita

Para presentar la diferenciación implícita se utiliza la pendiente de una recta tangente a una circunferencia. Tomando el círculo de radio 2 cuyo centro es el origen (Figura 12.2), su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 4,$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0. \tag{1}$$

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ queda en la circunferencia. Para hallar la pendiente en este punto es necesario evaluar ahí dy/dx. Hasta este momento, se ha usado siempre y en forma explícita (directa) en función de x antes de determinar y'; es decir, y ha estado en la forma $y = f(x)$. En la Ecuación (1) no es éste el caso. Se dice que la Ecuación (1) es de la forma $F(x, y) = 0$, en donde $F(x, y)$ denota una función de dos variables. Lo que resulta evidente es despejar y en la Ecuación 1 para que quede en términos de x:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0,$$
$$y^2 = 4 - x^2,$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}. \tag{2}$$

En este momento se presenta un problema: La Ecuación (2) puede dar dos valores de y para un solo valor de x. Esa ecuación no define a y en forma explícita como función de x. Sin embargo, puede "considerarse" que la Ecuación (1) define a y como una de dos funciones diferentes de x:

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{4 - x^2},$$

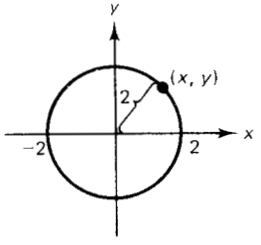


FIGURA 12.2

‡ W.W. Eaton y G.A. Whitmore, "Length of Stay as a Stocastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-92.

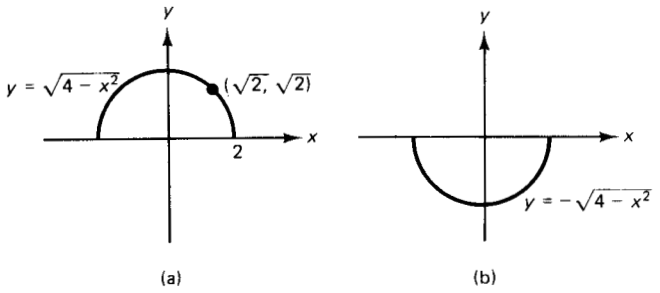


FIGURA 12.3

cuyas gráficas se dan en la Figura 12.3. Como $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ queda en la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$, se debe diferenciar esa función:

$$y = \sqrt{4 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = -1.$$

En consecuencia, la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es -1.

Ahora se resumirán las dificultades que se presentaron. En primer lugar, y no estaba originalmente dada en forma explícita en términos de x. En segundo lugar, después de haber intentado encontrar esa relación, se llegó al caso de tener más de una función de x. De hecho, dependiendo de la ecuación dada, puede resultar muy complicado —o incluso, imposible— hallar una expresión explícita para y. Por ejemplo, sería difícil despejar y en $ye^x + \ln(x + y) = 0$. En este punto se considerará un método que evita estas dificultades.

Una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, como la que se tenía originalmente, se dice que expresa a y *implícitamente* como función de x. Se utiliza aquí la palabra "implícitamente" puesto que y no está dada en forma explícita como función de x. Sin embargo, se supone, o se deduce, que la ecuación define a y como una función diferenciable de x cuando menos. Por lo tanto, se supone que la Ecuación (1), $x^2 + y^2 - 4 = 0$, define cuando menos una función de x, es decir $y = f(x)$. Por consiguiente, para determinar dy/dx se considera a y como función de x, y se diferencia con respecto a x en ambos lados de la Ecuación (1). Finalmente, se despeja dy/dx en el resultado.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}(0),$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}(0).$$

Se sabe que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ y que tanto $\frac{d}{dx}(4)$ como $\frac{d}{dx}(0)$ son 0. Pero $\frac{d}{dx}(y^2)$ **no** es $2y$ porque se está diferenciando con respecto a x y no con respecto a y. Es decir, y no es la variable independiente. Como se supone que y es una función de x, el término y^2 tiene la forma u^n, en donde y desempeña el papel de u. Tal como dice la regla de la potencia, $\frac{d}{dx}(u^2) = 2u\frac{du}{dx}$, se tiene $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx} = 2yy'$. Consecuentemente, la ecuación anterior se convierte en

$$2x + 2yy' = 0.$$

Despejando y' queda

$$2yy' = -2x,$$

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{3}$$

Obsérvese que la expresión de y' implica tanto a la variable y como a la variable x. Esto significa que para hallar y', deben sustituirse ambas coordenadas del punto en y'. Por ello

$$y'\Big|_{(\sqrt{2},\,\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \text{ al igual que antes}$$

A este método para encontrar dy/dx se le denomina **diferenciación implícita**. Es necesario observar que la Ecuación (3) no está definida cuando $y = 0$. Geométricamente esto resulta obvio, puesto que la recta tangente a la circunferencia (2, 0) o bien (−2, 0) es vertical y su pendiente no está definida.

EJEMPLO 1

Para cada una de las siguientes, obtener y' mediante diferenciación implícita.

a. $y + y^3 = x$.

Se considera a y como una función (diferenciable) de x y se diferencian ambos lados con respecto a x.

$$D_x(y) + D_x(y^3) = D_x(x).$$

Ahora, $D_x(y)$ puede escribirse como y', y $D_x(x) = 1$. Por la regla de la potencia

$D_x(y^3) = 3y^2$ o bien $3y^2y'$. Así

$$y' + 3y^2y' = 1.$$

Despejando y' se obtiene

$$y'(1 + 3y^2) = 1,$$

$$y' = \frac{1}{1 + 3y^2}.$$

b. $x^3 + 4xy^2 - y^4 - 27 = 0$.

Se supone que y es una función de x y se diferencian ambos lados con respecto a x.

$$D_x(x^3) + 4D_x(xy^2) - D_x(y^4) - D_x(27) = D_x(0).$$

Para determinar $D_x(xy^2)$ se utiliza la regla del producto.

$$[3x^2] + 4[x\,D_x(y^2) + y^2D_x(x)] - [4y^3y'] - 0 = 0,$$
$$[3x^2] + 4[x(2yy') + y^2(1)] - [4y^3y'] = 0,$$
$$3x^2 + 8xyy' + 4y^2 - 4y^3y' = 0.$$

Despejando y' resulta

$$y'(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2,$$
$$y' = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3}$$
$$= \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}.$$

EJEMPLO 2

Determinar y' si $e^{xy} = x + y$.

$$\frac{d}{dx}(e^{xy}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y),$$

$$e^{xy}\frac{d}{dx}(xy) = 1 + y',$$

$$e^{xy}\left[x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)\right] = 1 + y' \qquad \text{(regla del producto)}$$

$$e^{xy}(xy' + y) = 1 + y',$$
$$xe^{xy}y' + ye^{xy} = 1 + y',$$
$$y'(xe^{xy} - 1) = 1 - ye^{xy},$$
$$y' = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}.$$

EJEMPLO 3

Determinar la pendiente de la curva $x^3 = (y - x^2)^2$ en $(1, 2)$.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}[(y - x^2)^2],$$

$$3x^2 = 2(y - x^2)(y' - 2x),$$

$$3x^2 = 2(yy' - 2xy - x^2y' + 2x^3),$$
$$3x^2 = 2yy' - 4xy - 2x^2y' + 4x^3,$$
$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2y'(y - x^2),$$
$$y' = \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y - x^2)}.$$

Por ello, la pendiente de la curva es (1.2) es

$$y'\Big|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2[2 - (1)^2]} = \frac{7}{2}.$$

EJEMPLO 4

Si $q - p = \ln q + \ln p$, determinar dq/dp

Se supone que q es función de p y se diferencia en forma implícita con respecto a p.

$$\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) = \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p),$$
$$\frac{dq}{dp} - 1 = \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{p},$$
$$\frac{dq}{dp}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p} + 1,$$
$$\frac{dq}{dp}\left(\frac{q - 1}{q}\right) = \frac{1 + p}{p},$$
$$\frac{dq}{dp} = \frac{(1 + p)q}{p(q - 1)}.$$

EJERCICIOS 12.3

En los Problemas **1-22**, *obtenga dy/dx mediante diferenciación implícita.*

1. $x^2 + 4y^2 = 4$.
2. $3x^2 + 6y^2 = 1$.
3. $3y^4 - 5x = 0$.
4. $2x^2 - 3y^2 = 4$.
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.
6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4$.
7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 7$.
8. $y^3 = 4x$.
9. $xy = 4$.
10. $x + xy - 2 = 0$.
11. $xy - y - 4x = 5$.
12. $x^2 + y^2 = 2xy + 3$.
13. $x^3 + y^3 - 12xy = 0$.
14. $2x^3 + 3xy + y^3 = 0$.
15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$.
16. $x^3y^3 + x = 9$.
17. $3x^2y^3 - x + y = 25$.
18. $y^2 + y = \ln x$.
19. $y \ln x = xe^y$.
20. $\ln(xy) + x = 4$.
21. $xe^y + y = 4$.
22. $ax^2 - by^2 = c$.
23. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre y' en $(1, 2)$

24. Determine la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $(0, \frac{1}{3})$; en el punto (x_0, y_0).

25. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^2 = 3$ en el punto $(-1, 2)$.

26. Repita el Problema 25 para la curva $y^2 + xy - x^2 = 5$ en el punto $(4, 3)$.

Para las ecuaciones de demanda de los Problemas **27-30,** *halle la tasa de cambio de q con respecto a p.*

27. $p = 100 - q^2$. **28.** $p = 400 - \sqrt{q}$. **29.** $p = 20/(q + 5)^2$. **30.** $p = 20/(q^2 + 5)$.

31. La magnitud M de un terremoto y su energía E están relacionadas mediante la ecuación*

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right).$$

Aquí, M está dada en términos de la escala de Richter de 1958 y E está en ergs. Determine la tasa de cambio de la energía con respecto a la magnitud.

32. A la ecuación $(P + a)(v + b) = k$ se le denomina "ecuación fundamental de la contracción muscular".† Aquí, P es la carga que se impone al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares y a, b, k son constantes positivas. Utilice la diferenciación implícita para probar que dv/dP, en términos de P, está dada por

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{k}{(P + a)^2}.$$

33. Con frecuencia productos o tecnologías nuevas tienden a reemplazar a los antiguos. Por ejemplo, en la actualidad la mayoría de las aerolíneas comerciales utilizan motores de reacción en vez de motores de hélice. Al analizar los pronósticos de sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein‡ obtuvieron la siguiente ecuación.

$$\ln\frac{f(t)}{1 - f(t)} + \sigma\frac{1}{1 - f(t)} = C_1 + C_2 t,$$

en donde $f(t)$ es la participación del sustituto en el mercado en el tiempo t y (la letra griega "sigma") son constantes. Verifique su afirmación de que la tasa de sustitución es

$$f'(t) = \frac{C_2 f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}.$$

12.4 Diferenciación logarítmica

Existe una técnica que con frecuencia simplifica la diferenciación de $y = f(x)$ cuando $f(x)$ implica productos, cocientes o potencias. En primer lugar, se obtiene el logaritmo natural de ambos lados de $y = f(x)$. Después de simplificar $\ln [f(x)]$ utilizando las propiedades de los logaritmos, se diferencian ambos lados con respecto a x. El siguiente ejemplo ilustra este método de **diferenciación logarítmica.**

EJEMPLO 1

Evaluar y' *si* $y = \dfrac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2 + 1}}$.

Diferenciar esta función en la forma normal resulta complicado porque requiere las reglas del cociente, la potencia y el producto. La diferenciación logarítmica hace que el trabajo resulte menos laborioso. En primer lugar, se obtienen logaritmos naturales en ambos lados y se simplifican.

$$\ln y = \ln\frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2 + 1}} = \ln (2x - 5)^3 - \ln[x^2\sqrt[4]{x^2 + 1}],$$

* K.E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge at the University Press, 1963).

† R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

‡ A.P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein y cols. "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 1976-221.

$$\ln y = 3\ln(2x - 5) - 2\ln x - \tfrac{1}{4}\ln(x^2 + 1).$$

Diferenciando con respecto a x, se obtiene

$$\frac{1}{y}y' = 3\left(\frac{1}{2x - 5}\right)(2) - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(2x),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)}.$$

Multiplicando ambos lados por y y después sustituyendo la y por la expresión original, resulta y' en términos sólo de x.

$$y' = y\left[\frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)}\right],$$

$$y' = \frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2 + 1}}\left[\frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)}\right].$$

También se puede utilizar la diferenciación logarítmica para diferenciar una función de la forma $y = u^v$, en donde tanto u como v son funciones diferenciables de x. Debido a que ni la base ni el exponente son necesariamente constantes, las fórmulas de diferenciación para u^n y a^u no se aplican aquí.

EJEMPLO 2

Diferenciar $y = x^x$ utilizando diferenciación logarítmica.

Esta función tiene la forma $y = u^v$, en donde u y v son funciones de x. Tomando logaritmos naturales en ambos lados, se obtiene $\ln y = \ln x^{4x}$ o bien

$$\ln y = x \ln x.$$

Diferenciando ambos lados con respecto a x,

$$\frac{1}{y}y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1),$$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x.$$

Despejando y' y sustituyendo y por x^x.

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma $y = u^v$ consiste en convertirla en una función exponencial con base e. Como ilustración, para la función del Ejemplo 1, se tiene

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x},$$

$$y' = e^{x \ln x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right)$$
$$= x^x(1 + \ln x).$$

EJEMPLO 3

Si $y = x^{e^{-x^2}}$ *obtener* y' *mediante diferenciación logarítmica.*

Esta tiene la forma $y = u^v$ en donde $v = e^{-x^2}$. Utilizando diferenciación logarítmica,

$$\ln y = \ln x^{e^{-x^2}} = e^{-x^2} \ln x,$$
$$\frac{1}{y}y' = e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)[(e^{-x^2})(-2x)],$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{-x^2}}{x} - 2xe^{-x^2} \ln x = e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x \ln x\right),$$
$$y' = ye^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x \ln x\right)$$
$$= x^{e^{-x^2}} e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x \ln x\right) \qquad \text{[por sustitución].}$$

ADVERTENCIA

Cuando se utilizan las propiedades de los logaritmos, en todas ocasiones se debe estar en posibilidad de justificar los pasos seguidos. Por ejemplo,

$$\text{si } y = \ln(x + y), \text{ entonces } \ln y \neq \ln(x + y).$$

De manera similar,

$$\text{si } y = x^x + x^5, \text{ entonces } \ln y \neq \ln x^x + \ln x^5.$$

También, se debe estar seguro de como diferenciar cada una de las siguientes formas:

$$y = \begin{cases} [f(x)]^n, & \text{(a)} \\ a^{f(x)}, & \text{(b)} \\ [f(x)]^{g(x)}. & \text{(c)} \end{cases}$$

Para el tipo (a) se puede utilizar la regla de la potencia. Para el tipo (b), es posible aplicar la fórmula de la diferenciación para funciones exponenciales [si $a \neq e$, se debe primero convertir $a^{f(x)}$ en una función e^u]. Para el tipo (c), utilizar diferenciación logarítmica o convertir primero a una función e^u. No se deben aplicar las reglas en situaciones en las que no funcionan. Por ejemplo, la derivada de x^x no es $x \cdot x^{x-1}$.

EJERCICIOS 12.4

En los Problemas **1-12**, *ontenga* y' utilizando diferenciación logarítmica.

1. $y = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 + 3)$.

2. $y = (3x + 4)(8x - 1)^2(3x^2 + 1)^4$.

3. $y = (3x^3 - 1)^2(2x + 5)^3$.

4. $y = (3x + 1)\sqrt{8x - 1}$.

5. $y = \sqrt{x + 1}\sqrt{x^2 - 2}\sqrt{x + 4}$.

6. $y = (x + 2)\sqrt{x^2 + 9}\sqrt[3]{2x + 1}$.

7. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2x}$.

8. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 5}{x + 9}}$.

9. $y = \dfrac{(2x^2 + 2)^2}{(x + 1)^2(3x + 2)}$.

10. $y = \sqrt{\dfrac{(x - 1)(x + 1)}{3x - 4}}$.

11. $y = \dfrac{(8x + 3)^{1/2}(x^2 + 2)^{1/3}}{(1 + 2x)^{1/4}}$.

12. $y = \dfrac{x(1 + x^2)^2}{\sqrt{2 + x^2}}$.

En los problemas **13-20**, *evaluar* y'.

13. $y = x^{2x+1}$.

14. $y = x^{\sqrt{x}}$.

15. $y = x^{1/x}$.

16. $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x$.

17. $y = (3x + 1)^{2x}$.

18. $y = x^{x^2}$.

19. $y = e^x x^{3x}$.

20. $y = (\ln x)^{e^x}$.

21. Determine una ecuación de la recta tangente $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$ en el punto en donde $x = 0$.

22. Si $y = x^{2x}$, halle la tasa de variación relativa de y con respecto a x cuando $x = 2$.

12.5 Derivadas de orden superior (o sucesivas)

Como se dijo antes, la derivada de una función $y = f(x)$ es en sí una función, $f(x)$. Si se diferencia $f'(x)$, a la función resultante se le denomina **segunda derivada** de f respecto a x. Se le denota por $f''(x)$, que se lee "f biprima de x". De igual modo, a la derivada de la segunda derivada se le denomina **tercera derivada**, que se escribe $f'''(x)$ y se lee "f triprima de x", Continuando de esta forma, se obtienen *derivadas sucesivas o de orden superior*. En la Tabla 12.1 se presentan algunas notaciones para derivadas de orden superior para evitar notaciones confusas no se utilizan acentos o "primas" después de la tercera derivada.

TABLA 12.1

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\dfrac{dy}{dx}$,	$\dfrac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x y$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,	$\dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2 y$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$,	$\dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3 y$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$,	$\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4 y$

ADVERTENCIA

Los símbolos d^2y/dx^2 representan la segunda derivada de y. No son lo mismo que $(dy/dx)^2$, que designan el cuadrado de la primera derivada de y. Así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

EJEMPLO 1

a. *Si* $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, *obtener todas las derivadas de orden superior.*

Diferenciando $f(x)$ da

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6.$$

Diferenciando $f'(x)$ se tiene

$$f''(x) = 36x - 24.$$

Análogamente,

$$f'''(x) = 36,$$
$$f^{(4)}(x) = 0.$$

Todas las derivadas sucesivas son también 0: $f^{(5)}(x) = 0$, etcétera.

b. *Si* $f(x) = 7$, determinar $f''(x)$.

$$f'(x) = 0,$$
$$f''(x) = 0.$$

EJEMPLO 2

a. *Si* $y = e^{x^2}$, *encontrar* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)] = 2e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

b. *Si* $y = f(x) = \dfrac{16}{x + 4}$, *hallar* $d\,\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *y evaluarla cuando* $x = 4$.

Dado que $y = 16(x + 4)^{-1}$, la regla de la potencia da

$$\frac{dy}{dx} = -16(x + 4)^{-2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x + 4)^{-3} = \frac{32}{(x + 4)^3}.$$

Evaluando cuando $x = 4$,

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}.$$

La segunda derivada con evaluación en $x = 4$ se denota también como $f''(4)$ o bien $y''(4)$.

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x \ln x$, obtener la tasa de variación de $f''(x)$.

Para determinar la razón de cambio de cualquier función, se debe encontrar su derivada. En consecuencia, se desea evaluar $D_x[f''(x)]$ que es $f'''(x)$.

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x,$$

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$f'''(x) = D_x(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ahora, se determinarán derivadas de orden superior mediante diferenciación implícita. Se supone siempre que y es una función de x.

EJEMPLO 4

Encontrar y'' *si* $x^2 + 4y^2 = 4$.

Diferenciando ambos lados con respecto a x, se obtiene

$$2x + 8yy' = 0,$$

$$y' = \frac{-x}{4y}. \tag{1}$$

$$y'' = \frac{4y\,D_x(-x) - (-x)\,D_x(4y)}{(4y)^2}$$

$$= \frac{4y(-1) - (-x)(4y')}{16y^2}$$

$$= \frac{-4y + 4xy'}{16y^2}.$$

$$y'' = \frac{-y + xy'}{4y^2}. \tag{2}$$

De la Ec. (1), $y' = \dfrac{-x}{4y}$, por lo que, sustituyendo en la Ec. (2), se tiene

$$y'' = \frac{-y + x\left(\frac{-x}{4y}\right)}{4y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}.$$

Ya que $x^2 + 4y^2 = 4$ (ecuación original),

$$y'' = -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}.$$

EJEMPLO 5

Obtener y'' *si* $y^2 = e^{x+y}$.

Diferenciando ambos lados con respecto a x resulta

$$2yy' = e^{x+y}(1 + y').$$

Despejando y', resulta

$$2yy' = e^{x+y} + e^{x+y}y',$$
$$(2y - e^{x+y})y' = e^{x+y},$$
$$y' = \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}.$$

Ya que $y^2 = e^{x+y}$ (ecuación original)

$$y' = \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2 - y}.$$
$$y'' = \frac{(2 - y)(y') - y(-y')}{(2 - y)^2} = \frac{2y'}{(2 - y)^2}.$$

Puesto que $y' = \frac{y}{2 - y}$,

$$y'' = \frac{2\left(\frac{y}{2 - y}\right)}{(2 - y)^2} = \frac{2y}{(2 - y)^3}.$$

EJERCICIOS 12.5

En los Problemas **1-20**, *obtenga las derivadas que se señalan.*

1. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2$, y'''.

2. $y = 2x^4 - 6x^2 + 7x - 2$, y'''.

3. $y = 7 - x$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. $y = -x - x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. $y = x^3 + e^x$, $y^{(4)}$.

6. $f(q) = \ln q$, $f'''(q)$.

7. $f(x) = x^2 \ln x, \quad D_x^2[f(x)]$.

8. $y = 1/x, \quad y'''$.

9. $f(p) = \dfrac{1}{6p^3}, \quad f'''(p)$.

10. $f(x) = \sqrt{x}, \quad f''(x)$.

11. $f(r) = \sqrt{1 - r}, \quad f''(r)$.

12. $y = e^{-4x^2}, \quad y''$.

13. $y = \dfrac{1}{5x - 6}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14. $y = (2x + 1)^4, \quad y''$.

15. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}, \quad y''$.

16. $y = 2x^{1/2} + (2x)^{1/2}, \quad y''$.

17. $y = \ln [x(x + 1)], \quad y''$.

18. $y = \ln \dfrac{(2x - 3)(4x - 5)}{x + 3}, \quad y''$.

19. $f(z) = z^2e^z, \quad f''(z)$.

20. $y = \dfrac{x}{e^x}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

En los Problemas **21-30,** *halle* y''.

21. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$.

22. $x^2 - y^2 = 16$.

23. $y^2 = 4x$.

24. $4x^2 + 3y^2 = 4$.

25. $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 4$.

26. $y^2 - 6xy = 4$.

27. $xy + y - x = 4$.

28. $xy + y^2 = 1$.

29. $y^2 = e^{x+y}$.

30. $e^x - e^y = x^2 + y^2$.

31. Determine la tasa de cambio de $f'(x)$ si $f(x) = (5x - 3)^4$.

32. Determine la tasa de cambio de $f''(x)$ si $f(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{1}{6\sqrt{x}}$.

33. Si $c = 0.3q^2 + 2q + 850$ es una función de costo, ¿en qué grado cambia el costo marginal cuando $q = 100$?

34. Si $p = 1000 - 45q - q^2$ es una ecuación de demanda, ¿con qué intensidad cambia el ingreso marginal cuando $q = 10$?

35. Si $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$, determine los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$.

12.6 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 12.3 diferenciación implícita

Sección 12.4 diferenciación logarítmica

Sección 12.5 derivadas de orden superior $f''(x)$, D_x^2y, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$, y así sucesivamente

RESUMEN

Si una ecuación define en forma implícita a y como función de x, en vez de definirla en la forma explícita $y = f(x)$, entonces se puede evaluar dy/dx mediante diferenciación implícita. En este método se considera a

y como función de x y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a x. Cuando se hace lo anterior se debe recordar que $\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$. Finalmente, se despeja dy/dx en la ecuación resultante.

Las fórmulas de la derivada de funciones logarítmicas naturales y de las funciones exponeneciales son

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Supóngase que $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias. Para diferenciar $y = \log_b[f(x)]$ puede resultar útil aprovechar las propiedades de los logaritmos para replantear $\log_b[f(x)]$ en términos de logaritmos más simples, y después diferenciar esta forma. Puede utilizarse el método de diferenciación logarítmica para derivar $y = f(x)$. En este método se forman logaritmos naturales en ambos lados de $y = f(x)$ para obtener $\ln y = \ln[f(x)]$. Después de simplificar $\ln[f(x)]$ utilizando las propiedades de los logaritmos, diferencia en ambos miembros de $\ln y = \ln[f(x)]$ con respecto a x, y después se despeja y'. Se utiliza también la diferenciación logarítmica para derivar $y = u^v$, en donde tanto u como v son funciones de x.

Como la derivada $f'(x)$, de una función $y = f(x)$ es en sí una función, se le puede diferenciar sucesivamente para obtener la segunda derivada $f''(x)$, la tercera derivada $f'''(x)$, y otras derivadas sucesivas de orden superior.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-28**, *diferenciar*

1. $y = 2e^x + e^2 + e^{x^2}$.

2. $f(w) = we^w + w^2$.

3. $f(r) = \ln(r^2 + 5r)$.

4. $y = e^{\ln x}$.

5. $y = e^{x^2+4x+5}$.

6. $f(t) = \log_6\sqrt{t^2 + 1}$.

7. $y = e^x(x^2 + 2)$.

8. $y = 2^{7x^2}$.

9. $y = \sqrt{(x - 6)(x + 5)(9 - x)}$.

10. $f(t) = e^{\sqrt{t}}$.

11. $y = \frac{\ln x}{e^x}$.

12. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$.

13. $f(q) = \ln[(q + 1)^2(q + 2)^3]$.

14. $y = (x - 6)^4(x + 4)^3(6 - x)^2$.

15. $y = 10^{2-7x}$.

16. $y = (e + e^2)^0$.

17. $y = \frac{4e^{3x}}{xe^{x-1}}$.

18. $y = \frac{e^x}{\ln x}$.

19. $y = \log_2(8x + 5)^2$.

20. $y = \ln(1/x)$.

21. $f(l) = \ln(1 + l + l^2 + l^3)$.

22. $y = x^{e^3}$.

23. $y = (x + 1)^{x+1}$.

24. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

25. $f(t) = \ln(t^2\sqrt{1 - t})$.

26. $y = (x + 2)^{\ln x}$.

27. $y = \frac{(x^2 + 2)^{3/2}(x^2 + 9)^{4/9}}{(x^3 + 6x)^{4/11}}$.

28. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

En los Problemas **29-32**, *hallar la derivada que se indica en el punto dado.*

29. $y = e^{x^2-4}$, y'', $(2, 1)$.

30. $y = x^2e^x$, y''', $(1, e)$.

31. $y = \ln(2x)$, y''', $(1, \ln 2)$.

32. $y = x \ln x$, y'', $(1, 0)$.

En los Problemas **33** *y* **34**, *obtener una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.*

33. $y = e^x$, $x = \ln 2$.

34. $y = x + x^2 \ln x$, $x = 1$.

En los Problemas **35** *y* **36**, *evaluar* y'.

35. $2xy + y^2 = 6$.

36. $x^2y^2 = 1$.

En los Problemas **37** y **38**, *obtener* y'' *en el punto dado.*

37. $x + xy + y = 5, \quad (2, 1).$

38. $xy + y^2 = 2, \quad (1, 1).$

39. Se han utilizado diversos modelos para analizar la magnitud de la estadía en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos un modelo de este tipo es †

$$f(t) = 1 - (0.8e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.0002t}),$$

en donde $f(t)$ es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de t días de hospitalización. Determine la tasa de altas (proporción de personas dadas de alta por día) al final de t días.

40. De acuerdo con Richter § el número N de sismos de magnitud M o mayor por unidad de tiempo está dado por $\log N = A - bM$ en donde A y b son constantes. Este investigador afirma que

$$\log\left(-\frac{dN}{dM}\right) = A + \log\left(\frac{b}{q}\right) - bM,$$

en donde $q = \log e$. Verifique su aseveración.

† Adaptado de W.W. Eaton y G.A. Whitmore, "Length of Stay as a Stocastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-92.

§ C.F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W.H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

CAPÍTULO 13

Trazo de curvas

13.1 Extremos relativos o locales

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica en matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando se traza una curva, la simple ubicación de puntos puede no dar suficiente información acerca de la misma. Por ejemplo, los puntos (-1,0), (0,-1) y (1,0) satisfacen la ecuación $y = (x + 1)^3(x - 1)$. Con base en estos puntos, se podría concluir apresuradamente que la gráfica debe tener la forma de la Figura 13.1, cuando de hecho la forma real es la que se da en la Figura 13.2. En este capítulo, se explora el poder que tiene la diferenciación en el análisis de funciones y que permite determinar la forma y el comportamiento reales de su gráfica.

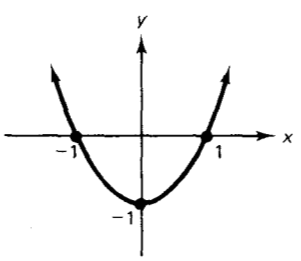


FIGURA 13.1

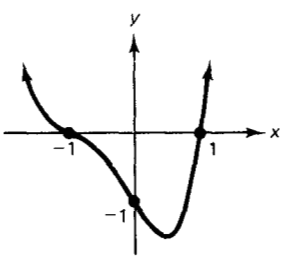


FIGURA 13.2

Se comienza analizando la gráfica de la función $y = f(x)$ que aparece en la Figura 13.3. Obsérvese que conforme crece x (avanza de izquierda a derecha) sobre el intervalo I_1, entra a y b, los valores de $f(x)$ aumentan y la curva asciende. En símbolos, esta observación significa que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en I_1 tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. En este caso se dice que f es una *función creciente* en I_1. Por otro lado, conforme x aumenta en el intervalo I_2 entre c y d, la curva desciende. En este caso, $x_3 < x_4$ implica que $f(x_3) > f(x_4)$, y se dice que f es una *función decreciente* en I_2. En general se tiene la siguiente definición.

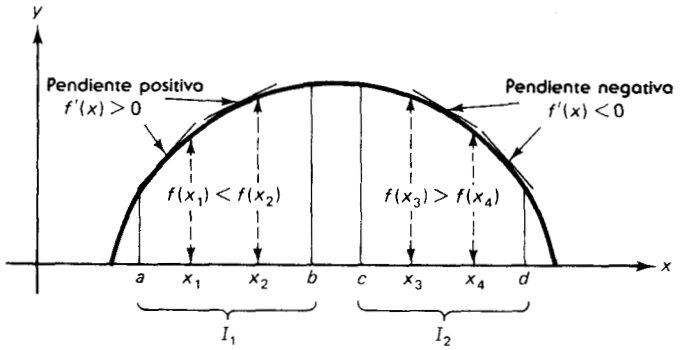


FIGURA 13.3

DEFINICIÓN

Se dice que una función f es ***creciente*** *en el intervalo I, si para cualesquiera dos números* x_1 *y* x_2 *que estén en I, en donde* $x_1 < x_2$ *entonces* $f(x_1) < f(x_2)$. *Una función es* ***decreciente*** *en el intervalo I si, para cualesquiera dos números* x_1x_2 *que estén en I si, en donde* $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) > f(x_2)$.

Volviendo de nuevo a la Figura 13.3, se observa que sobre el intervalo I_1, las rectas tangentes a la curva tienen pendiente positiva, de forma que $f'(x)$ debe ser positiva para todas las x de I_1. Básicamente, una derivada positiva indica que la curva asciende. Sobre el intervalo I_2, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así que $f'(x) < 0$ para todas las x que están en I_2.

En esencia, cuando la derivada es negativa, la curva desciende. Por ello se tiene la siguiente regla que permite utilizar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente.

Regla 1

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). *Si* $f'(x) > 0$ *para toda x de* (a, b), *entonces f es creciente en* (a, b). *Si* $f'(x) < 0$ *para toda x en* (a, b), *entonces f es decreciente en* (a, b).

Para ilustrar estas ideas se utiliza la Regla 1 para hallar los intervalos sobre los cuales $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente o decreciente. Haciendo $y = f(x)$, se debe determinar cuándo $f'(x)$ es positiva y cuándo es negativa.

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x).$$

Con la técnica de la Sección 10.5 se puede obtener el signo de $f'(x)$ poniendo a prueba los intervalos determinados por las raíces de $2(3 + x)(3 - x) = 0$, es decir, 3 y -3 (véase la Figura 13.4). En cada uno de los intervalos se determina el signo $f'(x)$ mediante los signos de sus factores:

si $x < -3$, entonces $f'(x) = 2(-)(+) = (-)$ y f es decreciente;

si $-3 < x < 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(+) = (+)$ y f es creciente;

si $x > 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(-) = (-)$ y f es decreciente [véase la Figura 13.5(a)].

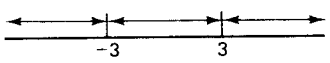
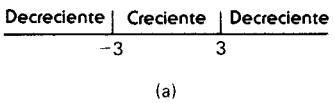
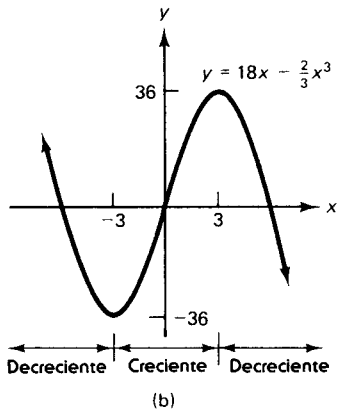


FIGURA 13.4



(a)



(b)

FIGURA 13.5

Por lo tanto, f es decreciente en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$, y es creciente en $(-3, 3)$. Esto corresponde a la naturaleza creciente y decreciente de la gráfica de f que se muestra en la Figura 13.5(b). Se pueden afinar aún más estos resultado n realidad, por definición, f es decreciente en $(-\infty, -3]$ y $[3, \infty)$, y creciente en $[-3, 3]$. Sin embargo, para los propósitos de esta sección son suficientes los intervalos abiertos. *Será práctica común en este texto determinar intervalos* ***abiertos*** *sobre los cuales una función es creciente o decreciente.*

En seguida se observa la gráfica de $y = f(x)$ de la Figura 13.6. Se pueden hacer tres observaciones. En primer lugar, existe algo especial con respecto a los puntos P_1, P_2 y P_3. Obsérvese que P_1 está en una posición *más alta* que cualquier otro punto "cercano" de la curva; y sucede lo mismo con P_3. El punto P_2 se encuentra en una posición *más baja* que cualquier otro punto "cercano" de la curva. Como P_1, P_2 y P_3 pueden no necesariamente ser los puntos más elevados o más bajos en la *totalidad* de la curva, simplemente se dice que la gráfica de f tiene un (*punto*) *máximo relativo* (o *local*) cuando $x = x_1$ y cuando $x = x_3$ y que tiene un (*punto*) *mínimo relativo* (o *local*) cuando $x = x_2$. Al nivel de función, cuando $x = x_1$ y $x = x_3$, x tiene *valores máximos relativos* de $f(x_1)$ y $f(x_3)$. De manera similar, cuando $x = x_2$ f tiene un *valor mínimo relativo* de $f(x_2)$.

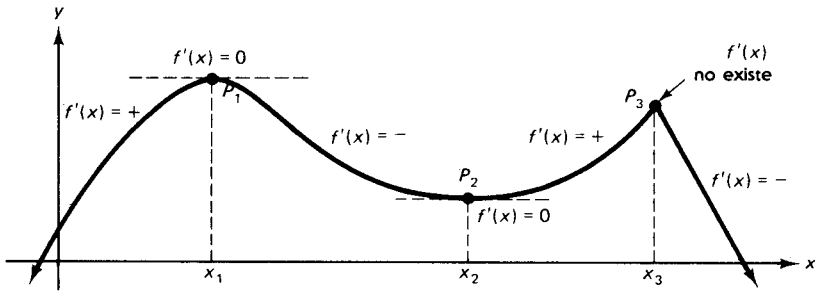


FIGURA 13.6

Cuando se menciona un máximo o un mínimo relativos, se sobreentiende que se trata de un punto o un valor, dependiendo del contexto. Volviendo a la gráfica, se observa que existe un *máximo absoluto* (el punto más elevado en toda la curva) cuando $x = x_1$, pero que no existe *mínimo absoluto* (el punto más bajo en toda la curva), puesto que se supone que la línea se extiende en forma indefinida hacia abajo. En términos más precisos, se definen estos nuevos términos de la manera siguiente:

DEFINICIÓN

Una función f tiene un ***máximo relativo*** *cuando* $x = x_0$ *si existe un intervalo abierto que contenga a* x_0 *y en el cual* $f(x_0) \geq f(x)$ *para toda x del intervalo. El máximo relativo es* $f(x_0)$. *Una función f tiene un* ***mínimo relativo*** *cuando* $x = x_0$ *si existe un intervalo abierto que contenga a* x_0 *y en el cual* $f(x_0) \leq f(x)$ *para toda x del intervalo. El mínimo relativo es* $f(x_0)$.

DEFINICIÓN

Una función f tiene un máximo absoluto cuando $x = x_0$ *si* $f(x_0) \geq f(x)$ *para todas las x del dominio de f. El máximo absoluto es* $f(x_0)$. *Una función f tiene un mínimo absoluto cuando* $x = x_0$ *si* $f(x_0) \leq f(x)$ *para toda x del dominio de f. El mínimo absoluto es* $f(x_0)$.

A un máximo y a un mínimo relativo se les denomina **extremos relativos**. De manera semejante, se habla de **extremos absolutos**.

Cuando se trata con extremos relativos, se compara el valor de la función en un punto con los que se encuentran cercanos; sin embargo, cuando se trabaja con extremos absolutos se compara el valor de la función en un punto con todos los otros que se encuentran determinados por el dominio. Por ello, los extremos relativos son de naturaleza "local", en tanto que los extremos absolutos son de naturaleza "global".

Volviendo a la Figura 13.6, se observa que en un extremo relativo es posible que la derivada no esté definida (como cuando $x = x_3$). Pero en los casos en que esté definida, es 0 (como cuando $x = x_1$ y $x = x_2$), de modo que, la recta tangente es horizontal. Puede establecerse lo siguiente:

Regla 2

Si f tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$, *entonces* $f'(x_0) = 0$ *o bien* $f'(x_0)$ *no está definida.*

Debe resultar evidente, de la Regla 2, que los extremos relativos pueden ocurrir en puntos de la gráfica de f en donde $f'(x) = 0$ o en donde f' no está definida. A estos puntos se les denomina *puntos críticos* y a sus coordenadas x se les denomina *valores críticos.*

DEFINICIÓN

Si x_0 *está en el dominio de f y sucede que* $f'(x_0) = 0$ *o bien* $f'(x_0)$ *no está definida, entonces a* x_0 *se le denomina* ***valor crítico*** *de f. Si* x_0 *es un valor crítico, entonces a* $(x_0, f(x_0))$ *se le denomina* ***punto crítico.***

Por ello, en un punto crítico puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo, o ninguno de los dos. Además, en la Figura 13.6 se observa que cada extremo relativo ocurre en un punto alrededor del cual está cambiando el signo de $f'(x)$. Para el máximo relativo cuando $x = x_1$, $f'(x)$ pasa de $(+)$ para $x > x_1$ a $(-)$ para $x > x_1$, *siempre y cuando x esté cerca de* x_1. En el mínimo relativo cuando $x = x_2$, $f'(x)$ pasa de $(-)$ a $(+)$, y en el máximo relativo cuando $x = x_3$, pasa de nuevo de $(+)$ a $(-)$. Por ello, *alrededor de máximos relativos, f es creciente y después decreciente, y para los mínimos relativos se aplica lo contrario.* En términos más precisos, se tiene la siguiente regla.

Regla 3

Supóngase que f es continua en un intervalo abierto I que contiene al valor x_0 y que f es diferenciable en I, excepto, posiblemente, en x_0.

(a) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando x aumenta y pasa por x_0, entonces f tiene un máximo relativo en $x = x_0$.

(b) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando x aumenta y pasa por x_0, entonces f tiene un mínimo relativo cuando $x = x_0$.

ADVERTENCIA

No todo valor crítico corresponde a un extremo relativo. Por ejemplo, si $y = f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Como $f'(0) = 0$ y $f(0)$ están definidas, 0 es un valor crítico. Ahora, si $x < 0$, entonces $3x^2 > 0$. Si $x > 0$, entonces $3x^2 > 0$. Debido a que $f'(x)$ no cambia de signo, no existe ni máximo ni mínimo relativos. Más bien, ya que $f'(x) \geq 0$ para toda x, la gráfica de f nunca descendiente, y se dice que f es *no decreciente* (véase la Figura 13.7).

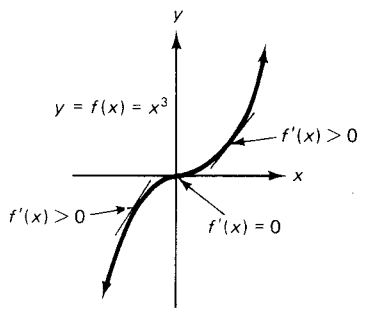


FIGURA 13.7

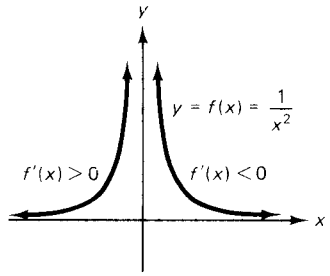


FIGURA 13.8

Es importante comprender que no en cualquier valor de x en donde $f'(x)$ no exista es un valor crítico. Por ejemplo, si $y = f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(x) = -2/x^3$. Aunque $f'(x)$ no está definida cuando $x = 0$, el valor 0 no es crítico porque no se encuentra en el dominio de f. Es decir, no hay valor de y que corresponda a $x = 0$. En consecuencia, no puede ocurrir un extremo relativo cuando $x = 0$. No obstante, la derivada puede cambiar de signo alrededor de cualquier valor de x en donde $f'(x)$ no esté definida y, por esta razón, estos valores son importantes para determinar los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente. Si $x < 0$, entonces $f'(x) = -2/x^3 > 0$. Si $x > 0$, entonces $f'(x) = -2/x^3 < 0$. Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$ (véase la Figura 13.8).

De este análisis y de la advertencia anterior, debe comprenderse que un valor crítico es sólo un "candidato" a ser extremo relativo. Puede corresponder a un máximo relativo, a un mínimo relativo, o a ninguno de ellos.

En la Regla 3 deben satisfacerse las hipótesis porque, de lo contrario, es posible, que la conclusión no sea válida. Por ejemplo, tómese el caso de la función compuesta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Como puede apreciarse en la Figura 13.9, 0 se encuentra en el dominio y $f'(0)$ no existe, por lo que 0 es un valor crítico. Aunque $f'(x) = +$ para $x < 0$ y $f'(x) = -$ para $x > 0$, f no tiene un máximo relativo en 0. De hecho, 0 es un mínimo absoluto, de acuerdo con la definición. Esto demuestra que si $f'(x_0)$ no existe y f no es continua en x_0, se debe analizar cuidadosamente lo que ocurre alrededor de x_0.

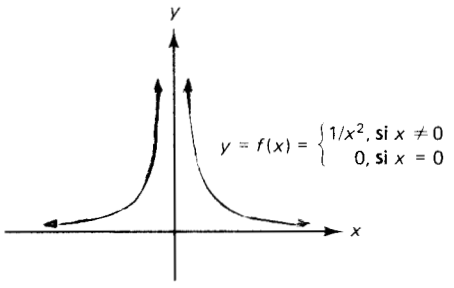


FIGURA 13.9

Resumiendo los resultados de esta sección, se tiene la *prueba de la primera derivada* para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para extremos relativos

1. **Encontrar $f'(x)$**
2. **Determinar todos los valores de x en donde $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no esté definida. (Estos valores incluyen los valores críticos y los puntos de discontinuidad).**
3. **En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determinar si f es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente ($f'(x) < 0$).**
4. **Para cada valor crítico x_0 en el que f sea continua, determinar si cambia el signo de $f(x)$ al aumentar x y pasar por x_0. Existe un máximo relativo cuando $x = x_0$ si $f'(x)$ cambia de (+) a (−) yendo de izquierda a derecha y un mínimo relativo si $f'(x)$, cambia de (−) a (+) yendo de izquierda a derecha. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no existen extremos relativos cuando $x = x_0$.**

EJEMPLO 1

Si $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, *utilizar la prueba de la primera derivada para encontrar en dónde ocurren extremos relativos.*

1. $f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$, por lo que

$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Nótese que se expresó $f'(x)$ como cociente, con numerador y denominador factorizados. Esto permite determinar fácilmente en la etapa 2 cuando $f'(x)$ es 0 o no está definida.

2. Fijando $f'(x) = 0$ se obtiene $x = -3, 1$. El denominador de $f'(x)$ es 0 cuando x es -1, de forma que $f'(-1)$ no existe. Los valores -3 y 1 son valores críticos, pero -1 no lo es ya que $f(-1)$ no está definida (f es discontinua en $x = -1$).

3. Los tres valores del paso 2 conducen a considerar cuatro intervalos (Figura 13.10). (f es diferenciable y no es cero en cada uno de estos intervalos).

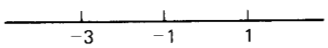


FIGURA 13.10

si $x < -3$, entonces $f'(x) = \dfrac{(-)(-)}{(+)} = +$, por lo que, f es creciente;

si $-3 < x < -1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que, f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que, f es decreciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que, f es creciente (Figura 13.11).

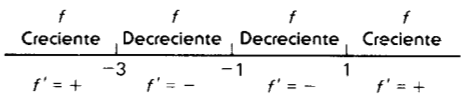


FIGURA 13.11

Por consiguiente, f es creciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$, y es decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$.

4. Cuando $x = -3$, existe un máximo relativo puesto que $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$. [Este valor máximo relativo es $f(-3) = -3 + (4/-2) = -5$.] Cuando $x = 1$, existe un mínimo relativo, dado que $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$. Se omite $x = -1$ debido a que -1 no es un valor crítico. La gráfica se muestra en la Figura 13.12.

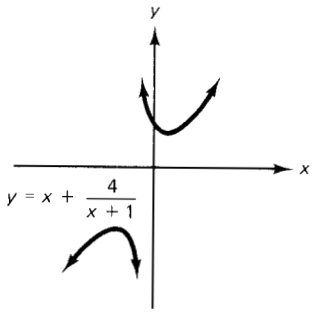


FIGURA 13.12

EJEMPLO 2

Investigar si $y = f(x) = x^{2/3}$ *tiene extremos relativos.*

Se tiene que $f'(x = 2/3x^{-1/3} = 2/(3\sqrt[3]{x})$. Cuando $x = 0$ entonces, $f'(x)$ no está definida, pero $f'(x)$ si lo está. Consecuentemente, 0 es un valor crítico y no existen otros valores críticos. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$. Si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$. Por lo tanto, existe un mínimo relativo (así como también un mínimo absoluto) cuando $x = 0$ (véase la Figura 13.13). Obsérvese que, cuando $x = 0$, la recta tangente existe y es vertical.

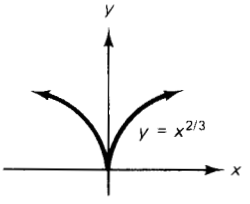


FIGURA 13.13

EJEMPLO 3

Investigar si $y = f(x) = x^2e^x$ tiene extremos relativos.

Por la regla del producto,

$$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2).$$

Como e^x siempre es positivo, los valores críticos son 0 y -2. Por los signos de $f'(x)$ que se dan en la Figura 13.14, se concluye que existe un máximo relativo cuando $x = -2$ y un mínimo relativo cuando $x = 0$.

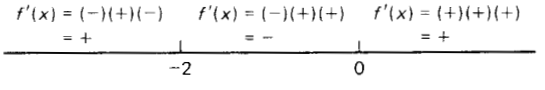


FIGURA 13.14

EJEMPLO 4

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2x^2 - x^4$.

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x),$$

y por ello, $x = 0, \pm\sqrt{2}$. Las intersecciones con los ejes son $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Simetría Investigando la simetría sobre el eje y, se tiene

$$y = 2(-x)^2 - (-x)^4 \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x^2 - x^4.$$

Ya que esta es la ecuación original, existe simetría con respecto al eje y. Como y es una función (y no la función 0), no existe simetría con respecto al eje x, y por lo tanto, tampoco existe simetría con respecto al origen.

Prueba de la primera derivada

1. $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$.
2. Si $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = 0, \pm 1$. Los puntos críticos son $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Las coordenadas y de estos puntos se hallan sustituyendo $x = 0, \pm 1$ en la ecuación *original*: $y = 2x^2 - x^4$.
3. Se deben considerar cuatro intervalos en la Figura 13.15:

   si $x < -1$, entonces $y' = 4(-)(-)(+) = +$ y f es creciente;

   si $-1 < x < 0$, entonces $y' = 4(-)(+)(+) = -$ y f es decreciente;

   si $0 < x < 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(+) = +$ y f es creciente;

   si $x > 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(-) = -$ y f es decreciente (Figura 13.6).
4. Ocurren máximos relativos en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$; ocurre un mínimo relativo en $(0, 0)$.

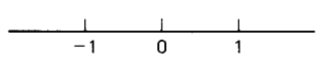


FIGURA 13.15

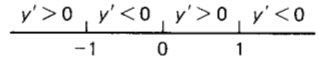
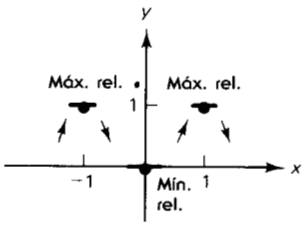
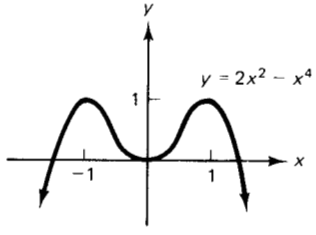


FIGURA 13.16

Análisis En la Figura 13.17(a) se trazaron las tangentes horizontales en los puntos máximos y mínimos relativos. Se sabe que la curva sube desde la izquierda, tiene un máximo



(a)



(b)

FIGURA 13.17

relativo; después baja, tiene un mínimo relativo; después sube a un máximo relativo y baja a partir de éste. Se muestra un esbozo en la Figura 13.17(b).

En el Ejemplo 4 ocurren máximos relativos, así como máximos absolutos en $x = \pm 1$ [véase la Figura 13.17 (b)]. No existe mínimo absoluto.

EJERCICIOS 13.1

En los Problemas **1-28**, *determine cuándo la función es creciente o decreciente y halle cuando ocurren máximos o mínimos relativos. No trace la gráfica.*

1. $y = x^2 + 2$.

2. $y = x^2 + 4x + 3$.

3. $y = x - x^2 + 2$.

4. $y = 4x - x^2$.

5. $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$.

6. $y = 4x^3 - 3x^4$.

7. $y = x^4 - 2x^2$.

8. $y = -2 + 12x - x^3$.

9. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

10. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

11. $y = 3x^5 - 5x^3$.

12. $y = 5x - x^5$.

13. $y = -x^5 - 5x^4 + 200$.

14. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

15. $y = \frac{1}{x - 1}$.

16. $y = \frac{3}{x}$.

17. $y = \frac{10}{\sqrt{x}}$.

18. $y = \frac{x}{x + 1}$.

19. $y = \frac{x^2}{1 - x}$.

20. $y = x + \frac{4}{x}$.

21. $y = (x + 2)^3(x - 5)^2$.

22. $y = x^2(x + 3)^4$.

23. $y = e^{2x}$.

24. $y = x \ln x$.

25. $y = x^2 - 2 \ln x$.

26. $y = xe^x$.

27. $y = e^x + e^{-x}$.

28. $y = e^{-x^2}$.

En los Problemas **29-40**, *determine: intervalos en los cuales las funciones sean crecientes o decrecientes; máximos y mínimos relativos; simetría y las intercepciones que se puedan obtener con facilidad. Después trace las gráficas.*

29. $y = x^2 - 6x - 7$.

30. $y = 2x^2 - 5x - 12$.

31. $y = 3x - x^3$.

32. $y = x^4 - 16$.

33. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

34. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

35. $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$.

36. $y = x^5 - \frac{5}{4}x^4$.

37. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$.

38. $y = (3 - x)\sqrt{x}$.

39. $y = 2\sqrt{x} - x$.

40. $y = x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

41. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 2$, $f(3) = 1$, $f'(1) = f'(3) = 0$, $f(x) > 0$ para $x < 1$, $f(x) < 0$ para $1 < x < 3$, y considerando que f tiene un mínimo relativo cuando $x = 3$.

42. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 2$, $f(4) = 5$, $f'(1) = 0$, $f'(x) \geq 0$ para $x < 4$, considere que f tiene un máximo relativo cuando $x = 4$ y existe una tangente vertical cuando $x = 4$.

43. Si $c_f = 25{,}000$ es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio, $\bar{c}_f = c_f/q$ es una función decreciente para $q > 0$. Por lo tanto, al aumentar la producción q, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

44. Si $c = 4q - q^2 + 2q^3$ es una función de costos, ¿cuándo es creciente el costo marginal?

45. Dada la función de demanda $p = 400 - 2q$, diga cuando es creciente el ingreso marginal.

46. Para la función de costo $c = \sqrt{q}$, demuestre que los costos promedio y marginal son siempre decrecientes para $q > 0$.

47. Para un producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por $r = 240q + 57q^2 - q^3$. Determine la producción para el ingreso máximo.

48. Eswaran y Kotwal* consideran economías agrarias en las que existen dos tipos de trabajadores, permanentes y temporales. A los permanentes se les contrata a largo plazo y pueden recibir prestaciones como días de asueto y ayuda en emergencias. A los trabajadores temporales se les contrata por día y llevan a cabo tareas menores y rutinarias, como desyerbar, cosechar y desgranar. La diferencia z en el costo a valor actual de contratar a un trabajador permanente con respecto a la contratación de un trabajador temporal está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

en donde w_p y w_c son los salarios para mano de obra permanente y mano de obra temporal, respectivamente, b es una constante positiva y w_p es función de w_c. (a) Demuestre que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

(b) Si $dw_p/dw_c < b/(1 + b)$, pruebe que z es una función decreciente de w_c.

49. En el análisis que hace Shonle† de la contaminación térmica, la eficiencia E de una planta de energía está dada por

$$E = 0.71\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right),$$

en donde T_c y T_h son las temperaturas absolutas respectivas de los recipientes más caliente y más frío. Supóngase que T_c es una constante positiva y que T_h es positiva. Utilizando Cálculo, demuestre que al crecer T_h aumenta la eficiencia.

50. En un análisis que hace Renshaw* de la fijación de precios para el servicio telefónico local determina que el ingreso total r está dado por

$$r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b},$$

en donde p es un precio indexado por llamada, y a, b, F son constantes. Determine el valor de p que maximiza los ingresos.

51. En su modelo para los costos de almacenamiento y envío de materiales para un proceso manufacturero, Lancaster† deduce la siguiente función de costo:

$$C(k) = 100\left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right), \quad 1 \le k \le 100,$$

en donde $C(k)$ es el costo total (en dólares) de almacenamiento y transporte para 100 días de operación si se mueve una carga de k toneladas de material cada k días. (a) Halle $C(1)$. (b) ¿Para qué valor de k $C(k)$ tiene un mínimo? (c) ¿Cuál es el valor mínimo?

52. Cuando un buzo de aguas profundas experimenta descompresión, o un piloto se eleva a grandes altitudes, el nitrógeno puede burbujear en la sangre, ocasionando lo que por lo común se conoce con el nombre de *aeroembolia*. Supóngase que el porcentaje P de gente que sufre los efectos de este trastorno a una altitud de h miles de pies está dado por‡

$$P = \frac{100}{1 + 100{,}000e^{-0.36h}}.$$

¿Es P una función creciente de h?

---

* M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, Núm. 1 (1985), 162-77.

† J.I. Shonle, ***Environmental Applications of General Physics*** (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1975.

* E. Renshaw, "A Note of Equity and Efficiency in the Pricing of Local Telephone Services", *The American Economic Review*, 75, núm. 3 (1985), 515-18.

† P. Lancaster, *Mathematics: Models of the Real World* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976).

‡ Adaptado de G.E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physology*, 2ª ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 174).

13.2 Valores extremos

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, puede demostrarse que existe un valor máximo (absoluto) y un valor mínimo (absoluto), entre todos los valores de la función $f(x)$ para las x que están en $[a, b]$. A estos dos valores se les denomina **valores extremos** de f en ese intervalo. A esta importante propiedad de las funciones continuas se la denomina *teorema del valor extremo.*

Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función tiene tanto un valor máximo como un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo, las funciones que aparecen en la Figura 13.18 son continuas en el intervalo [1, 3]. Geométricamente, el teorema del valor extremo asegura que cada gráfica tiene un punto superior más alto, y un inferior (o punto más bajo) en ese intervalo.

Si el dominio en una función es un intervalo que contiene un punto de extremidad, para determinar los extremos *absolutos*, se debe examinar no sólo si la función tiene extremos relativos, sino que se deben tomar en consideración también los valores de $f(x)$ en los puntos de extremidad o finales. Aunque no se consideran tales puntos cuando se buscan máximos o mínimos relativos, sí pueden resultar ser máximos o mínimos *absolutos*. Se ilustra esto en el Ejemplo 1.

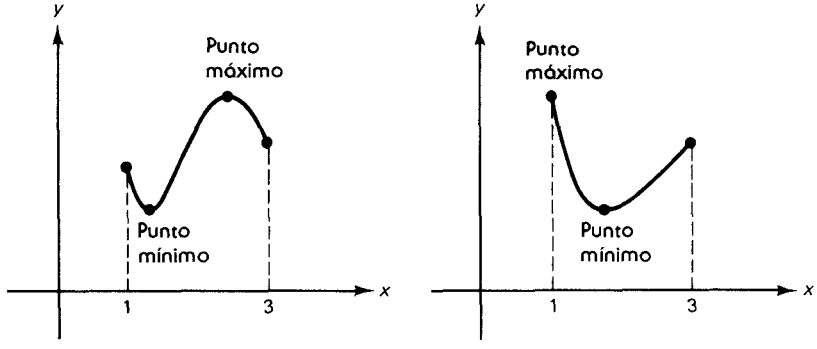


FIGURA 13.18

EJEMPLO 1

Encontrar cuándo ocurren extremos (relativos y absolutos) para $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ *en el intervalo cerrado [1, 4].*

Se observa que, f es continua, $f(x)$ debe asumir valores máximo y mínimo absolutos en [1, 4].

1. $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.
2. Fijando $f'(x) = 0$ se obtiene el valor crítico $x = 2$.
3. Los intervalos que hay que considerar son cuando $x < 2$ y cuando $x > 2$. Si $x < 2$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente; si $x > 2$, entonces $f'(x) > 0$ y f está creciendo.

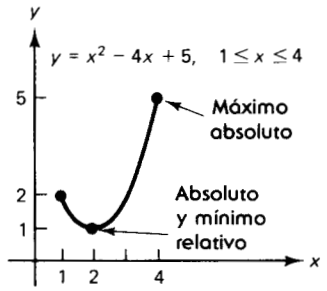


FIGURA 13.19

4. Así, existe un mínimo relativo cuando $x = 2$. Se presenta en la gráfica en el punto (2,1) (véase la Figura 13.19).
5. Como f es decreciente para $x < 2$, *es posible* que ocurra un máximo absoluto en el punto de extremo del lado izquierdo del dominio de f, es decir, cuando $x = 1$. De manera similar, como f es creciente para $x > 2$, *es posible* que ocurra un máximo absoluto en el punto de extremidad del lado derecho, es decir, cuando $x = 4$. Probando los puntos de extremidad, se tiene $f(1) = 2$ y $f(4) = 5$. Observando que $f(4) > f(1)$, se concluye que ocurre un máximo absoluto cuando $x = 4$. Cuando $x = 2$, se tiene un mínimo absoluto, que también es relativo.

EJERCICIOS 13.2

En los Problemas **1-8**, *encontrar cuándo ocurren máximos y mínimos absolutos para la función dada, en el intervalo dado.*

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad [-1, 2]$.

2. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, \quad [-2, 3]$.

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$.

4. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, \quad [0, 1]$.

5. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 3, \quad [\frac{1}{2}, 3]$.

6. $f(x) = x^{4/3}. \quad [-8, 8]$.

7. $f(x) = -3x^5 + 5x^3, \quad [-2, 0]$.

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$.

13.3 Concavidad

Ya se ha visto que la primera derivada ofrece una buena información para el trazado de curvas. Se utiliza para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y para ubicar máximos y mínimos relativos. Sin embargo, para asegurarse de conocer la forma verdadera de una curva puede requerirse una mayor cantidad de información. Por ejemplo, considérese la curva $y = f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$, entonces $x = 0$ es un valor crítico. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente; si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Por consiguiente, existe un mínimo relativo cuando $x = 0$. En la Figura 13.20 ambas curvas satisfacen las condiciones anteriores. Pero, ¿cuál de ellas describe en realidad la curva? Se puede resolver con facilidad esta cuestión utilizando la segunda derivada y la noción de *concavidad*.

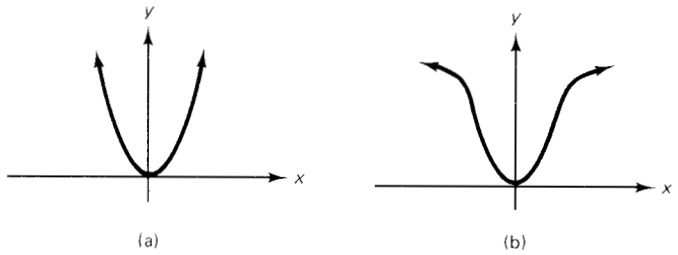


FIGURA 13.20

En la Figura 13.21 obsérvese que cada curva $y = f(x)$ "se dobla" (o se abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedarán por encima de ellas. Además, las pendientes de las rectas tangentes aumentan de valor al aumentar x. En la parte (a) las pendientes van de valores positivos pequeños a valores más grandes; en la parte (b) son negativos y tienden a cero (consecuentemente aumentan); en la parte (c) pasan de valores negativos a valores positivos. Dado que $f'(x)$ da la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que f' debe ser una función creciente. Para descubrir esto se dice que cada curva (o función f) es *cóncava hacia arriba*. En la Figura 13.22 puede observarse que cada curva está por debajo de las rectas tangentes y las curvas se doblan hacia abajo. Al crecer x, las pendientes de las rectas tangentes son *decrecientes*. Por ello, f' debe ser una función decreciente en estos casos, y se dice que f es *cóncava hacia abajo*.

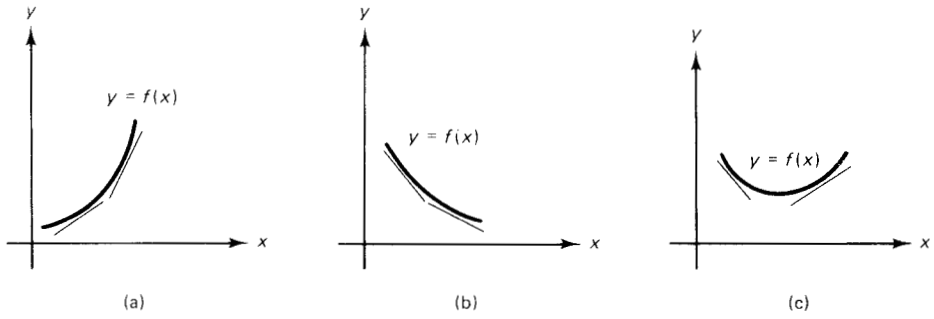


FIGURA 13.21

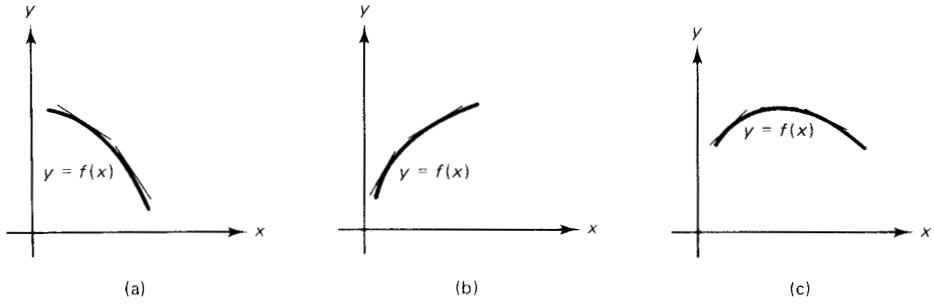


FIGURA 13.22

DEFINICIÓN

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces, se dice que f es ***cóncava hacia arriba*** *(**o bien cóncava hacia abajo**) en (a, b) si f' es creciente (o bien decreciente) en (a, b).*

ADVERTENCIA

La concavidad se refiere a si f', y no f, es creciente o decreciente. En la Figura 13.21(b) obsérvese que f es cóncava hacia arriba y decreciente, pero en la Figura 13.22(a) f es cóncava hacia abajo y decreciente.

Recuérdese: Si f es cóncava hacia arriba en un intervalo I, entonces geométricamente su gráfica se dobla hacia arriba en ese intervalo. Si f es cóncava hacia abajo, entonces su gráfica se dobla hacia abajo.

Debido a que f' es creciente cuando su derivada $f''(x)$ es positiva y f' es decreciente cuando $f''(x)$ es negativa, se puede establecer la siguiente regla:

Regla 4

Sea f' diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Se dice también que una función f es cóncava hacia arriba en un *punto* x_0 si existe un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual f sea cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que se consideran, si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en x_0. De modo semejante, f es cóncava hacia abajo en x_0 si $f''(x_0) < 0$.

EJEMPLO 1

Investigación de la concavidad.

a. $y = f(x) = (x - 1)^3 + 1$.

Para aplicar la Regla 4 se deben examinar los signos de y''. Ahora, $y' = 3(x - 1)^2$, por lo que $y'' = 6(x - 1)$. Así que f es cóncava hacia arriba cuando $6(x - 1) > 0$; es decir, cuando $x > 1$. Y f es cóncava hacia abajo cuando $6(x - 1) < 0$; es decir, cuando $x < 1$ (véase la Figura 13.23).

b. $y = x^2$.

Se tiene $y' = 2x$ y $y'' = 2$. Como y'' es siempre positiva, la gráfica de $y = x^2$ debe

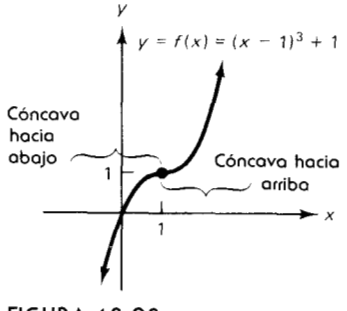


FIGURA 13.23

ser siempre cóncava hacia arriba, como en la Figura 13.20(a). La gráfica no puede tener la forma de la Figura 13.20(b) porque esa curva es en ocasiones cóncava hacia abajo.

Un punto de una gráfica como (1, 1) de la Figura 13.23, en el que la concavidad cambia de ser hacia abajo a ser hacia arriba, o viceversa, se denomina *punto de inflexión*. Alrededor de ese punto el signo de $f''(x)$ debe pasar de $-$a $+$ 0 de $+$ a $-$. En términos más precisos:

DEFINICIÓN

Una función f tiene un ***punto de inflexión*** *cuando $x = x_0$ si y sólo si f es continua en x_0 y f cambia de concavidad en x_0.*

Para investigar la concavidad y los puntos de inflexión de una función, en primer lugar se obtienen los valores de x en los que $f''(x)$ es 0 o indefinida. Estos valores de x son posibles ubicaciones de puntos de inflexión y determinan intervalos. Señalan en cada intervalo si $f''(x) > 0$ (f es cóncava hacia arriba) o bien $f'' < 0$ (f es cóncava hacia abajo). Si $f''(x)$ es 0 o no esta definida en $x = x_0$, y f es continua en x_0, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = x_0$, suponiendo que la concavidad cambia alrededor de x_0.

EJEMPLO 2

Investigar la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Se tiene que $y' = 24x^3 - 24x^2$, por lo que

$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x - 2).$$

Para encontrar cuándo $y'' = 0$, se igualan a 0 los dos factores de y''. Esto da $x = 0, \frac{2}{3}$. Como y'' nunca es indefinida, deben considerarse tres intervalos (Figura 13.24):

si $x < 0$, entonces $y'' = 24(-)(-) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(-) = -$, por lo que la curva es cóncava hacia abajo;

si $x > \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(+) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba (véase la Figura 13.25).

FIGURA 13.24

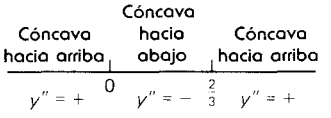


FIGURA 13.25

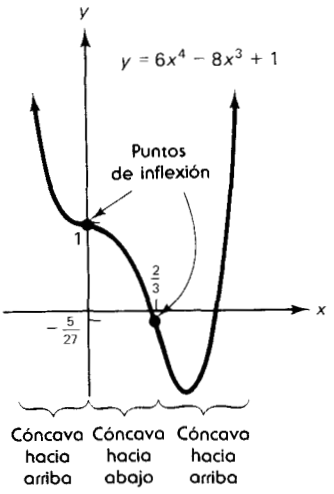


FIGURA 13.26

Ya que la concavidad cambia en $x = 0$ y $x = 2/3$, y f es continua ocurren aquí puntos de inflexión (Figura 13.26). En resumen, la curva es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(2/3, \infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(0, 2/3)$. Se tienen puntos de inflexión cuando $x = 0$ o bien $x = 2/3$. Estos puntos son $(0, 1)$ y $(2/3, -5/27)$.

ADVERTENCIA

Si $f''(x_0) = 0$, o f'' no está definida en x_0, esto no prueba que la gráfica de f tiene un punto de inflexión cuando $(x) = x_0$. Por ejemplo, si $f(x) = x_4$ entonces $f''(x) = 12x^2$ y $f''(0) = 0$. Pero $x < 0$ implica que $f''(x) > 0$ y $x > 0$ implica $f''(x) > 0$. En consecuencia, la concavidad no cambia y no existen puntos de inflexión (Figura 13.27).

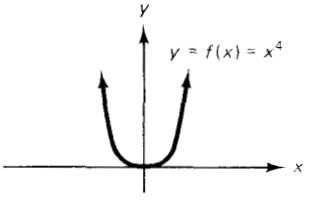


FIGURA 13.27

EJEMPLO 3

Trazar la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Intersecciones Si $x = 0$ entonces $y = 0$. Si $y = 0$ se obtiene $0 = x(2x^2 - 9x + 12)$. Resulta claro que $x = 0$ y utilizando la fórmula cuadrática para $2x^2 - 9x + 12 = 0$ resulta que no existen raíces reales. Por lo tanto, la única intercepción es $(0, 0)$.

Simetría Ninguna.

Máximos y mínimos Tomando $y = f(x)$, se tiene

Los valores críticos son $x = 1, 2$ (véase la Figura 13.28).

Si $x < 1$, entonces $f'(x) = 6(-)(-) = +$, por lo que, f es creciente;

si $1 < x < 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(-) = -$, por lo que, f es decreciente;

si $x > 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(+) = +$, por ello, f es creciente (véase la Figura 13.29).

si $x > 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(+) = +$,

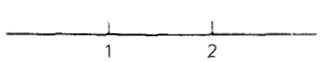


FIGURA 13.28

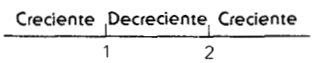


FIGURA 13.29

Existe un máximo relativo cuando $x = 1$ y un mínimo relativo cuando $x = 2$.

Concavidad

$$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3).$$

Tomando $f''(x) = 0$ se obtiene un posible punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$. Cuando $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ y f es cóncava hacia abajo. Cuando $x > \frac{3}{2}$, entonces $f''(x) > 0$ y f es cóncava hacia arriba (véase la Figura 13.30).

Puesto que cambia la concavidad, existe un punto de inflexión cuando $x = \frac{3}{2}$.

Análisis Ahora se hallarán las coordenadas de los puntos importantes de la gráfica (y cualesquiera otros puntos si es que existe duda con respecto al comportamiento de la curva).

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	5	$\frac{9}{2}$	4

Al aumentar x, la función es primero cóncava hacia arriba y crece hasta un máximo relativo en (1, 5); después decrece hasta $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$; luego, se vuelve cóncava hacia arriba pero continúa decreciendo hasta que llega a un mínimo relativo en (2, 4); de allí en adelante crece y continúa siendo cóncava hacia arriba (véase la Figura 13.31).

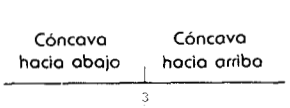


FIGURA 13.30

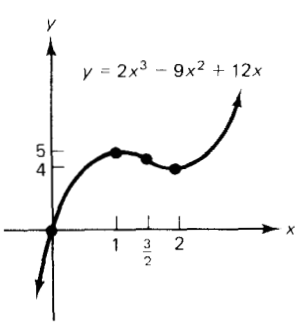


FIGURA 13.31

EJERCICIOS 13.3

En los Problemas **1-14**, *determine la concavidad y los valores de x en donde ocurren puntos de inflexión. No trace las gráficas.*

1. $y = -2x^2 + 4x$.

2. $y = 3x^2 - 6x + 5$.

3. $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x$.

4. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

5. $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$.

6. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$.

7. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

8. $y = x + \frac{1}{x}$.

9. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

10. $y = \frac{x^2}{x+3}$.

11. $y = e^x$.

12. $y = e^x - e^{-x}$.

13. $y = xe^x$.

14. $y = xe^{-x}$.

En los Problemas **15-42**, *trace cada curva. Determine: intervalos sobre los cuales la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría; las intersecciones con los ejes que se puedan obtener con facilidad.*

15. $y = x^2 + 4x + 3$.

16. $y = x^2 + 2$.

17. $y = 4x - x^2$.

18. $y = x - x^2 + 2$.

19. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

20. $y = 3x - x^3$.

21. $y = \frac{x^3}{3} - 4x$.

22. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

23. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.

24. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

25. $y = 4x^3 - 3x^4$.

26. $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$.

27. $y = -2 + 12x - x^3$.

28. $y = (3 + 2x)^3$.

29. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

30. $y = \frac{x^5}{100} - \frac{x^4}{20}$.

31. $y = 5x - x^5$.

32. $y = x(1 - x)^3$.

33. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

34. $y = 3x^5 - 5x^3$.

35. $y = 4x^2 - x^4$.

36. $y = x^4 - 2x^2$.

37. $y = x^{1/3}(x - 8)$.

38. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$.

39. $y = 4x^{1/3} + x^{4/3}$.

40. $y = 2x\sqrt{x + 3}$.

41. $y = 2x + 3x^{2/3}$.

42. $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$.

43. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 2$ y $f''(x) > 0$ si $x > 2$.

44. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 2$, $f'(3) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x > 3$, y $f''(x) < 0$ para $x > 3$.

45. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, y $f''(x) < 0$ para toda x.

46. Trace la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 4$, tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) > 0$ para $x < 3$ y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para $x > 3$.

47. Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda $p = 100/(q + 2)$ es decreciente y cóncava hacia arriba para $q > 0$.

48. Para la función de costo $c = 3q^2 + 5q + 6$, demuestre que la gráfica de la función de costo promedio $\bar{c}$ siempre es cóncava hacia arriba para $q > 0$.

49. El número de especies de plantas de un terreno puede depender del tamaño de éste. Por ejemplo, en la Figura 13.32 se observa que en lotes de 1 m^2 existen tres especies (A, B y C en el lote del lado izquierdo; A, B y D en el lote del lado derecho), y

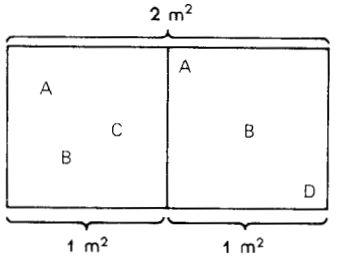


FIGURA 13.32

en un terreno de 2 m^2 existen cuatro especies (A, B, C y D).

En un estudio de plantas arraigadas en cierta región geográfica,* se determinó que el número promedio de especies S, que aparece en terrenos de tamaño A(en metros cuadrados) está dado por

$$S = f(A) = 12\sqrt[4]{A}, \qquad 0 \leq A \leq 625.$$

Trace la gráfica de f. (*Nota*: La gráfica debe ser ascendente y cóncava hacia abajo. Por ello, el número de especies es creciente con respecto al área, pero a una tasa decreciente.)

50. En un análisis de un artículo de calidad inferior Persky** considera una función de la forma

$$g(x) = e^{(U_0/A)}e^{-x^2/(2A)},$$

en donde x es la cantidad de un artículo, U_0 es una constante que representa utilidad y A es una constante positiva. Persky afirma que la gráfica de g es cóncava hacia abajo para $x < \sqrt{A}$ y cóncava hacia arriba para $x > \sqrt{A}$. Verifique esto.

51. En un experimento psicológico concerniente a la respuesta condicionada†, ciertos sujetos escucharon 4 tonos, denominados 0, 1, 2 y 3. En un principio se condicionó a los sujetos al tono 0 al recibir una pequeña descarga cada vez que se oía este tono. Posteriormente cuando cada uno de los cuatro tonos (estímulos) se escuchó sin sacudidas, se grabaron las respuestas de los sujetos por medio de un aparato de rastreo que mide la reacción galvánica de la piel. Se determinó la respuesta promedio a cada estímulo (sin descargas) y los resultados se graficaron en un plano coordenado en donde los ejes x y y representan los estímulos (0, 1, 2, 3) y las respuestas galvánicas promedio, respectivamente. Se estableció que los puntos se ajustan a una curva que es aproximada por la gráfica de $y = 12.5 + 5.8(0.42)^x$. Demuestre que esta función es decreciente y cóncava hacia arriba.

52. En un estudio sobre los efectos de la privación de alimento‡, se alimentó a un insecto hasta que se satisfizo por completo su apetito. Después se le privó de alimento durante t horas (periodo de privación). Al final de dicho periodo se volvió a dar de comer al insecto hasta que de nuevo se satisfizo su apetito. Se descubrió estadísticamente que el peso H (en gramos) del alimento que se consumió en esta ocasión era una función de t, en donde

$$H = 1.00[1 - e^{-(0.0464t + 0.0670)}].$$

Aquí H es una medida del hambre. Demuestre que H es creciente con respecto a t, y su gráfica, cóncava hacia abajo.

53. En un experimento sobre la dispersión de cierto insecto§, se colocó a gran número de éstos en un punto de liberación en un campo abierto. Rodeando este lugar había trampas que estaban situadas en una disposición circular concéntrica a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etc., a partir del punto mencionado. Después de 24 horas de que fueron liberados los insectos se contó el número de ellos que estaban en cada trampa. Se estableció que a una distancia de r metros del lugar de liberación el número promedio de insectos detenidos en una trampa era n, en donde

$$n = f(r) = 0.1 \ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8, \qquad 1 \leq r \leq 10.$$

(a) Compruebe que la gráfica de f siempre desciende y es cóncava hacia arriba. (b) Trace la gráfica de f. (c) Cuando $r = 5$, ¿a qué tasa disminuye el número promedio de insectos en una trampa con respecto a la distancia?

* Adaptado de R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

** A.L. Persky, "An inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (1985), 67-69.

† Adaptado de C.I. Hovland, "The Generalization of Conditioned Responses: I. The Sensory Generalization of Conditioned Responses with Varying Frequencies of Tone", *Journal of General Psychology*, 17 (1937), 125-48.

‡ C.S. Holling, "The Functional Response of Invertebrate Predators to Prey Density", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 48 (1966).

§ Adaptado de R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

13.4 Prueba de la segunda derivada

Se puede utilizar la segunda derivada para probar ciertos valores críticos para extremos relativos. Obsérvese en la Figura 13.33 que cuando $x = x_0$ existe una tangente horizontal; es decir, $f'(x_0) = 0$. Además, alrededor de x_0 la gráfica está por encima de la recta tangente [es decir $f''(x_0) > 0$]. Esto conduce a la conclusión de que existe un mínimo relativo en x_0. Por otro lado, alrededor de x_1 la gráfica está por debajo de la recta tangente [es decir, $f''(x_1) < 0$]. Como la recta tangente es horizontal en x_1, se concluye que existe un máximo relativo ahí. A esta técnica que consiste en examinar la segunda derivada en puntos en los que la primera derivada es 0 se le denomina *prueba de la segunda derivada* para extremos relativos.

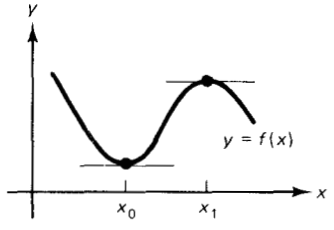


FIGURA 13.33

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Supóngase que $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0;

si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Se debe resaltar que **la prueba de la segunda derivada *no* se aplica cuando $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$.** En estas condiciones, en x_0 puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo, o ninguno de ellos. En tales casos debe utilizarse la prueba de la primera derivada para analizar lo que está sucediendo en x_0.

EJEMPLO 1

Investigar en lo siguiente si hay máximos y mínimos relativos. Utilizar, si es posible, la prueba de la segunda derivada.

a. $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x).$$

$$y'' = -4x.$$

Al despejar $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = \pm 3$. Si $x = 3$, entonces $y'' = -4(3) = -12 < 0$. De modo que, existe un máximo relativo cuando $x = 3$. Si $x = -3$, entonces $y'' = -4(-3) = 12 > 0$, por lo que existe un mínimo relativo cuando $x = -3$ (véase la Figura 13.5).

b. $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

$$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1).$$
$$y'' = 72x^2 - 48x.$$

Despejando $y'' = 0$ resultan los valores críticos $x = 0, 1$. Si $x = 1$, entonces $y'' > 0$, de manera que existe un mínimo relativo cuando $x = 1$. Si $x = 0$, entonces $y'' = 0$ y la prueba de la segunda derivada *no* se aplica. Ahora se utiliza la prueba de la primera derivada para analizar lo que está sucediendo en 0. Si $x < 0$, entonces $y' < 0$; si $0 < x < 1$, entonces $y' < 0$. Por consiguiente, no existen máximo o mínimo relativo cuando $x = 0$ (Véase la Figura 13.26).

c. $y = x^4$.

$$y' = 4x^3.$$
$$y'' = 12x^2.$$

Si se despeja $y' = 0$ se obtiene el valor crítico $x = 0$. Si $x = 0$, entonces $y'' = 0$ y no se aplica la prueba de la segunda derivada. Como $y' < 0$ para $x < 0$, y $y' > 0$ para $x > 0$, con la prueba de la primera derivada puede verse que existe un mínimo relativo cuando $x = 0$ (véase la Figura 13.27).

Si una función continua tiene *exactamente un* extremo relativo en un intervalo, puede demostrarse que el extremo relativo debe también ser un extremo *absoluto* en el intervalo. Para ilustrar esto, en el Ejemplo 1(c), $y = x^4$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 0$ y no existe ningún otro extremo relativo. Como $y = x^4$ es continua, este mínimo relativo es también un mínimo absoluto para la función.

EJEMPLO 2

Si $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, *determinar cuándo ocurren extremos absolutos en el intervalo* $(0, \infty)$.

Se tiene

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x + 1)(x - 3).$$

El único valor crítico en el intervalo $(0, \infty)$ es 3. Aplicando a este punto la prueba de la segunda derivada se obtiene

$$f''(x) = 6x - 6.$$
$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0.$$

Por ello, existe un mínimo relativo cuando $x = 3$. Como este es el único extremo relativo en $(0, \infty)$ y f es continua en este intervalo, se concluye, de acuerdo con el análisis anterior, que existe un mínimo absoluto $x = 3$.

EJERCICIOS 13.4

En los Problemas **1-10,** *investigue si existen máximos y mínimos relativos. Utilice si es posible la prueba de la segunda derivada. En los Problemas* **1-4,** *establezca si los extremos relativos son también extremos absolutos.*

1. $y = x^2 - 5x + 6$.

2. $y = -2x^2 + 6x + 12$.

3. $y = -4x^2 + 2x - 8$.

4. $y = 3x^2 - 5x + 6$.

5. $y = x^3 - 27x + 1$.

6. $y = x^3 - 12x + 1$.

7. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

8. $y = x^4 - 2x^2 + 4$.

9. $y = 2x^4 + 2$.

10. $y = -x^7$.

13.5 Asíntotas

En esta sección se concluye el análisis de las técnicas que se utilizan para trazar curvas investigando las funciones que tienen *asíntotas*. Básicamente, una asíntota es una recta a la que la curva se aproxima cada vez más en forma arbitraria. Por ejemplo, en todas las secciones de la Figura 13.34, la línea punteada $x = a$ es una asíntota. Pero, para hablar con precisión, es necesario hacer uso de los límites infinitos. Obsérvese en la Figura 13.34(a) que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve infinitamente positiva.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

En la Figura 13.34(b), cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve infinitamente negativa:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

En la Figura 13.34(c) y (d), se tiene que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,$$

En términos generales, puede decirse que todas las gráficas de la Figura 13.34 tienen una "explosión" alrededor de la recta vertical $x = a$, en el sentido de que un límite de $f(x)$ en a es ∞ o $-\infty$. A la recta $x = a$ se la denomina una asíntota vertical para la gráfica. Una asíntota vertical no es parte de la curva pero es un auxiliar importante para trazarla porque parte de la gráfica se aproxima a la asíntota. La explosión alrededor de $x = a$ ocasiona que la función sea discontinua en a.

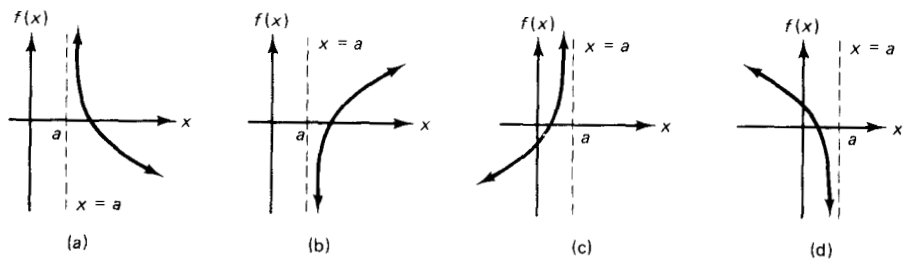


FIGURA 13.34

DEFINICIÓN

La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** *para la gráfica de la función f si y sólo cuando menos uno de los siguientes planteamientos es cierto:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ (or } -\infty)$$

o bien

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ (or } -\infty).$$

Para determinar las asíntotas verticales, se deben obtener valores de x alrededor de los cuales $f(x)$ crezca o disminuya sin límite. Para una función racional (un cociente de dos polinomios), estos valores de x son precisamente aquellos para los cuales el denominador es cero, pero el numerador es diferente de cero. Por ejemplo, considérese la función racional

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Cuando x es 2, el denominador es 0 pero el numerador no es 0. Si x es ligeramente superior a 2, entonces $x - 2$ es, al mismo tiempo positivo y está cercano a 0, y $3x - 5$ está cercano a 1. Por ello, $(3x - 5)/(x - 2)$ es muy grande, por lo que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x - 5}{x - 2} = \infty.$$

Este límite es suficiente para concluir que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Como el interés primordial radica en el comportamiento de la función alrededor de una asíntota vertical, vale la pena examinar lo que sucede con esta función cuando x tiende a 2 por la izquierda. Si x es ligeramente inferior a 2, entonces x - 2 está muy cerca de 0 pero es negativo, y $3x - 5$ está cerca de 1. Por ello $(3x - 5)/(x - 2)$ es "muy negativo", de manera que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x - 5}{x - 2} = -\infty.$$

Se concluye que la función crece sin límite cuando $x \to 2^+$ y disminuye sin límite cuando $x \to 2^-$. La gráfica se presenta en la Fig. 13.35.

En resumen, se tiene una regla para las asíntotas verticales.

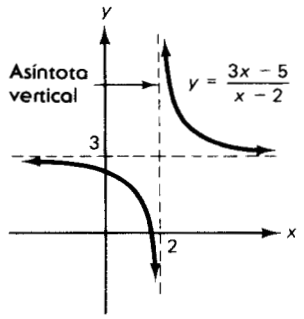


FIGURA 13.35

REGLA DE LAS ASÍNTOTAS VERTICALES PARA FUNCIONES RACIONALES

Supóngase que $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde P y Q son funciones polinomiales. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si, y sólo si, $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$.

EJEMPLO 1

Determinar las asíntotas verticales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Como f es una función racional se puede aplicar la regla de la asíntota vertical. Se tiene

$$f(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 3)(x - 1)},$$

por lo que el denominador es 0 cuando x es 3 o 1. Ninguno de estos valores hace que el numerador se convierta en 1. Por ello, las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales (véase la Figura 13.36).

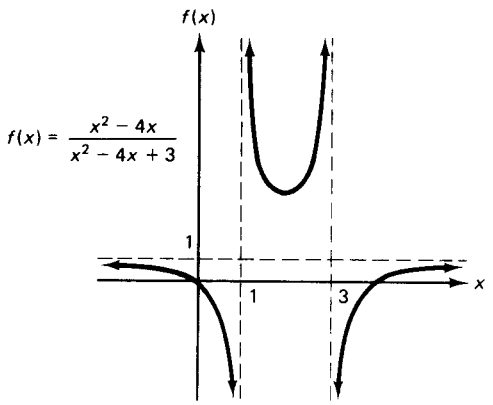


FIGURA 13.36

Una curva $y = f(x)$ puede tener otra clase de asíntotas. En la Figura 13.37(a), cuando x aumenta sin límite ($x \to \infty$), la gráfica se aproxima a la línea horizontal $y = b$. Es decir,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

En la Figura 13.37(b), conforme x se vuelve negativamente infinita, la gráfica se aproxima a la recta horizontal $y = b$. Es decir,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

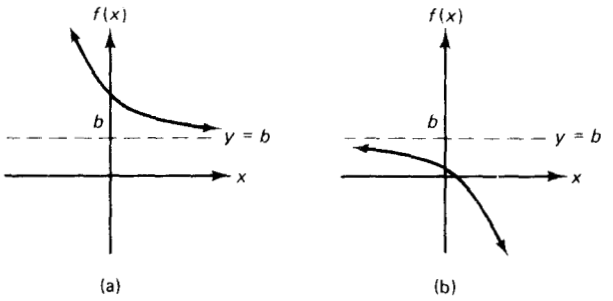


FIGURA 13.37

En ambos casos, a la recta punteada $y = b$ se le denomina asíntota horizontal para la gráfica. Es una recta horizontal alrededor de la cual se "estabiliza" la gráfica, cuando $x \to \infty$ o bien cuando $x \to -\infty$.

Aunque la gráfica de una recta horizontal se estabiliza alrededor de sí misma cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, no se considera que las rectas tengan asíntotas. En resumen, se tiene la siguiente definición.

Definición

Sea f una función no lineal. La recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** *para la gráfica de f si y sólo cuando menos uno de los siguientes planteamientos es cierto:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Para evaluar si existen asíntotas horizontales, se deben encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Para ilustrar esto, considérese de nuevo

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Como esta función es racional, pueden utilizarse las técnicas que se revisaron en la Secc. 10.2 para encontrar los límites. Como el término dominante en el numerador es $3x$ y el término dominante en el denominador es x, se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to \infty} 3 = 3.$$

Por ello, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal (revísese de nuevo la Figura 13.35). También,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3.$$

De modo que la gráfica se estabiliza cerca de la recta $y = 3$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 2

Obtener las asíntotas horizontales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Por ello, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. Se obtiene el mismo resultado cuando $x \to -\infty$ (revísese de nuevo la Figura 13.36).

De la Sección 10.2, cuando el numerador de una función racional tiene un grado superior al del denominador, no existe límite cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. De esto se concluye que *en los casos en los que el grado del numerador de una función racional sea mayor que el grado del denominador, la gráfica de la función no puede tener asíntotas horizontales.*

EJEMPLO 3

Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de $y = f(x) = x^3 + 2x$.

Se comienza con las asíntotas verticales. Esta es una función racional con denominador 1, que nunca es cero. Por la regla de la asíntota vertical, no existen asíntotas verticales. Como el grado del numerador (3) es mayor que el grado del denominador (0), no existen asíntotas horizontales. Sin embargo, en seguida se examina el comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Por consiguiente, cuando $x \to \infty$ la gráfica se debe extender indefinidamente hacia arriba, y cuando $x \to -\infty$, la gráfica debe extenderse en forma indefinida hacia abajo (véase la Figura 13.38).

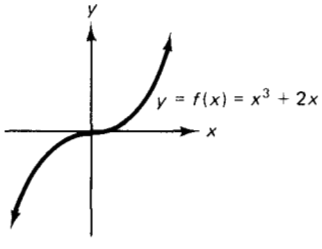


FIGURA 13.38

Los resultados obtenidos en el Ejemplo 3 se pueden generalizar a cualquier función polinomial.

> Una función polinomial no tiene asíntotas horizontal ni vertical.

EJEMPLO 4

Encontrar las asíntotas horizontal y vertical para la gráfica de $y = e^x - 1$.

Investigando si existen asíntotas horizontales, se hace $x \to \infty$ Entonces e^x aumenta sin limitación, consecuentemente,

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - 1) = \infty.$$

De modo que, la gráfica no se estabiliza cuando $x \to \infty$. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$, entonces $e^x \to 0$ y, así,

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} 1 = 0 - 1 = -1.$$

Por lo tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntota vertical, puesto que $e^x - 1$ no aumenta ni disminuye sin limitación con respecto a ningún valor fijo de x (véase la Figura 13.39).

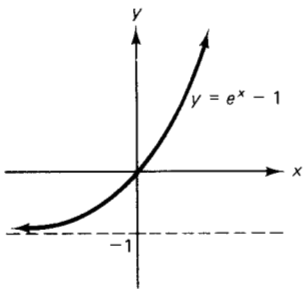


FIGURA 13.39

EJEMPLO 5

Trazar la gráfica de $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Intercepciones Cuando $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{4}$. Si $y = 0$, entonces $0 = 1/(4 - x^2)$, que no tiene solución. Por consiguiente, $(0, \frac{1}{4})$ es la única intersección.

Simetría Existe simetría sólo con respecto al eje y: reemplazando x por $-x$ se obtiene

$$y = \frac{1}{4 - (-x)^2} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{4 - x^2},$$

que es la misma ecuación original.

Asíntotas Investigando si existen asíntotas horizontales, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

De igual manera,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0.$$

Consecuentemente, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. En virtud de que el denominador de $1/(4 - x^2)$ es 0 cuando $x = \pm 2$, y el numerador no es 0 para estos valores de x, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

Máximos y mínimos Dado que $y = (4 - x^2)^{-1}$,

$$y' = -1(4 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}.$$

Se observa que y' es 0 cuando $x = 0$ y y' es indefinida cuando $x = \pm 2$. Sin embargo, sólo 0 es un valor crítico. Si $x < -2$, entonces $y' < 0$; si $-2 < x < 0$, entonces $y' < 0$; si $0 < x < 2$, entonces $y' > 0$; si $x > 2$, entonces $y' > 0$. La función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$ y $(2, \infty)$ (véase la Figura 13.40). Existe un mínimo relativo cuando $x = 0$.

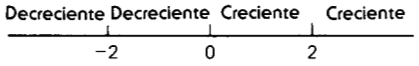


FIGURA 13.40

Concavidad

$$y'' = \frac{(4 - x^2)^2(2) - (2x)2(4 - x^2)(-2x)}{(4 - x^2)^4}$$

$$= \frac{2(4 - x^2)[(4 - x^2) - (2x)(-2x)]}{(4 - x^2)^4} = \frac{2(4 + 3x^2)}{(4 - x^2)^3}.$$

Haciendo $y'' = 0$, no se tienen raíces reales. Sin embargo, y'' es indefinida cuando $x = \pm 2$. Por ello, la concavidad puede cambiar alrededor de estos valores. Si $x < -2$, entonces $y'' < 0$; si $-2 < x < 2$, entonces $y'' > 0$; si $x > 2$, entonces $y'' < 0$. La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-2, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$ (véase la Figura 13.41). Aunque la concavidad cambia alrededor de $x = \pm 2$, estos valores de x no se encuentran en el dominio de la función original y, en consecuencia, no proporcionan puntos de inflexión.

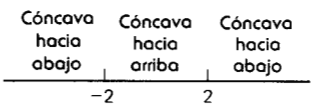


FIGURA 13.41

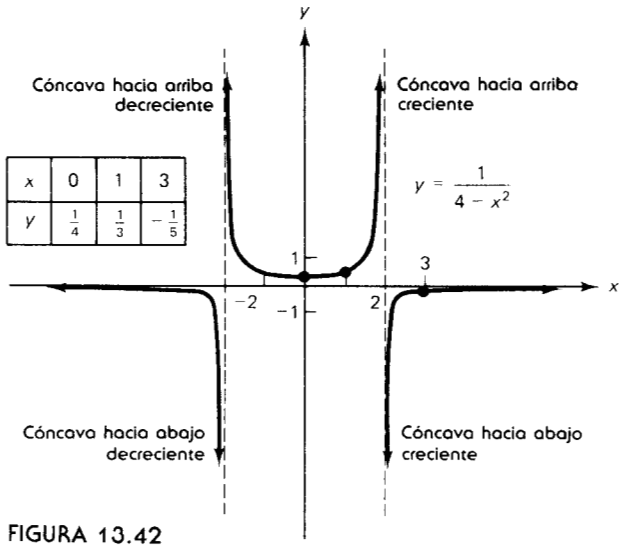


FIGURA 13.42

Análisis Situando los puntos que aparecen en la tabla de la Figura 13.42, algunos de ellos escogidos arbitrariamente, y utilizando la información anterior, se obtiene la gráfica que aparece aquí. Por simetría la tabla sólo tiene $x \geq 0$.

EJEMPLO 6

Trazar la gráfica de $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Intersecciones Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$; cuando $y = 0$, entonces $x = 0$. Así que (0, 0) es la única intersección.

Simetría Existe simetría sólo con respecto al origen: reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene

$$-y = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{4x}{x^2 + 1},$$

que es la misma ecuación original.

Asíntotas Investigando si existen asíntotas horizontales, se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x} = 0,$$

y, análogamente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = 0.$$

Por lo tanto, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Como el denominador de $4x/(x^2 + 1)$ nunca es 0, no existe asíntota vertical.

Máximos y mínimos Si $y = f(x)$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(4) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(1 + x)(1 - x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

De $f'(x)$, los valores críticos son $x = \pm 1$. por lo que es necesario considerar tres intervalos.

Si $x < -1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(-)(+)}{(+)} = (-)$ y f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(+)(+)}{(+)} = (+)$ y f es creciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(+)(-)}{(+)} = (-)$ y f es decreciente (véase la Figura 13.43).

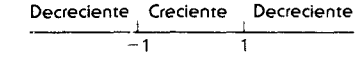


FIGURA 13.43

Existe un mínimo relativo cuando $x = -1$ y un máximo relativo cuando $x = 1$.

Concavidad Ya que $f'(x) = \dfrac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$,

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-8x) - (4 - 4x^2)(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4}$$
$$= \frac{8x(x^2 + 1)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}.$$

Si $f''(x) = 0$, se observa que los posibles puntos de inflexión se tienen cuando $x = \pm\sqrt{3}, 0$. Es necesario considerar cuatro intervalos.

Si $x < -\sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \frac{8(-)(-)(-)}{(+)} = (-)$ y f es cóncava hacia abajo;

si $-\sqrt{3} < x < 0$, entonces $f''(x) = \frac{8(-)(+)(-)}{(+)} = (+)$ y f es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \frac{8(+)(+)(-)}{(+)} = (-)$ y f es cóncava hacia abajo;

si $x > \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \frac{8(+)(+)(+)}{(+)} = (+)$ y f es cóncava hacia arriba (véase la Figura 13.44).

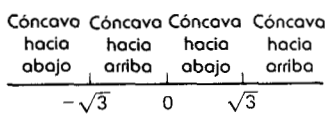


FIGURA 13.44

Ocurren puntos de inflexión cuando $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

Análisis Después de considerar toda la información anterior, en la Figura 13.45 se presenta la gráfica de $y = 4x/(x^2 + 1)$ junto con una tabla de los puntos importantes.

x	0	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
y	0	2	$\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

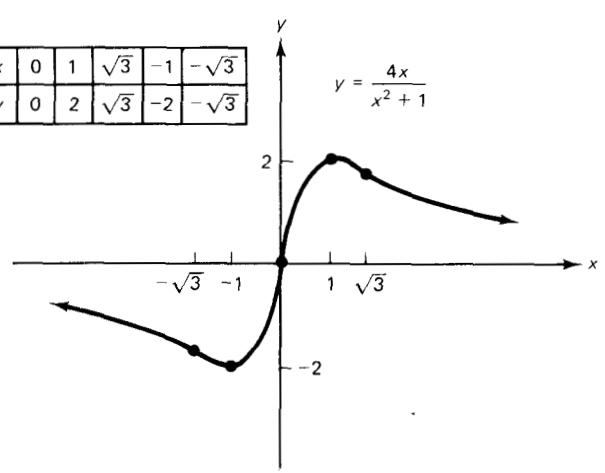


FIGURA 13.45

EJERCICIOS 13.5

En los Problemas **1-20**, *obtenga las asíntotas verticales y horizontales para las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.*

1. $y = \dfrac{x}{x+1}$.

2. $y = \dfrac{x+1}{x}$.

3. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$.

4. $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$.

5. $y = \dfrac{4}{x}$.

6. $y = -\dfrac{4}{x^2}$.

7. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

8. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

9. $y = x^2 - 5x + 8$.

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2-9}$.

11. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x-6}$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{5}$.

13. $y = \dfrac{4}{x-6} + 4$.

14. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2-9x+4}$.

15. $f(x) = \dfrac{3-x^4}{x^3+x^2}$.

16. $y = \dfrac{x^2+x}{x}$.

17. $y = \dfrac{x^2-3x-4}{1+4x+4x^2}$.

18. $y = \dfrac{x^4+1}{1-x^4}$.

19. $y = 2e^{x+2} + 4$.

20. $f(x) = e^{-x}$.

En los problemas **21-34**, *trace cada curva. Determine: intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría; asíntotas verticales y horizontales; las intercepciones con los ejes que se puedan obtener de manera sencilla.*

21. $y = \dfrac{3}{x}$.

22. $y = \dfrac{1}{x-1}$.

23. $y = \dfrac{x}{x+1}$.

24. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

25. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

26. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

27. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

28. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

29. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

30. $y = \dfrac{1-x}{x^2}$.

31. $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$.

32. $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

33. $y = x + \dfrac{1}{x+1}$.

34. $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

35. Trazar la gráfica de una función f tal que $f(0)$, existe una asíntota horizontal $y = 1$, para $x \to \pm\infty$, existe una asíntota vertical $x = 2$, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para $x > 2$.

36. Trazar la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, existe una asíntota horizontal $y = 2$ para $x \to \pm\infty$, existe una asíntota vertical $x = -1$, tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) > 0$ para $x < -1$ y tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) < 0$ para $x > -1$.

37. Trazar la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, existe una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, existen asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < -1$ y $-1 < x < 2$ como $f''(x) < 0$ para $x > 2$.

38. Trazar la gráfica de una función f tal que $f(-1) = 0, f(0) = 1, f(3) = 0$, existe una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, existen asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 1, f''(x) < 0$ para $x < -2$ y $f'(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ y $1 < x < 3$.

39. En un análisis del patrón de tiempos en compras, Mantell y Sing* utilizan la curva

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

como modelo matemático. Afirman que $y = 1/b$ es una asíntota. Verifique esto.

40. Trace las gráficas de $y = 6 - 3e^{-x}$ y $y = 6 + 3e^{-x}$. Demuestre que son asintóticas con respecto a la misma recta. ¿Cuál es la ecuación de esta línea?

* L.H. Mantell y F.P. Sing, *Economics for Business Decisions* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972), p. 107.

41. Para un producto nuevo, el número de millares de paquetes vendidos por año y después de t años de su introducción se pronostica mediante

$$y = f(t) = 150 - 76e^{-t}.$$

Demuestre que $y = 150$ es una asíntota horizontal para la gráfica. Esto prueba que después de que el producto se establece entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

13.6 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 13.1 función creciente, función decreciente, máximo relativo, mínimo relativo, extremo relativo, extremo absoluto, valor crítico, punto crítico, prueba de la primera derivada

Sección 13.2 teorema del valor extremo

Sección 13.3 cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, punto de inflexión

Sección 13.4 prueba de la segunda derivada

Sección 13.5 asíntota vertical, asíntota horizontal, regla de la asíntota vertical para funciones racionales

RESUMEN

El cálculo es un gran auxiliar para trazar la gráfica de una función. Se utiliza la primera derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y para ubicar máximos y mínimos relativos. Si $f'(x)$ es positiva en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo y su gráfica asciende (de izquierda a derecha). Si $f'(x)$ es negativa en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo y su gráfica desciende.

Un punto (x_0, y_0) de una gráfica en el que $f'(x)$ es 0 o bien no está definida es candidato a ser un extremo local o relativo, y a x_0 se le denomina valor crítico. Para que ocurra un extremo relativo en x_0, la primera derivada debe cambiar de signo alrededor de x_0. El siguiente procedimiento es la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para extremos relativos

1. Obtener $f'(x)$.
2. Hallar todos los valores de x en donde $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no esté definida.
3. En los intervalos sugeridos por los valores que se obtienen en el paso 2, determinar si f es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente ($f'(x) < 0$).
4. Para cada valor crítico x_0, en el que f es continua, determinar si $f'(x)$ cambia de signo a medida que x crece pasando por x_0. Existe un máximo relativo cuando $x = x_0$ si $f'(x)$ cambia de + a −, y un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de − a +. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no existe extremo relativo cuando $x = x_0$.

Bajo ciertas condiciones es seguro que una función tenga extremos absolutos. El teorema del valor extremo establece que si f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo.

Si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces para localizar extremos absolutos no sólo se considera en dónde ocurren extremos relativos, sino que también se examina $f(x)$ en los puntos finales del intervalo.

Se utiliza la segunda derivada para determinar si existe concavidad y para identificar los puntos de inflexión. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se curva hacia arriba. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en dicho intervalo y su gráfica se curva hacia abajo. Un punto de una gráfica en donde cambia la concavidad se denomina punto de inflexión. El punto (x_0, y_0) de la gráfica es un posible punto de inflexión si $f''(x_0)$ es 0 o no está definida.

La segunda derivada también proporciona un medio de investigar en busca de valores críticos para extremos relativos.

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Supóngase que $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0;

si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Las asíntotas son también útiles para trazar curvas. Las gráficas se "disparan" cerca de asíntotas verticales y se "estabilizan" cerca de asíntotas horizontales. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si $\lim f(x) = \infty$ o bien $-\infty$ cuando x tiende a a por la derecha ($x \to a^+$) o por la izquierda ($x \to a^-$). Para el caso de las funciones racionales, $f(x) = P(x/Q(x)$, se pueden determinar asíntotas verticales sin evaluar límites. Si $Q(a) = 0$ pero $P(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de una función f si cuando menos uno de los siguientes planteamientos es cierto:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

En particular, una función polinomial no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Además, una función racional cuyo numerador es de mayor grado que el del denominador no tiene asíntota horizontal.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1** *y* **2**, *halle las asíntotas horizontales y verticales.*

1. $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 16}$.

2. $y = \dfrac{x + 1}{4x - 2x^2}$.

En los Problemas **3** *y* **4**, *obtenga los valores críticos.*

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$.

4. $f(x) = (x - 1)^2(x + 6)^4$.

En los Problemas **5** *y* **6**, *determine intervalos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.*

5. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

6. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$.

En los Problemas **7** *y* **8**, *determine intervalos sobre los cuales la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.*

7. $f(x) = x^4 - x^3 - 14$.

8. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

En los Problemas **9** *y* **10**, *investigue si existen extremos relativos.*

9. $f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3}$.

10. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

En los Problemas **11** *y* **12**, *obtenga los valores de x en donde ocurren puntos de inflexión.*

11. $y = x^5 - 5x^4 + 3x$.

12. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

En los Problemas **13** *y* **14**, *investigar si existen extremos absolutos en el intervalo dado.*

13. $y = 3x^4 - 4x^3$, $[0, 2]$.

14. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[0, 3]$.

En los Problemas **15–24**, *trace las gráficas de las funciones. Indique los intervalos sobre los cuales la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo; indique los puntos máximos relativos, los puntos mínimos relativos, los puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, las asíntotas verticales, la simetría y las intersecciones que se puedan obtener de manera fácil.*

15. $y = x^2 - 2x - 24$.

16. $y = x^3 - 27x$.

17. $y = x^3 - 12x + 20$.

18. $y = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 150$.

19. $y = x^3 + x$.

20. $y = \frac{x + 2}{x - 3}$.

21. $f(x) = \frac{100(x + 5)}{x^2}$.

22. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

23. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

24. $f(x) = 1 + \ln(x^2)$.

25. Trace la gráfica de la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Incluya los extremos relativos y los puntos de inflexión.

26. En un modelo del efecto de los anticonceptivos sobre la tasa de natalidad*, la ecuación

$$R = f(x) = \frac{x}{4.4 - 3.4x}, \qquad 0 \le x \le 1$$

da la reducción proporcional R en la tasa de nacimientos como función de la eficiencia x del método anticonceptivo. Una eficiencia de 0.2 (o sea 20%) significa que la probabilidad de que haya embarazo es del 80% de la probabilidad de exista fecundación sin el anticonceptivo. Evalúe la reducción (como porcentaje) cuando la eficiencia es (a) 0, (b) 0.5 y (c) 1. Obtenga dR/dx y d^2R/dx^2 y trace la gráfica de la ecuación.

27. Si se pidiera enumerar los miembros de una categoría, como animales cuadrúpedos, es probable que las palabras que se pronunciaran aparecieran en "grupos" con pausas claras entre ellos. Por ejemplo, se podría mencionar lo siguiente para la categoría de animales cuadrúpedos:

perro, gato, ratón, rata,
(pausa)
caballo, burro, mula,
(pausa)
vaca, puerco, chivo, borrego
etc.

Las pausas pueden presentarse debido a que es posible que la persona tenga que buscar mentalmente subcategorías (animales domésticos, bestias de carga, animales de granja, etc.).

El tiempo que transcurre entre el inicio de palabras sucesivas se denomina *tiempo entre*

* R.K. Leik y B.F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975).

respuestas. Se ha utilizado una función para analizar la longitud del tiempo de las pausas y el tamaño de los grupos (número de palabras de un grupo).† Esta función f es de tal forma que

$$f(t) = \begin{cases} \text{el número promedio de palabras que} \\ \text{aparecen en sucesión con tiempos en-} \\ \text{tre respuestas inferiores a } t. \end{cases}$$

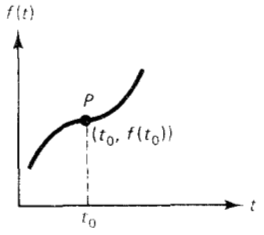


FIGURA 13.46

La gráfica de f tiene una forma similar a la de la Figura 13.46 y la mejor forma de ajustarla es mediante un polinomio de tercer grado, como

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

El punto P tiene significado especial. Es tal que el valor t_0 separa los tiempos entre respuesta *dentro de* grupos de los tiempos entre respuestas *entre* grupos. Matemáticamente, P es un punto crítico que es también un punto de inflexión. Supónganse estas dos condiciones y pruébese que (*a*) $t_0 = -B/(3A)$ y (b) $B^2 = 3AC$.

28. En un modelo que describe la penetración de mercado de un nuevo producto, las ventas S del producto en el tiempo t están dadas por*

$$S = g(t) = \frac{m(p+q)^2}{p}\left[\frac{e^{-(p+q)t}}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^2}\right],$$

en donde p, q y m son constantes diferentes de cero.

a. Demuestre que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{m}{p}(p+q)^3 e^{-(p+q)t}\left[\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}-1\right]}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^3}.$$

b. Determine el valor de t para el cual ocurren las ventas máximas. Se puede suponer que S alcanza un máximo cuando $dS/dt = 0$.

† A. Graesser y G. Mandler, "Limited Processing Capacity Constrains the Storage of Unrelated Sets of Words and Retrieval from Natural Categories", *Human Learning and Memory*, 4, núm. 1 (1978), 86-100.

* A.P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein, y cols. "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 11 (1978), 197-221.

CAPÍTULO 14

Aplicaciones de la diferenciación

14.1 Aplicación de máximos y mínimos

Usando las técnicas que se vieron en el capítulo anterior es posible resolver problemas que implican la maximización o la minimización de una cantidad. Por ejemplo, se pueden maximizar utilidades o minimizar costos. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se desea maximizar o minimizar como función de alguna variable implicada en el problema. Después, se diferencia y se prueban los valores críticos resultantes. Para hacer esto puede utilizarse la prueba de la primera o de la segunda derivadas, aunque puede resultar evidente, por la naturaleza del problema, si un valor crítico representa una respuesta apropiada o no. Debido a que el interés se centra en el máximo o el mínimo *absolutos*, en ocasiones deben examinarse los puntos extremos del dominio de la función.

EJEMPLO 1

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es, $p = (80 - q)/4$, *en donde* q *es el número de unidades y* p *es el precio por unidad. ¿A qué valor de* q *habrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?*

Sea r el ingreso total. Entonces ingresos = (precio)(cantidad). Por ello,

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} \cdot q = \frac{80q - q^2}{4},$$

en donde $q \geq 0$. Fijando $dr/dq = 0$:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80 - 2q}{4} = 0,$$

$$q = 40.$$

Así, 40 es un valor crítico. Ahora se determinará si este valor es un máximo. Examinando la primera derivada para $0 \leq q < 40$, se tiene que $dr/dq > 0$ de forma que r es creciente.

Si $q > 40$, entonces $dr / dq > 0$, por lo que r es decreciente. Debido a que a la izquierda de 40 r es creciente y a la derecha r es decreciente, se concluye que $q = 40$ da el ingreso máximo *absoluto*. Este ingreso es de $[80(40) - (40)^2]/4 = 400$.

EJEMPLO 2

La función del costo total de un fabricante está dada por $c = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$, *en donde q es el número de unidades que se fabrican. ¿A qué nivel de producción los costos promedio por unidad serán mínimos? ¿Cuál es este mínimo?*

La cantidad que se debe minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}. \tag{1}$$

Aquí, q debe ser positiva. Para minimizar $\bar{c}$, se diferencia.

$$D_q\bar{c} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}.$$

Para obtener los valores críticos se resuelve $D_x\bar{c} = 0$.

$$q^2 - 1600 = 0,$$

$$(q - 40)(q + 40) = 0,$$

$$q = 40 \quad \text{(dado que } q > 0\text{)}.$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo se emplea la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3},$$

que es positivo para $q = 40$. Consecuentemente, $\bar{c}$ tiene un mínimo relativo cuando $q = 40$. Se observa que $\bar{c}$ es continua para $q > 0$. En virtud de que $q = 40$ es el único extremo relativo, se concluye que este mínimo relativo es en verdad un mínimo absoluto. Sustituyendo $q = 40$ en la Ecuación (1) se evalúa el costo promedio mínimo, $\bar{c} = 23$.

EJEMPLO 3

Una enzima es una proteína que puede actuar como catalizador para aumentar el ritmo al que se desarrolla una reacción en las células. En una reacción determinada, una enzima se convierte en otra enzima denominada producto. Este último actúa como catalizador para su propia formación. La tasa R a la que se forma el producto (con respecto al tiempo) está dada por

$$R = kp(l - p),$$

en donde l es la cantidad inicial total de ambas enzimas, p es la cantidad de la enzima producto y k es una constante positiva. ¿Para qué valor de p será máxima R?

Se puede escribir $R = k(pl - p^2)$. Fijando $dR/dp = 0$ y despejando p se obtiene

$$\frac{dR}{dp} = k(l - 2p) = 0,$$

$$p = \frac{l}{2}.$$

Ahora, $d^2R/dp^2 = -2k$. Como $k > 0$, la segunda derivada es siempre negativa. Por ello, $p = l/2$ da un máximo relativo. Además, como R es función continua de p, se concluye que —de hecho— se tiene un máximo absoluto cuando $p = l/2$.

Puede aplicarse el Cálculo a decisiones de inventario, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Una compañía fabrica y vende anualmente 10,000 *unidades de un producto. Las ventas se distribuyen de manera uniforme en todo el año. La compañía desea determinar el* ***número de unidades que debe fabricar en cada corrida de producción*** *con el objeto de minimizar los costos anuales totales de preparación y los costos de inventario. En cada corrida se fabrican el mismo número de unidades. A este número se le denomina* ***tamaño económico del lote*** *o* ***cantidad económica de pedido.*** *El costo de producción de cada unidad es* $20 *y los costos de inventario (seguros, intereses, almacenamiento, etc.) se estiman en* 10% *del valor del inventario promedio. Los costos de preparación por corrida de producción son de* $40 *(dólares). Calcular el tamaño económico del lote.*

Sea q el número de unidades de una corrida de producción. Puesto que las ventas se distribuyen a una tasa uniforme, se supone que los inventarios varían de manera uniforme de q a 0 entre corridas de producción. En consecuencia, se considera que el inventario promedio es $q/2$ unidades. Los costos de producción son de $20 por unidad por lo cual el valor promedio del inventario es $20(q/2)$. Los costos respectivos son 10% de este valor:

$$0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right).$$

El número de corridas de producción por año es $10{,}000/q$. Por lo tanto, los costos totales de producción son

$$40\left(\frac{10{,}000}{q}\right).$$

Por ello, la C total de los costos anuales de inventario y de preparación está dada por

$$C = 0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10{,}000}{q}\right),$$

$$C = q + \frac{400{,}000}{q}, \qquad (q > 0).$$

$$\frac{dC}{dq} = 1 - \frac{400{,}000}{q^2} = \frac{q^2 - 400{,}000}{q^2}.$$

Haciendo $dC/dq = 0$ se obtiene

$$q^2 = 400{,}000.$$

Como $q > 0$, se elige

$$q = \sqrt{400{,}000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5.$$

Para determinar si este valor de q minimiza C se examina la primera derivada. Si $0 < q < \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq < 0$. Si $q > \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq > 0$. Se concluye que existe un mínimo *absoluto* en $q = 632.5$. El número de corridas de producción es $10{,}000/632.5 \approx 15.8$. Para fines prácticos habría 16 lotes, cada uno de ellos con un tamaño económico de 625 unidades.

EJEMPLO 5

La Vista TV Cable Co. tiene en estos momentos 3,500 *suscriptores que pagan una cuota mensual de* \$8. *Una encuesta revela que habrá* 50 *suscriptores más por cada* \$0.10 *que se disminuyan en la cuota. ¿A qué tarifa se lograrán ingresos máximos y cuántos suscriptores habrá a ese nivel?*

Sea x el número de disminuciones de \$0.10. La tarifa mensual es, entonces, de $8 - 0.10x$, en donde $0 \le x \le 80$ (la tarifa no puede ser negativa), y el número de suscriptores *nuevos* es $50x$. Por tanto, el número total de suscriptores es $3500 + 50x$. Se desea maximizar los ingresos r, que están dados por

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})\,(\text{tarifa por suscriptor}) \\ &= (3500 + 50x)(8 - 0.10x) \\ &= (50)(2)(70 + x)(4 - 0.05x) \\ &= 100(280 + 0.5x - 0.05x^2). \end{aligned}$$

Fijando $r' = 0$ y despejando x, se obtiene

$$r' = 100(0.5 - 0.1x) = 0,$$

$$x = 5.$$

Si $0 \le x < 5$, entonces $r' > 0$; si $5 < x \le 80$, entonces $r' < 0$. Se concluye que se maximizan los ingresos cuando se dan cinco disminuciones de \$0.10, es decir, cuando la tarifa mensual es de \$7.50. El número de suscriptores con esa tarifa es $3500 + 50(5) = 3750$.

EJEMPLO 6

En un artículo publicado en una revista de sociología se planteaba que, si se iniciara un programa específico a la salud para personas de edad, entonces t años después de su inicio, recibirían beneficios directos n millares de ancianos, en donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t, \qquad 0 \le t \le 12.$$

¿Para qué valor de t recibe beneficios el número máximo de personas?

Fijando $dn/dt = 0$ se tiene

$$\frac{dn}{dt} = t^2 - 12t + 32 = 0,$$

$$(t - 4)(t - 8) = 0,$$

$$t = 4 \quad \text{or} \quad t = 8.$$

Ahora $d^2n/dt^2 = 2t - 12$, que es negativa para $t = 4$ y positiva para $t = 8$. Por ello, existe un máximo relativo cuando $t = 4$. Esto da $n = 53\frac{1}{3}$. Para determinar si éste es un máximo absoluto, se debe hallar n en los puntos extremos del dominio. Si $t = 0$, entonces $n = 0$. Si $t = 12$, entonces $n = 96$. Así, se presenta un máximo absoluto cuando $t = 12$. En la Figura 14.1 se ofrece una gráfica de esta función.

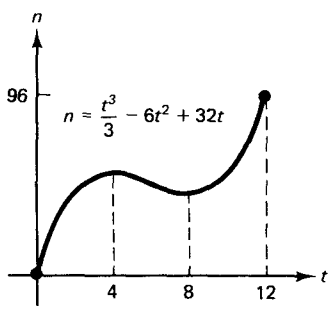


FIGURA 14.1

ADVERTENCIA

En el Ejemplo 6 se ilustra que no se deben omitir los puntos extremos cuando se buscan valores extremos absolutos en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 7

Para propósitos de seguridad un fabricante planea colocar una barda en una área rectangular de almacenamiento de 10,800 *pie*^{2} *adyacente a un edificio, utilizando a éste como uno de los lados del área que se debe cubrir (véase la Figura 14.2). La reja que corre paralela al edificio queda frente a una carretera y costará* \$3 *(dólares) por cada pie instalado, en tanto que la reja para los otros dos lados cuesta* \$2 *por pie instalado. Encontrar la cantidad de cada tipo de reja para que los costos totales sean mínimos. ¿Cuál es el costo mínimo?*

En la Figura 14.2 se identifica la longitud del lado paralelo al edificio como x y las longitudes de los otros dos lados como y, en donde x y y están en pies. El costo (en dólares) de la reja que va sobre la carretera es $3x$ y el de la que va sobre cada uno de los otros dos lados es $2y$. En consecuencia, el costo total C de la reja es

$$C = 3x + 2y + 2y = 3x + 4y.$$

FIGURA 14.2

Se desea minimizar C. Con objeto de diferenciar se expresa primero C en términos de una sola variable. Para esto se encuentra una relación entre x y y. Como el área de almacenamiento xy debe ser 10,800,

$$xy = 10{,}800$$

$$\text{o bien} \qquad y = \frac{10{,}800}{x}.$$

Por sustitución, se tiene

$$C = 3x + 4\left(\frac{10{,}800}{x}\right) = 3x + \frac{43{,}200}{x},$$

en donde $x > 0$. Para minimizar C se fija $dC/dx = 0$ y se despeja x:

$$\frac{dC}{dx} = 3 - \frac{43{,}200}{x^2} = 0,$$

$$3 = \frac{43{,}200}{x^2},$$

de donde

$$x^2 = \frac{43{,}200}{3} = 14{,}400.$$

$$x = 120 \quad \text{(puesto que } x > 0\text{)}.$$

Ahora, $d^2C/dx^2 = 86{,}400/x^3 > 0$ para $x = 120$, y se concluye que $x = 120$ da ciertamente el valor mínimo de C. Cuando $x = 120$, entonces $y = 10{,}800/120 = 90$. Por lo tanto, se requieren 120 pie de la reja de \$3 y 180 pie de la de \$2. Esto da un costo de \$720.

En el siguiente ejemplo se emplea la palabra *monopolista*. En una situación de monopolio existe sólo un proveedor de un producto para el cual no existen sustitutos similares y el proveedor, es decir, el monopolista controla el mercado. Considerando la ecuación de demanda para el producto, el monopolista puede fijar el precio (o volumen de producción) para alcanzar utilidades máximas.

EJEMPLO 8

Supóngase que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ *y que la función de costos promedio es* $\bar{c} = 0.2q + 4 + (400/q)$, *en donde* q *es el número de unidades, y tanto* p *como* $\bar{c}$ *están expresadas en dólares por unidad.*

a. *Determinar el nivel de producción en donde se maximizan las utilidades.*

b. *Determinar el precio al cual ocurren las utilidades máximas.*

c. *Determinar las utilidades máximas.*

d. *Si, como dispositivo regulador el gobierno marca un impuesto de* **$22** *por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio para la maximización de utilidades?*

$$\text{Utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales}.$$

Dado que los ingresos totales $r = pq = 400q - 2q^2$ y los costos totales $c = q\bar{c} = 0.2q^2 + 4q + 400$, las utilidades P son

$$P = r - c = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400).$$

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400, \tag{2}$$

en donde $q > 0$.

a. Tomando $dP/dq = 0$, se tiene

$$\frac{dP}{dq} = 396 - 4.4q = 0.$$

$$q = 90.$$

Ya que $d^2P/dq^2 = -4.4 < 0$, se concluye que $q = 90$ da las utilidades máximas.

b. Fijando $q = 90$ en la ecuación de demanda se obtiene $p = 400 - 2(90) = 220$.

c. Reemplazando q por 90 en (2) resulta $P = 17{,}420$.

d. El impuesto de $22 por unidad significa que para q unidades el costo total aumenta en $22q$. La nueva función de costo es $c_1 = 0.2q^2 + 4q + 400 + 22q$, y la utilidad P_1 está dada por

$$P_1 = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400 + 22q).$$

$$P_1 = 374q - 2.2q^2 - 400.$$

Haciendo $dP_1/dq = 0$ se obtiene

$$\frac{dP_1}{dq} = 374 - 4.4q = 0.$$

$$q = 85.$$

Como $d^2P_1/dq^2 = -4.4 < 0$, se concluye que para maximizar la utilidad el monopolista debe restringir la producción a 85 unidades con un precio mayor de $p_1 = 400 - 2(85) = 230$. Debido a que este precio es superior en sólo $10 al anterior, sólo se ha traspasado al consumidor parte del impuesto y el monopolista debe absorber el costo de lo restante. La utilidad es ahora de $15,495, que es inferior a la anterior.

Se concluye esta sección aplicando el Cálculo para desarrollar un principio que es importante en Economía. Supóngase que $p = f(q)$ es la función de demanda para

el producto de una empresa, en donde p es el precio por unidad y q es el número de unidades que se fabrican y venden. En este caso, los ingresos totales $r = qp = qf(q)$ son función de q. Sea c el costo total de fabricar q unidades y que está dado por la función de costo $c = g(q)$. Por consiguiente, la utilidad total P, que está dada por ingreso total − costo total, es también función de q:

$$P = r - c = qf(q) - g(q).$$

Considérese cuál es la producción más redituable para la empresa. Omitiendo casos especiales se sabe que la utilidad se maximiza cuando $dP/dq = 0$ y $d^2P/dq^2 < 0$. Se tiene que

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}(r - c) = \frac{dr}{dq} - \frac{dc}{dq} = 0.$$

Consecuentemente $dP/dq = 0$ cuando

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}.$$

Es decir, al nivel de las utilidades máximas, la pendiente de la tangente a la curva de ingresos totales debe ser igual a la pendiente de la tangente a la curva de costos totales (Figura 14.3). pero dr/dq son los ingresos marginales, IM, y dc/dq son costos marginales, CM. Por ello, en condiciones típicas, *para maximizar las utilidades es necesario que*

$$IM = CM$$

Para que esto corresponda en realidad a un máximo es necesario que $d^2P/dq^2 < 0$.

$$\frac{d^2P}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}(r - c) = \frac{d^2r}{dq^2} - \frac{d^2c}{dq^2} < 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2r}{dq^2} < \frac{d^2c}{dq^2}.$$

Es decir, cuando $IM = CM$, para asegurar que se tienen las utilidades máximas, la pendiente de la curva de ingresos marginales debe ser menor que la pendiente de la curva de costos marginales.

La condición de que $d^2P/dq^2 < 0$ cuando $dP/dq = 0$ se puede considerar desde otro punto de vista. De manera equivalente, para hacer que $IM = CM$ corresponda a

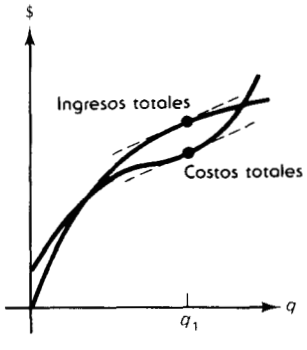


FIGURA 14.3

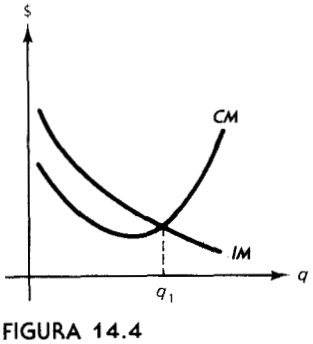


FIGURA 14.4

un máximo dP/dq debe pasar de + a —; es decir, de $dr/dq - dc/dq > 0$ a $dr/dq - dc/dq < 0$. Así, conforme aumenta la producción, se debe tener $IM > CM$ y entonces $IM < CM$. Esto significa que en el punto q_1 de utilidades máximas *la curva de costos marginales debe cortar la curva de ingresos marginales por abajo* (Figura 14.4). Para la producción hasta q_1, los ingresos de la producción adicional serían superiores a los costos de aquella producción y las utilidades totales aumentarían. Para la producción por encima de q_1, $CM > IM$ y cada unidad de producción añadiría una mayor cantidad a los costos totales que a los ingresos totales. En consecuencia, las utilidades totales se reducirían.

EJERCICIOS 14.1

En cada uno de los siguientes problemas p es el precio por unidad (en dólares) y q es la producción por unidad de tiempo. Los costos fijos se refieren a los costos que permanecen constantes a cualquier nivel de producción en un periodo determinado. (Un ejemplo es la renta.)

1. Un fabricante descubre que el costo total c para elaborar un producto está dado por la función de costo $c = 0.05q^2 + 5q + 500$. ¿A qué nivel de producción los costos promedio por unidad serán mínimos?

2. El costo por hora C (en dólares) para operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08, \qquad 0 \le s \le 60,$$

en donde s es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es mínimo el costo por hora?

3. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = -5q + 30$. ¿A qué precio se maximizan los ingresos?

4. Para el producto de un monopolista la función de demanda es $q = 10{,}000e^{-0.02p}$. Calcule el valor de p para el que se obtienen ingresos máximos.

5. Un grupo de biólogos estudió los efectos nutritivos que se observaron en ratas a las que se alimentó de acuerdo con una dieta que contenía con 10% de proteína.* La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de semillas de algodón. Variando el porcentaje p de yema en la mezcla de proteínas, el grupo descubrió que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en un periodo era

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p + 10}, \qquad 0 \le p \le 100.$$

Encontrar (a) el aumento máximo de peso y (b) el aumento mínimo de peso.

6. La intensidad R de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial D de un fármaco está dada por†

$$R = f(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

en donde la constante C denota la cantidad máxima de la medicina que se puede administrar. Demuestre que R tiene una *tasa* máxima *de variación* cuando $D = C/2$

7. Para el producto de un monopolista la función de demanda es $p = 72 - 0.04q$ y la función de costo es $c = 500 + 30q$. ¿A qué nivel de producción se maximizan las utilidades? ¿A qué precio ocurre esto y cuáles son las utilidades?

8. Para un monopolista el costo unitario de fabricar un producto es \$3 y la ecuación de demanda es $p = 10/\sqrt{q}$. ¿Qué precio dará las mayores utilidades?

9. Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es $p = 42 - 4q$ y la función de costo promedio es $\bar{c} = 2 + (80/q)$. Halle el precio que maximiza las utilidades.

10. Para el producto de un monopolista la función de demanda es $p = 50/\sqrt{q}$ y la función de costo promedio es $\bar{c} = 0.50 + (1000/q)$. Determine el precio que maximiza las utilidades y la producción. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

* Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R.I. Mateles y S.R. Tannenbaum (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

† R.M. Thrall, J.A. Mortimer, K.R. Rebman, y R.F. Baum, eds., *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev., Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la University of Michigan, 1967.

11. Para la XYZ Manufacturing Co., los costos fijos totales son \$1200, los costos combinados de materiales y de mano de obra son \$2 por unidad, y la ecuación de demanda es $p = 100/\sqrt{q}$. ¿Qué nivel de producción maximiza las utilidades? Demuestre que ocurre esto cuando los ingresos marginales son iguales a los costos marginales. ¿Cuál es el precio cuando se maximizan las utilidades?

12. Una empresa de bienes raíces es propietaria de 1000 departamentos de tipo jardín. Se puede rentar cada departamento en \$400 mensuales. Sin embargo, por cada \$10 de aumento en la renta al mes, habrá dos departamentos vacantes sin posibilidad de ocuparlos. ¿Qué renta por departamento maximizará los ingresos mensuales?

13. Una compañía de televisión por cable tiene 1000 suscriptores, de los cuales cada uno paga \$5 al mes. Puede obtener 100 suscriptores más por cada \$0.10 que disminuya la cuota mensual. ¿Qué cuota produciría ingresos máximos y cuáles serían esos ingresos?

14. El fabricante de un producto descubre que para las primeras 500 unidades que se elaboren y vendan se logran utilidades de \$50 por unidad. La utilidad que se obtiene sobre las unidades que se fabrican por encima de 500 disminuye en \$0.10 multiplicado por el número de unidades adicionales producidas. Por ejemplo, las utilidades totales cuando se fabrican y venden 502 unidades es 500(50) + 2(49.80). ¿A qué nivel de producción se maximizan las utilidades?

15. Halle dos números cuya suma sea 40 y cuyo producto sea máximo.

16. Obtenga dos números no negativos cuya suma sea 20 tales que sea máximo el producto del doble del primero y el cuadrado del otro número.

17. Una compañía ha apartado \$3000 para instalar una reja en una porción rectangular de terreno adyacente a una corriente de agua, utilizando la corriente como un lado del área cubierta. El costo de la reja paralela a la corriente es de \$5 por pie instalado y la reja para los dos lados restantes es \$3 por pie instalado. Determine las dimensiones del área máxima que se puede cubrir.

18. Un propietario desea cercar 1000 pie^2 de terreno rectangular que será utilizado para diferentes tipos de arbustos. El terreno se dividirá en cuatro lotes iguales con tres bardas paralelas al mismo par de lados como se muestra en la Figura 14.5. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca que se necesitan?

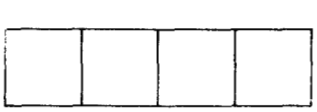


FIGURA 14.5

19. Un fabricante de recipientes está diseñando una caja rectangular abierta en la parte superior y con una base cuadrada que debe tener un volumen de 32 pie^3. Para que la caja requiera la cantidad mínima de material ¿cuáles deben ser sus dimensiones? Véase la Figura 14.6.

20. Una caja descubierta por la parte superior y de base cuadrada debe construirse con 192 pie^2 de material. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen que se busca? Véase la Figura 14.6.

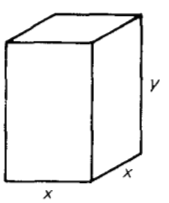


FIGURA 14.6

21. Se va a fabricar una caja abierta recortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja de cartón de 12 plg^2 para después doblar hacia arriba los lados. Calcule la longitud del lado del cuadrado que se debe recortar para que se maximice el volumen de la caja. ¿Cuál es el volumen máximo? Véase la Figura 14.7.

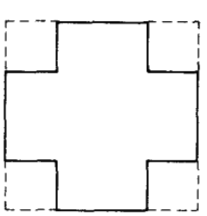


FIGURA 14.7

22. Un anuncio rectangular en cartulina debe tener 150 plg^2 para su impresión. Requiere un margen de 3 plg en la parte superior y en la inferior y un margen de 2 plg en cada uno de los lados. Evalúe las dimensiones del anuncio para minimizar la cantidad de cartulina que se emplee (véase la Figura 14.8). (*Sugerencia:* En primer lugar encuentre los valores de x

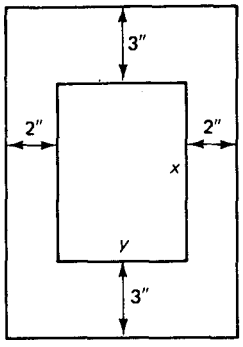


FIGURA 14.8

y y en la Figura 14.8 que minimicen la cantidad de cartulina.)

23. Una lata cilíndrica abierta en la parte superior debe tener un volumen fijo K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces tanto el radio como la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$ (véase la Figura 14.9).

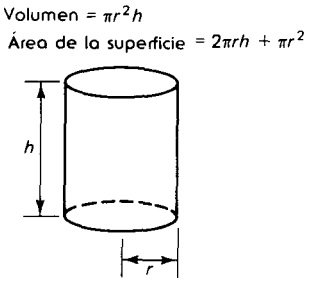


FIGURA 14.9

24. Una lata cilíndrica abierta en la parte superior se va a fabricar con una cantidad fija de material K. Si el volumen va a ser máximo pruebe que tanto el radio como la altura son iguales a $\sqrt{K/(3\pi)}$ (véase la Figura 14.9).

25. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 600 - 2q$ y la función de costo total es $c = 0.2q^2 + 28q + 200$. Calcule la producción y el precio que maximizan las utilidades y determine las utilidades correspondientes. Si el gobierno gravara con un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían la nueva producción y el nuevo precio que maximizarían las utilidades? ¿cuáles son las utilidades en este caso?

26. Use los datos *originales* del Problema 25 y suponga que el gobierno impone una cuota por licencia de \$100 al fabricante. El gravamen anterior es fijo, independientemente de cuál sea la producción. Demuestre que el precio y la producción que maximizan las utilidades permanecen iguales. Verifique, sin embargo, que habrá menores utilidades.

27. Un fabricante debe elaborar anualmente 1000 unidades de un producto que se vende a una tasa uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de \$10 y los costos de inventario (seguros, intereses, almacenamiento, etc.) se estiman en 12.8% del valor del inventario promedio. Los costos de preparación por corrida de producción son \$40. Halle el tamaño económico del lote.

28. Para el producto de un monopolista la función de costo es $c = 0.004q^3 + 20q + 5000$ y la función de demanda es $p = 450 - 4q$. Obtenga la producción que maximiza las utilidades.

29. Un tecnológico está considerando ofrecer un taller de asignación de recursos a personal clave de una empresa. Para hacer que la oferta sea económicamente factible, considera que deben asistir cuando menos 30 personas a un costo de \$50 cada una. Además, estará de acuerdo en reducir la cuota para *todas las personas* en \$1.25 por cada persona que asista por encima de 30. ¿Cuántas personas debe haber en el grupo para que el tecnológico maximice sus ingresos? Supóngase que el número máximo permisible es de 40.

30. Una empresa planea rentar un motor eléctrico para utilizarlo por 90,000 caballos-hora al año en su proceso de manufactura. Un caballo-hora es el trabajo que realiza en una hora un motor de un caballo de potencia. El costo anual de rentar un motor apropiado es de \$150 más \$0.60 por caballo de potencia. El costo de operación del motor por caballo-hora es $\$0.006/N$, en donde N es caballaje. ¿De qué capacidad en caballos debe ser el motor, que es necesario rentar con objeto de minimizar los costos?

31. El costo de operar un camión de carga en una carretera (excluyendo el salario del conductor) es de $0.11 + (s/300)$ dólares por milla, en donde s es la velocidad (constante) del camión en millas por hora. El salario del conductor es de \$12 por hora. ¿A qué velocidad debe operar el conductor el camión para hacer que un viaje de 700 millas sea lo más económico posible?

32. Para un fabricante el costo de elaborar una refacción es de \$3 por unidad de mano de obra y \$1

por unidad de materiales; los gastos generales son de \$2000 por semana. Si se fabrican cada semana más de 5000 unidades, la mano de obra es de \$4.50 por unidad para las unidades en exceso de 5000. ¿A qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

33. Todos los días una empresa fabrica x toneladas de un producto químico A ($x \leq 4$) y y toneladas del producto químico B con $y = (24 - 6x)/(5 - x)$. Las utilidades para el producto químico A son \$2000 por tonelada y de \$1000 para el producto B. ¿Cuánto se debe fabricar del producto A por día para maximizar las utilidades? Responda a la misma pregunta si las utilidades de A son P por tonelada y las de B son de $P/2$ por tonelada.

34. Para construir un edificio de oficinas se tienen costos fijos de \$250,000 que incluyen terreno, honorarios del constructor, cimientos, estructura, etc. Si se construyen x pisos, los costos (excluyendo los costos fijos) son de $c = (x/2)[100{,}000 + 5000(x - 1)]$. Los ingresos mensuales son de \$5000 por piso. Calcule el número de pisos que producirían una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión (tasa de rendimiento = ingresos totales/costos totales).

35. En un modelo de Smith* para la producción de energía P de un animal a una velocidad dada, como función de su movimiento, o *marcha* j, se deduce la siguiente relación:

$$P(j) = Aj\frac{L^4}{V} + B\frac{V^3L^2}{1 + j}.$$

Aquí A y B son constantes, j es una medida de lo "agitado" de la marcha, L es una constante que representa dimensión lineal y V es una velocidad constante de avance. Supóngase que P es mínima cuando $dP/dj = 0$. Pruebe que cuando ocurre esto, entonces

$$(1 + j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}.$$

Como comentario al margen, Smith señala que: ". . .en la velocidad máxima j es cero para un elefante, 0.3 para un caballo y 1 para un galgo, aproximadamente".

36. En un modelo para el flujo de tráfico en un carril de una autopista, el número N de automóviles que pueden circular por el carril por unidad de tiempo está dado por†

$$N = \frac{-2a}{-2at_r + v - \dfrac{2al}{v}},$$

en donde a es la aceleración de un automóvil cuando frena ($a < 0$), t_r, es el tiempo de reacción para comenzar a frenar, v es la velocidad promedio de los automóviles y l es la longitud del automóvil. Supóngase que a, t_r, y l son constantes. Para hallar el máximo de automóviles que pueden circular en un carril se desea evaluar la velocidad v que maximiza N. Para maximizar N resulta suficiente minimizar el denominador $-2at_r + v - (2al/v)$. (a) Determine el valor de v que minimiza el denominador. (b) Evalúe la respuesta de (a) cuando $a = -19.6(\text{pie/s}^2)$, $l = 20(\text{pie})$ y $t_r = 0.5(\text{s})$. La respuesta debe estar en pies por segundo. (c) Calcule el valor correspondiente de N con una cifra decimal. La respuesta debe expresarse en automóviles por segundo. Convierta la respuesta a automóviles por hora.

14.2 El Método de Newton

Es muy sencillo resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ cuando f es una función lineal o cuadrática. Por ejemplo, puede resolverse $x^2 + 3x - 2 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. Sin embargo, si $f(x)$ es de grado mayor que 2 (o no es un polinomio), puede resultar difícil, o incluso imposible, encontrar soluciones (o raíces) de $f(x) = 0$ mediante los métodos comunes. Por esta razón es posible que se acepten soluciones aproximadas, las cuales pueden obtenerse mediante diversas técnicas eficientes. En esta sección se aprenderá la forma en que se puede utilizar la derivada para aproximar las raíces reales de

* J. M. Smith, *Mathematical Ideas in Biology* (London: Cambridge University Press, 1968).

† J.I. Shonle, *Environmental Applications of general Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

la ecuación $f(x) = 0$ (suponiendo que f es diferenciable). El procedimiento que se revisa, y que se denomina *Método de Newton*, es apropiado para calculadoras o computadoras.

Una manera de ubicar una raíz de $f(x) = 0$ consiste en trazar primero su gráfica y en hacer una estimacicón a partir de ésta. Un punto de la gráfica en donde $y = 0$ es la intercepción x y el valor de x en ese punto es una raíz de $f(x) = 0$. Otra forma de localizar una raíz se basa en el siguiente hecho:

> Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene cuando menos una raíz real entre a y b.

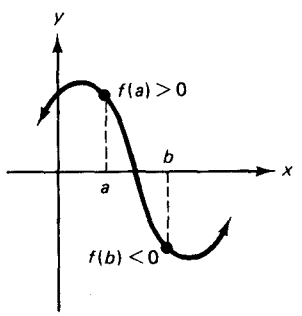


FIGURA 14.10

En la Figura 14.10 se ilustra esta situación. La intercepción x entre a y b corresponde a una raíz de $f(x) = 0$, y se puede utilizar a o b para aproximar esa raíz.

Suponiendo que se tiene una aproximación de una raíz, se procede a revisar una manera de mejorar esa aproximación. En la Figura 14.11 puede verse que $f(r) = 0$, por lo que r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supóngase que x_1 es una aproximación inicial de r (y que está cercana a r). Obsérvese que la recta tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ corta al eje x en el punto $(x_2, 0)$, y que x_2 es una mejor aproximación de r que x_1.

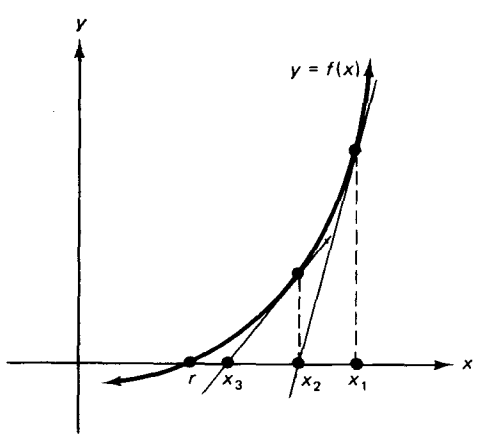


FIGURA 14.11

Se puede encontrar x_2 a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la tangente es $f'(x_1)$, por lo que una forma punto-pendiente de esta recta es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1). \tag{1}$$

Como $(x_2, 0)$ se encuentra sobre la tangente, sus coordenadas deben satisfacer la Ec. (1). Esto da

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \qquad [\text{si} f'(x_1) \neq 0].$$

Por lo que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{2}$$

Para obtener una mejor aproximación de r, se aplica de nueva cuenta el procedimiento descrito antes, pero esta vez se utiliza x_2 como punto de partida. Esto da la aproximación x_3 en donde

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{3}$$

Continuando de esta manera se espera obtener una mejor aproximación en el sentido de que la secuencia de valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

se aproximará a r. En la práctica termina el proceso cuando se llega al grado de precisión que se desea.

Si se analizan las Ecs. (2) y (3), puede observarse cómo se obtiene x_2 a partir de x_1, y cómo se obtiene x_3 a partir de x_2. En general, x_{n+1} resulta de x_n por medio de la fórmula general siguiente, a la que se denomina **método de Newton:**

MÉTODO DE NEWTON

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

A una fórmula como la Ec. (4), que indica cómo se obtiene un número de una secuencia a partir del que le precede se le denomina **fórmula de recursión.**

EJEMPLO 1

Aproximar la raíz de $x^4 - 4x + 1 = 0$ *que se encuentra entre* 0 *y* 1. *Continuar el procedimiento de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Haciendo $f(x) = x^4 - 4x + 1$, se tiene

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\text{y} \qquad f(1) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

(Obsérvese el cambio de signo). Como $f(0)$ está más cerca de 0 que $f(1)$, se elige 0 como la primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 4x^3 - 4,$$

por lo que

$$f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1 \qquad \text{y} \qquad f'(x_n) = 4x_n^3 - 4.$$

Substituyendo en la Ec. (4) se obtiene la fórmula de recursión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4}. \tag{5}$$

Como $x_1 = 0$, haciendo $n = 1$ en la Ec. (5) se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^4 - 4x_1 + 1}{4x_1^3 - 4}$$

$$= 0 - \frac{0^4 - 4(0) + 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25.$$

Haciendo $n = 2$ en la Ec. (5) se obtiene

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^4 - 4x_2 + 1}{4x_2^3 - 4}$$

$$= 0.25 - \frac{(0.25)^4 - 4(0.25) + 1}{4(0.25)^3 - 4} = 0.25099.$$

Haciendo $n = 3$ en la Ec. (5) se obtiene

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^4 - 4x_3 + 1}{4x_3^3 - 4}$$

$$= 0.25099 - \frac{(0.25099)^4 - 4(0.25099) + 1}{4(0.25099)^3 - 4}$$

$$= 0.25099.$$

Los datos obtenidos hasta aquí se muestran en la Tabla 14.1.

TABLA 14.1

n	x_n	x_{n+1}
1	0.00000	0.25000
2	0.25000	0.25099
3	0.25099	0.25099

Como los valores de x_3 y x_4 difieren en menos de 0.0001, se puede considerar que la raíz es 0.25099 (es decir, x_4).

EJEMPLO 2

Aproximar la raíz de $x^3 = 3x - 1$ *que se encuentra entre* -1 *y* -2. *Continuar el procedimiento de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Haciendo $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (se requiere la forma $f(x) = 0$), se encuentra que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

y $$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1.$$

(Nótense los cambios de signo). Como $f(-2)$ está más cercana de 0 que $f(1)$, se elige -2 como la primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

por lo que

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \qquad \text{y} \qquad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3.$$

Substituyendo en la Ec. (4) se obtiene la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}. \tag{6}$$

Como $x_1 = -2$, haciendo $n = 1$ en la Ec. (6) se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1 + 1}{3x_1^2 - 3}$$

$$= (-2) - \frac{(-2)^3 - 3(-2) + 1}{3(-2)^2 - 3} = -1.88889.$$

Continuando con el procedimiento se obtiene la Tabla 14.2.

TABLA 14.2

n	x_n	x_{n+1}
1	−2.00000	−1.88889
2	−1.88889	−1.87945
3	−1.87945	−1.87939

Como los valores de x_3 y x_4 difieren en 0.00006, que es menor que 0.0001, se considera que la raíz es — 1.87939 (es decir, x_4).

En caso de que el valor que se elija como aproximación inicial, x_1, dé a la derivada un valor de cero, se debe elegir una aproximación diferente. Una gráfica de f pudiera resultar útil en una situación como ésta. Finalmente, se desea destacar que hay ocasiones en las que la secuencia de aproximaciones no se acerca a la raíz. El análisis de estas situaciones está fuera del alcance de este libro.

EJERCICIO 14.2

Utilizar el método de Newton para aproximar la raíz que se señala para la ecuación dada. Continuar el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

1. $x^3 - 4x + 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

2. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

3. $x^3 - x - 1 = 0$; raíz entre 1 y 2.

4. $x^3 - 9x + 6 = 0$; raíz entre 2 y 3.

5. $x^3 + x + 16 = 0$; raíz entre -3 y -2.

6. $x^3 = 2x + 5$; raíz entre 2 y 3.

7. $x^4 = 3x - 1$; raíz entre 0 y 1.

8. $x^4 + 4x - 1 = 0$; raíz entre -2 y -1.

9. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$; raíz entre 1 y 2.

10. $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$; raíz entre 1 y 2.

14.3 Diferenciales

En breve se proporcionará una razón para emplear el símbolo dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x. Para hacer esto se introduce la noción del (o de la) *diferencial* de una función.

DEFINICIÓN

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x y sea Δx la forma de denotar un cambio en x, en donde Δx puede ser cualquier número real. Entonces el ***diferencial de y****, que se denota dy, o bien $d[f(x)]$, está dado por*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Nótese que dy es una función de dos variables, a saber x y Δx.

EJEMPLO 1

Hallar el diferencial de $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ y evaluarlo cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$.

El diferencial es

$$dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\Delta x,$$

$$= (3x^2 - 4x + 3)\Delta x.$$

Cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$, entonces

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08.$$

Si $y = x$, entonces $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$. En consecuencia, el diferencial de x es Δx. Se abrevia $d(x)$ con dx. Así, $dx = \Delta x$. De aquí en adelante será práctica en este texto escribir dx en vez de Δx cuando se busque un diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = D_x(x^2 + 5)\,dx = 2x\,dx.$$

Resumiendo, si $y = f(x)$ define una función diferenciable de x, entonces

$$dy = f'(x)\,dx,$$

en donde dx es cualquier número real. Siempre que $dx \neq 0$, se dividen ambos lados entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Es decir, dy/dx puede considerarse ya como el cociente de dos diferenciales, por ejemplo dy dividido entre dx, ya como un símbolo para la derivada de f en x. Es por esta razón que se introdujo el símbolo dy/dx para denotar la derivada.

EJEMPLO 2

a. Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

b. Si $u = (x^2 + 3)^5$, entonces $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)\,dx = 10x(x^2 + 3)^4\,dx$.

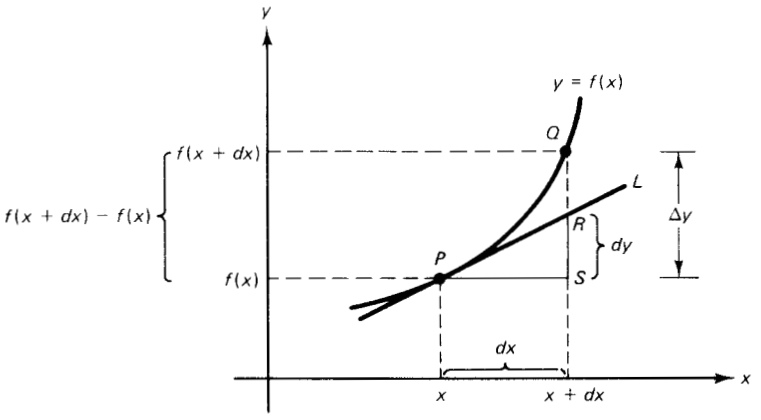


FIGURA 14.12

La diferencial puede interpretarse geométricamente. En la Figura 14.12, el punto $P(x, f(x))$ está sobre la curva $y = f(x)$. Supóngase que x cambia en dx, un número real, al nuevo valor $x + dx$. Entonces, el nuevo valor funcional es $f(x + dx)$, y el punto correspondiente sobre la curva es $Q(x + dx, f(x + dx))$. Por P y Q pasan una recta horizontal y una vertical, respectivamente, que se cortan en S. Una recta L tangente a la curva en P corta al segmento QS en R, formando el triángulo PRS. Obsérvese que la gráfica de f cerca de P se aproxima a la recta tangente en P. La pendiente de L es $f'(x)$ o, de modo equivalente, está dada por $\overline{SR}/\overline{PS}$:

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}.$$

Dado que $dy = f'(x)\,dx$, y $dx = \overline{PS}$,

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}.$$

Por lo tanto, si dx es un cambio de x en P, entonces dy es el correspondiente cambio vertical sobre la **recta tangente** en P. Nótese que para el mismo dx el cambio vertical sobre la **curva** es $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$. No se debe confundir Δy con dy. Sin embargo, resulta evidente de la Figura 14.12 que

cuando dx está cercano a 0, dy es una aproximación a Δy.

Por consiguiente, $\Delta y \approx dy$. Este hecho resulta útil para estimar Δy, un cambio en y, como se muestra en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Una agencia sanitaria gubernamental examinó los registros de un grupo de personas que fueron hospitalizadas con una enfermedad específica. Se descubrió que la proporción total P de los que fueron dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Utilizar diferenciales para aproximar el cambio en la proporción de los dados de alta si t cambia de 300 *a* 305.

El cambio en t de 300 a 305 es $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$. El cambio en P es $\Delta P = P(305) - P(300)$. Se aproxima ΔP mediante dP.

$$\Delta P \approx dP = P'\,dt = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left[-\frac{300}{(300 + t)^2}\right]dt.$$

Cuando $t = 300$ y $dt = 5$,

$$dP = -3\left(\frac{300}{600}\right)^2\left[-\frac{300}{(600)^2}\right]5$$

$$= -3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[-\frac{1}{2(600)}\right]5 = \frac{1}{320} \approx 0.0031.$$

Para efectos de comparación, el valor real de ΔP método de Newton

Se dijo que si $y = f(x)$, entonces $\Delta y \approx dy$ si dx es pequeña. Consecuentemente,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

o bien

$$\boxed{f(x + dx) \approx f(x) + dy.} \qquad (1)$$

Esta fórmula ofrece una forma de estimar un valor, $f(x + dx)$. Por ejemplo, supóngase que se estima ln(1.06). Haciendo $y = f(x) = \ln x$, se requiere hallar $f(1.06)$. Ya que $d(\ln x) = (1/x)\,dx$, de (1) se tiene

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy, \qquad \ln(x + dx) \approx \ln x + \frac{1}{x}\,dx.$$

Se conoce el valor exacto de ln 1, de modo que se toman $x = 1$ y $dx = 0.06$. Entonces $x + dx = 1.06$ y dx es pequeña.

$$\ln(1 + 0.06) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06),$$

$$\ln(1.06) \approx 0 + 0.06 = 0.06.$$

El valor real de ln(1.06) con cinco cifras decimales es 0.05827.

EJEMPLO 4

La función de demanda para un producto está dada por $p = f(q) = 20 - \sqrt{q}$, en donde p es el precio por unidad, en dólares, para q unidades. Utilizando diferenciales, aproximar el precio cuando se tiene una demanda de 99 unidades.

Se desea aproximar $f(99)$. De acuerdo con (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp,$$

en donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}}dq.$$

Se eligen $q = 100$ y $dq = -1$ porque $q + dq = 99$, dq es pequeña y es fácil calcular $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$.

$$f(99) = f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1),$$

$$f(99) \approx 10 + 0.05 = 10.05.$$

Por ello, el precio por unidad cuando existe una demanda de 99 unidades es aproximadamente de $10.05.

La ecuación $y = x^3 + 4x + 5$ define a y como función de x. Sin embargo, también define en forma implícita a x como función de y. De manera que puede considerarse la derivada de x con respecto a y, dx/dy. Como se puede considerar que dx/dy es un cociente de diferenciales, existen motivos para escribir (y es cierto en realidad) que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}, \quad dy/dx \neq 0.$$

Pero dy/dx es la derivada de y con respecto a x y resulta igual a $3x^2 + 4$. En consecuencia,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}.$$

Esto es el *recíproco* de dy/dx.

EJEMPLO 5

Encontrar dp/dq *si* $q = \sqrt{2500 - p^2}$.

Como $q = (2500 - p^2)^{1/2}$, entonces

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}.$$

De donde

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}.$$

EJERCICIOS 14.3

En los Problemas **1-10**, *halle las diferenciales de las funciones en términos de x y dx.*

1. $y = 3x - 4$.

2. $y = 2$.

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 2}$.

4. $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$.

5. $u = \frac{1}{x^2}$.

6. $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7. $p = \ln(x^2 + 7)$.

8. $p = e^{x^3+5}$.

9. $y = (4x + 3)e^{2x^2+3}$.

10. $y = \ln \sqrt{x^4 + 1}$.

En los Problemas **11-14**, *obtenga* Δy *y* dy *para los valores dados de x y dx.*

11. $y = 4 - 7x$; $x = 3$, $dx = 0.02$.

12. $y = 4x^2 - 3x + 10$; $x = -1$, $dx = 0.25$.

13. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $x = 3$, $dx = -0.1$. (*Use el hecho de que* $\sqrt{16.59} \approx 4.073$.)

14. $y = (3x + 2)^2$; $x = -1$, $dx = -0.03$.

En los Problemas **15-22**, *aproxime cada una de las expresiones utilizando diferenciales.*

15. $\sqrt{101}$.

16. $\sqrt{120}$.

17. $\sqrt[3]{63}$.

18. $\sqrt[4]{17}$.

19. $\ln 0.97$.

20. $\ln 1.01$.

21. $e^{0.01}$.

22. $e^{-0.01}$.

En los Problemas **23-28**, *determine dx/dy, o bien dp/dq.*

23. $y = 2x - 1$.

24. $y = 5x^2 + 3x + 2$.

25. $q = (p^2 + 5)^3$.

26. $q = \sqrt{p + 5}$.

27. $q = \frac{1}{p}$.

28. $q = e^{5-p}$.

En los Problemas **29** *y* **30**, *calcule la tasa de variación de q con respecto a p para el valor de q que se señala.*

29. $p = \frac{500}{q + 2}$; $q = 18$.

30. $p = 50 - \sqrt{q}$; $q = 100$.

31. Supóngase que las utilidades P (en dólares) al fabricar q unidades de un producto es

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400.$$

Usando diferenciales, evalúe el cambio aproximado en las utilidades, si el nivel de producción cambia de $q = 80$ a $q = 81$. Evalúe el cambio real.

32. Dada la función de ingresos

$$r = 250q + 45q^2 - q^3,$$

aplique diferenciales para obtener el cambio aproximado en ingresos si el número de unidades aumenta de $q = 40$ a $q = 41$. Halle el cambio real.

33. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 10/\sqrt{q}$. Empleando diferenciales, aproxime el precio cuando se tiene una demanda de 24 unidades.

34. Responda la misma pregunta del Problema 33 si se tiene una demanda de 101 unidades.

35. Si $y = f(x)$, entonces el *cambio proporcional* en y está definido como $\Delta y/y$, que se puede aproximar con diferenciales mediante dy/y. Use esta última forma para aproximar el cambio proporcional en la función de costos $c = f(q) = (q^4/2) + 3q + 400$ cuando $q = 10$ y $dq = 2$. Dar la respuesta con una cifra decimal.

36. Supóngase que S es un valor numérico de posición social con base en los ingresos anuales I (en miles de dólares) de una persona. Para cierta población supóngase que $S = 20\sqrt{I}$. Utilice diferenciales para aproximar S para una persona que tiene ingresos anuales de \$15,000, es decir, $I = 15$.

37. El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, en donde r es el radio. Estime el cambio en volumen cuando el radio cambia de 6.5×10^{-4} cm a 6.6×10^{-4} cm.

38. A la ecuación $(P + a)(v + b) = k$ se la denomina "ecuación fundamental de la contracción muscular".* Aquí P es la carga que se impone al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares y a, b, k son constantes positivas. Halle v en términos de P y después aplique la diferencial para aproximar el cambio en v que se debe a un cambio pequeño en P.

39. En un estudio de las plantas arraigadas en cierta región,† se determinó que el número promedio de especies S que se presentan en terrenos de área A (en metros cuadrados) está dado por

$$S = 12\sqrt[4]{A}, \qquad 0 \leq A \leq 900.$$

Emplee diferenciales para aproximar el número promedio de especies en un terreno de 80 m^2.

14.4 Elasticidad de demanda

La *elasticidad de demanda* es un medio que permite a los economistas medir la forma en que un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad que se demanda. Es decir, se refiere a la respuesta de los consumidores a cambios en los precios. Hablando sin mucho rigor la elasticidad de demanda es el cociente del cambio porcentual en la cantidad de demanda que resulta, dividido entre el cambio porcentual en precio:

$$\frac{\text{cambio porcentual en cantidad}}{\text{cambio porcentual en precio}}.$$

Por ejemplo, si para un aumento de precio de 5% la cantidad de demanda disminuyera en 2%, en términos *poco rigurosos* se diría que la elasticidad de demanda es $-2/5$.

En términos más generales, supóngase que $p = f(q)$ es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandarían q unidades a un precio de $f(q)$ por unidad, y demandarían $q + h$ unidades a un precio de $f(q + h)$ por unidad (Figura 14.13). El cambio *porcentual* en la cantidad de demanda de q a $q + h$ es $\dfrac{(q + h) - q}{q} \cdot 100 = \dfrac{h}{q} \cdot 100$. El cambio porcentual correspondiente en el precio por

* R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

† R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

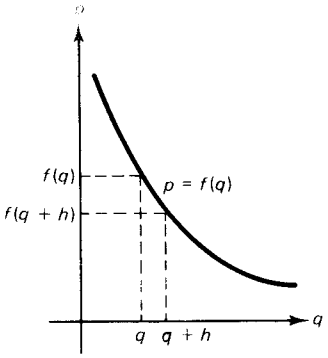


FIGURA 14.13

unidad es $\dfrac{f(q+h)-f(q)}{f(q)} \cdot 100$. El cociente de estos cambios porcentuales es

$$\frac{\dfrac{h}{q}\cdot 100}{\dfrac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}\cdot 100} = \frac{h}{q}\cdot\frac{f(q)}{f(q+h)-f(q)}$$

$$= \frac{f(q)}{q}\cdot\frac{h}{f(q+h)-f(q)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(q)}{q}}{\dfrac{f(q+h)-f(q)}{h}}. \tag{1}$$

Si f es diferenciable, entonces cuando $h \to 0$ el límite de $[f(q+h)-f(q)]/h$ es $f'(q) = dp/dq$. Por lo tanto, el límite de (1) es

$$\frac{\dfrac{f(q)}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}},$$

que se denomina *elasticidad punto* (o *puntual*).

DEFINICIÓN

Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la ***elasticidad punto de demanda****, denotada por la letra griega η (eta), en (q, p) está dada por*

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}}.$$

Para ilustrar lo anterior enseguida se determina la elasticidad punto de demanda para la función de demanda $p = 1200 - q^2$.

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{1200 - q^2}{q}}{-2q} = -\frac{1200 - q^2}{2q^2} = -\left[\frac{600}{q^2} - \frac{1}{2}\right]. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $q = 10$, entonces $\eta = -[(600/10^2) - \frac{1}{2}] = -5\frac{1}{2}$. Esto significa que si se aumentara el precio en 1% cuando $q = 10$, la cantidad de demanda disminuiría en aproximadamente $5\frac{1}{2}\%$. De modo análogo, aumentar el precio en $\frac{1}{2}\%$ da como resultado una disminución en la demanda de aproximadamente 2.75%.

Obsérvese que cuando se evalúa la elasticidad no se asignan unidades, pues no es otra cosa que un número real. Para el comportamiento normal de la demanda un aumento (o disminución) en los precios corresponde a una disminución (o un aumento) en la cantidad. Por consiguiente, dp/dq siempre será negativa o bien 0, y η (cuando esté definida) será siempre negativa o bien 0. Algunos economistas no toman en consideración el signo menos; en la situación anterior considerarían que la elasticidad es $5\frac{1}{2}$. No se adopta aquí esta práctica.

Existen tres categorías de elasticidad:

1. Cuando $|\eta| > 1$, la demanda es *elástica*.

2. Cuando $|\eta| = 1$, la demanda tiene *elasticidad unitaria*.

3. Cuando $|\eta| < 1$, la demanda es *inelástica*.

En la Ecuación (2), puesto que $|\eta| = 5\frac{1}{2}$ cuando $q = 10$, la demanda es elástica. Si $q = 20$, entonces $|\eta| = |-[(600/20^2) - \frac{1}{2}]| = 1$, de forma que la demanda tiene elasticidad unitaria. Si $q = 25$, entonces $|\eta| = |-\frac{23}{50}|$ y la demanda es inelástica.

Hablando de nueva cuenta en términos poco rigurosos, para un determinado cambio porcentual en el precio existe un mayor cambio porcentual en la cantidad de demanda si la demanda es elástica, un menor cambio porcentual si la demanda es inelástica y un cambio porcentual equivalente si la demanda tiene elasticidad unitaria.

EJEMPLO 1

Determinar la elasticidad punto de las siguientes ecuaciones de demanda para $q > 0$.

a. $p = \dfrac{k}{q}$ en donde $k > 0$.

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{\dfrac{k}{q}}{q}}{\dfrac{-k}{q^2}} = -1.$$

Consecuentemente, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda $q > 0$. La gráfica de $p = k/q$ se denomina *hipérbola equilateral* y con frecuencia se encuentra en textos de Economía en análisis relacionados con la elasticidad. Véase en la Figura 13.11 una gráfica de una curva de este tipo.

b. $q = p^2 - 40p + 400$.

Esta ecuación define implícitamente a p como función de q. De la Sección 14.3,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\dfrac{dq}{dp}}.$$

Por lo tanto, $dp/dq = 1/(2p - 40)$ y

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{1}{2p - 40}} = \frac{p(2p - 40)}{q}.$$

Por ejemplo, si $p = 15$, entonces $q = 25$; por ello $\eta = [15(-10)]/25 = -6$ y la demanda es elástica.

La elasticidad punto para una ecuación de demanda *lineal* es muy interesante. Supóngase que la ecuación es de la forma

$$p = mq + b, \text{ en donde } m < 0 \text{ y } b > 0.$$

Véase la Figura 14.14. Se supone que $q > 0$; así que $p < b$. La elasticidad punto de demanda es

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{p}{q}}{m} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p - b}.$$

Considerando $d\eta/dp$, se demuestra enseguida que η es una función decreciente de p. Por la regla del cociente,

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{(p - b) - p}{(p - b)^2} = -\frac{b}{(p - b)^2}.$$

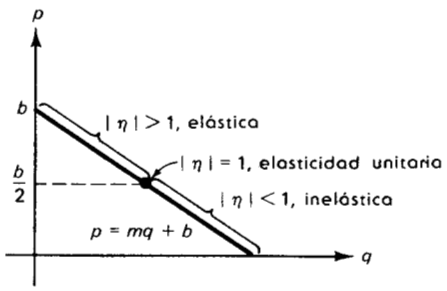


FIGURA 14.14

Dado que $b > 0$ y $(p - b)^2 > 0$, entonces $d\eta/dp < 0$, de modo que, η es una función decreciente de p; al aumentar p, η debe disminuir. Sin embargo, p varía entre 0 y b, y el punto medio de este intervalo es $b/2$,

$$\eta = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2} - b} = \frac{\frac{b}{2}}{-\frac{b}{2}} = -1.$$

En consecuencia, si $p < b/2$, entonces $\eta > -1$; si $p > b/2$, entonces $\eta < -1$. Como se debe tener $\eta \leq 0$ pueden plantearse estos datos de otra forma. Cuando $p < b/2$, $|\eta| < 1$ y la demanda es inelástica; cuando $p = b/2$, $|\eta| = 1$ y la demanda tiene elasticidad unitaria; cuando $p > b/2$, $|\eta| > 1$ y la demanda es elástica. Esto prueba que la pendiente de una curva de demanda no es una medida de elasticidad. La pendiente de la recta en la Figura 14.14 es m en todas partes pero la elasticidad varía con el punto de la recta.

Volviendo a una situación diferente, se puede relacionar la forma en la que la elasticidad de la demanda afecta los cambios en los ingresos (ingresos marginales). Si $p = f(q)$ es la función de demanda de un fabricante, los ingresos totales r están dados por

$$r = pq.$$

Para hallar el ingreso marginal dr/dq se diferencia r utilizando la regla del producto.

$$\frac{dr}{dq} = p + q\frac{dp}{dq}. \tag{3}$$

Factorizando el lado derecho de la Ecuación (3), se tiene

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right)$$

Pero

$$\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}.$$

Entonces

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right). \tag{4}$$

Si la demanda es elástica, entonces $\eta < -1$ y $1 + \frac{1}{\eta} > 0$. Si la demanda es inelástica, entonces $\eta > -1$ y $1 + \frac{1}{\eta} < 0$. Supóngase que $p > 0$. De la Ecuación (4) puede concluirse que $dr/dq > 0$ en los intervalos para los cuales la demanda es elástica; por consiguiente, los ingresos totales r son crecientes en ese intervalo. Por otro lado, los ingresos marginales son negativos en los intervalos para los cuales la demanda es inelástica; consecuentemente, los ingresos totales son decrecientes en esos intervalos.

De manera que, se concluye de la argumentación anterior, que conforme se venden más unidades los ingresos totales de un fabricante crecen si la demanda es elástica pero decrecen si es inelástica. Es decir, si la demanda es elástica, un menor precio aumentará los ingresos. Esto significa que un precio menor ocasionará un incremento en la demanda lo suficientemente grande para aumentar en realidad los ingresos. Si la demanda es inelástica, un precio menor abatirá los ingresos. Para la elasticidad unitaria un precio menor no ocasiona cambios en los ingresos totales.

EJERCICIOS 14.4

En los Problemas **1-14**, *calcule la elasticidad punto de las ecuaciones de demanda para los valores que se señalan de q o p, y determine si la demanda es elástica, inelástica o si se trata de elasticidad unitaria.*

1. $p = 40 - 2q$; $q = 5$.

2. $p = 12 - 0.03q$; $q = 300$.

3. $p = \dfrac{1000}{q}$; $q = 288$.

4. $p = \dfrac{1000}{q^2}$; $q = 156$.

5. $p = \dfrac{500}{q + 2}$; $q = 100$.

6. $p = \dfrac{800}{2q + 1}$; $q = 25$.

7. $p = 150 - e^{q/100}$; $q = 100$.

8. $p = 100e^{-q/200}$; $q = 200$.

9. $q = 600 - 100p$; $p = 3$.

10. $q = 100 - p$; $p = 50$.

11. $q = \sqrt{2500 - p}$; $p = 900$.

12. $q = \sqrt{2500 - p^2}$; $p = 20$.

13. $q = \dfrac{(p - 100)^2}{2}$; $p = 20$.

14. $q = p^2 - 60p + 898$; $p = 10$.

15. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 - 0.05q$, verifique que la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$, y de elasticidad unitaria cuando $p = 6.50$.

16. ¿Para qué valor (o valores) de q tienen elasticidad unitaria las siguientes ecuaciones de demanda?

a. $p = 26 - 0.10q$.

b. $p = 1200 - q^2$.

17. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = 500 - 40p + p^2,$$

en donde p es el precio por unidad (en dólares) y q es la cantidad de unidades que se demandan (en millares). Evalúe la elasticidad punto de demanda cuando $p = 15$. Si se aumenta este precio de 15 en $\frac{1}{2}$%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

18. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}.$$

Encontrar la elasticidad punto de demanda cuando $p = 30$. Si disminuye el precio de 30 en $\frac{2}{3}$%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

19. Para la ecuación de demanda $p = 500 - 2q$, verifique que la demanda es elástica y que los ingresos totales son crecientes para $0 < q < 125$. Compruebe que la demanda es inelástica y que los ingresos totales son decrecientes para $125 < q < 250$.

20. Verifique que $\dfrac{dr}{dq} = p\left(1 + \dfrac{1}{\eta}\right)$ si $p = 40 - 2q$.

21. Repita el Problema 20 para $p = \dfrac{1000}{q^2}$.

22. Sea $p = mq + b$ una ecuación de demanda lineal, en donde $m \neq 0$ y $b > 0$.

a. Demuestre que $\lim_{p \to b} \eta = -\infty$.

b. Pruebe que $\eta = 0$ cuando $p = 0$.

23. Dada la ecuación de demanda $p = 1000 - q^2$, en donde $5 \leq q \leq 30$, ¿para qué valor de q es $|\eta|$ un máximo?. ¿Para qué valor es mínimo?

24. Repita el Problema 23 para $p = 200/(q + 5)$ tal que $5 \leq q \leq 95$.

14.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 14.1 tamaño económico de lote

Sección 14.2 Método de Newton

Sección 14.3 diferencial, dy, dx

Sección 14.4 elasticidad punto de demanda demanda elástica
demanda inelástica demanda con elasticidad unitaria.

RESUMEN

En un sentido práctico la mayor utilidad del Cálculo es que permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, en el área de Economía se pueden maximizar utilidades o minimizar costos. Algunas relaciones importantes que se emplean en problemas económicos son:

$$\bar{c} = \frac{c}{q}, \qquad \text{costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}},$$

$$r = pq, \qquad \text{ingreso(s)} = \text{(precio)(cantidad)},$$

$$p = r - c, \qquad \text{utilidad(es)} = \text{ingreso(s) total(es)} - \text{costo(s) total(es)}.$$

Método de Newton es el nombre que se da a la fórmula siguiente, la cual se usa para aproximar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, suponiendo que es diferenciable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, se define la diferencial dy mediante

$$dy = f'(x)\,dx,$$

en donde dx (o Δx) es un cambio en x y puede ser cualquier número real. Si dx está cercana a cero, entonces dy es una aproximación a Δy, un cambio en y:

$$\Delta y \approx dy.$$

Además, puede utilizarse dy para estimar el valor de una función. Se emplea la relación

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy.$$

Aquí, $f(x + dx)$ es el valor que se desea estimar; se eligen x y dx para que sea fácil calcular $f(x)$ de manera que dx sea pequeña.

Si una ecuación define a y como función de x, entonces la derivada de x con respecto a y está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}, \qquad dy/dx \neq 0.$$

La elasticidad punto de demanda es un número que mide la forma en que los cambios en los precios afectan la demanda de los consumidores. Está dada por

$$\eta = \frac{p/q}{dp/dq},$$

en donde p es el precio por unidad al cual se tiene una demanda de q unidades. Las tres categorías de elasticidad son:

$|\eta| > 1$, la demanda es elástica

$|\eta| = 1$, la demanda es de elasticidad unitaria

$|\eta| < 1$, la demanda es inelástica.

Expresando en términos simples para un determinado cambio porcentual en el precio existe un mayor cambio porcentual en la cantidad de demanda si ésta es elástica, un menor cambio porcentual si es inelástica y un igual cambio porcentual si la demanda tiene elasticidad unitaria.

PROBLEMAS DE REPASO

1. Un fabricante determina que m empleados de cierta línea de producción fabricarán q unidades por mes, en donde $q = 80m^2 - 0.1m^4$. Para lograr la máxima producción mensual, ¿cuántos empleados se deben asignar a la línea de producción?

2. La función de demanda para el producto de un fabricante está dada por $p = 100e^{-0.1q}$. ¿Para qué valor de q se maximizan los ingresos totales del fabricante?

3. La función de demanda para el producto de un monopolista es $p = \sqrt{600 - q}$. Si desea fabricar cuando menos 100 unidades pero no más de 300, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar los ingresos totales?

4. Si $c = 0.01q^2 + 5q + 100$ es una función de costo, halle la función de costo promedio. ¿A qué nivel de producción q se dan los costos promedios mínimos?

5. La función de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y el costo promedio por unidad en la elaboración de q unidades es $\bar{c} = q + 160 + (2000/q)$, en donde p y $\bar{c}$ están dados en dólares por unidad. Obtenga las utilidades máximas que puede lograr el monopolista.

6. Se debe fabricar una caja rectangular recortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja de cartulina de 10 × 16 plg para después doblar hacia arriba los lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado que se recorte para maximizar el volumen de la caja?

7. Se va a encerrar con una cerca un terreno rectangular y se le va a dividir en tres partes iguales mediante dos cercas paralelas a un par de lados. Si se va a utilizar un total de 800 pie de cerca, evalúe las dimensiones del terreno si se desea maximizar su área.

8. Un anuncio rectangular con área de 500 plg^2 va a tener un margen de 4 plg en cada lado y en la parte de abajo y un margen de 6 plg en la parte superior. La porción restante del anuncio es para material impreso. Calcule las dimensiones del anuncio de manera que se maximice el área del material impreso.

9. En un laboratorio se aplica un agente antibacteriano experimental a una población de 100 bacterias. Los datos señalan que el número N de bacterias t horas después de introducido el agente está dado por

$$N = \frac{14{,}400 + 120t + 100t^2}{144 + t^2}.$$

¿Para qué valor de t se presenta el número máximo de bacterias en la población? ¿Cuál es dicho número máximo?

10. La ecuación $x^3 - 2x - 2 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Utilice el método de Newton para estimar la raíz. Continúe el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea menor de 0.0001. Redondee la respuesta a cuatro cifras decimales.

En los Problemas **11** *y* **12**, *determine los diferenciales de las funciones en términos de x y dx.*

11. $f(x) = x^2 \ln(x + 5)$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 7}$.

13. La temperatura Fahrenheit F y la Celsius C están relacionadas por $F = \frac{9}{5}C + 32$. Utilizando diferenciales, calcule cuánto cambiaría F debido a un cambio de $\frac{1}{2}°$ en C.

14. Si $p = q^2 + 8q$, utilice diferenciales para estimar Δp si q cambia de 4 a 4.02.

En los Problemas **15** *y* **16**, *aproximar las expresiones utilizando diferenciales.*

15. $e^{-0.01}$.

16. $\sqrt{25.5}$.

17. Si $x = 4y^2 + 7y - 3$, halle dy/dx.

Para las ecuaciones de demanda en los Problemas **18-20**, *determine si la demanda es elástica, inelástica o con elasticidad unitaria para el valor indicado de q.*

18. $p = \dfrac{500}{q}$; $q = 200$.

19. $p = 900 - q^2$; $q = 10$.

20. $p = 18 - 0.02q$; $q = 600$.

CAPÍTULO 15

Integración

Los Capítulos 11 a 14 se ocuparon del Cálculo Diferencial. Se diferenció una función y se obtuvo otra, su derivada. El *Cálculo Integral* se refiere al proceso inverso. Se da la derivada de una función y se debe encontrar la función original. La necesidad de hacer esto surge de manera natural. Por ejemplo, se puede tener una función de ingresos marginales y desear obtener la función de ingresos a partir de ella. El Cálculo Integral implica también un concepto de límite que permite obtener el límite de una clase especial de suma cuando el número de términos de la misma se vuelve infinito. ¡Esta es la capacidad real del Cálculo Integral! Con esta noción puede calcularse el área de una región que no es posible obtener mediante ningún otro método conveniente.

15.1 La integral indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

entonces a F se le denomina *antiderivada* de f. Por ello, una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f. Multiplicando ambos lados de la Ecuación (1) por la diferencial dx se obtiene $F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. Sin embargo, como $F'(x)\,dx$ es la diferencial de F se tiene que $dF = f(x)\,dx$. De modo que, se puede considerar a una antiderivada de f como una función cuya diferencial es $f(x)\,dx$.

DEFINICIÓN

Una ***antiderivada*** *de una función f es una función F tal que*

$$F'(x) = f(x),$$

o, de manera equivalente, en notación de diferenciales,

$$dF = f(x)\,dx.$$

Por ejemplo, debido a que la derivada de x^2 es $2x$, x^2 es una antiderivada de $2x$. Sin embargo, no es la única antiderivada de $2x$. Puesto que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x,$$

tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ son también antiderivadas de $2x$. Se puede probar que *cualquier* antiderivada de $2x$ debe tener la forma $x^2 + C$, en donde C es una constante. En consecuencia, *cualesquiera dos antiderivadas de* $2x$ *difieren sólo en una constante*

La más general antiderivada de $2x$ se denota por $\int 2x\, dx$, que se lee "*integral indefinida* de $2x$ con respecto a x". Ya que todas las antiderivadas de $2x$ tienen la forma $x^2 + C$, se escribe

$$\int 2x\, dx = x^2 + C.$$

Al símbolo $\int$ se le denomina **símbolo de integral**, $2x$ es el **integrando** y C es la **constante de integración**. La dx es parte de la notación de integral y señala la variable implicada. Aquí x es la **variable de integración**.

En términos más generales, la **integral indefinida** de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)\, dx$ y denota una antiderivada arbitraria de f. Se puede demostrar que todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante. Por lo tanto, si F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \qquad \text{en donde } C \text{ es una constante.}$$

Integrar f significa determinar $\int f(x)\, dx$. En resumen,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x).$$

EJEMPLO 1

Evaluar $\int 5\, dx$.

En primer lugar, se debe hallar (una palabra mejor sería "adivinar") una función cuya derivada es 5. Dado que la derivada de $5x$ es 5, $5x$ es una antiderivada de 5. Por consiguiente, siguiente,

$$\int 5\, dx = 5x + C.$$

ADVERTENCIA
Es **incorrecto** escribir

$$\int 5\, dx = 5x.$$

No debe olvidarse la constante de integración.

Utilizando las fórmulas de diferenciación de los Capítulos 11 y 12, se ha formado una lista de fórmulas básicas de integración que se presenta en la Tabla 15.1. Es fácil verificar estas fórmulas. Por ejemplo, la Fórmula 2 es cierta porque la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n para $n \neq -1$. Se debe tener $n \neq -1$ porque el denominador es 0 cuando $n = -1$.

La Fórmula 2 establece que la integral indefinida de una potencia de x (exceptuando x^{-1}) se obtiene incrementando el exponente de x en uno, dividiendo entre el nuevo exponente y sumando la constante de integración. El caso de x^{-1} se analiza en la Sección 15.3.

TABLA 15.1
Fórmulas básicas de integración

1. $\int k\,dx = kx + C$, k es una constante
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
4. $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, k es una constante
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Para comprobar la fórmula 4 debe demostrarse que la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es $kf(x)$. Como la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es k veces la derivada de $\int f(x)\,dx$, la cual es $f(x)$, se verifica la citada Fórmula 4. El lector debe comprobar las otras fórmulas. La Fórmula 5 puede ser extendida a cualquier número de sumas o diferencias.

EJEMPLO 2

Evaluar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int 1\,dx$.

Por la Fórmula 1 con $k = 1$,

$$\int 1\,dx = 1x + C = x + C.$$

A menudo, se escribe $\int 1\,dx$ como $\int dx$. Consecuentemente $\int dx = x + C$.

b. $\int x^5\,dx$.

Mediante la Fórmula 2, con $n = 5$,

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C.$$

EJEMPLO 3

Evaluar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int 7x\,dx$.

Mediante la Fórmula 4 con $k = 7$ y $f(x) = x$,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx.$$

En virtud de que x es x^1, por la Fórmula 2, se tiene

$$\int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

en donde C_1 es la constante de integración. Por lo tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x^1\,dx = 7\left[\frac{x^2}{2} + C_1\right] = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1.$$

Como $7C_1$ es sólo una constante arbitraria, por sencillez, se reemplaza la constante $7C_1$ por C. De modo que

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

No es necesario escribir todas las etapas intermedias cuando se integra. En forma más simple, se escribe

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

b. $\int -\frac{3}{5}e^x\,dx$.

$$\int -\frac{3}{5}e^x\,dx = -\frac{3}{5}\int e^x\,dx \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + C \qquad \text{(Fórmula 3).}$$

ADVERTENCIA

Sólo un factor constante del integrando puede "saltar" enfrente de un signo de integral. Como x no es una constante $\int 7x\,dx \neq 7x\int dx = (7x)(x + C) = 7x^2 + 7Cx$.

EJEMPLO 4

Evaluar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$.

Aquí t es la variable de integración. Se reescribe el integrando para que se pueda utilizar una fórmula básica. Debido a que $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, aplicando la Fórmula 2 resulta

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C.$$

b. $\int \frac{1}{6x^3}dx.$

$$\int \frac{1}{6x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C.$$

EJEMPLO 5

Determinar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int (x^2 + 2x)\,dx.$

Mediante la Fórmula 5,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx.$$

Ahora,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

y

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2.$$

Por ello,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2.$$

Reemplazando $C_1 + C_2$ por C, se tiene

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Omitiendo las etapas intermedias, simplemente se escribe

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

b. $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx.$

$$\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$$

$$= 2\int x^{4/5}\,dx - 7\int x^3\,dx + 10\int e^x\,dx - \int 1\,dx$$

$$= (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7)\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C$$
$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C.$$

En ocasiones, para aplicar las fórmulas básicas de integración es necesario, en primer lugar, llevar a cabo algunas manipulaciones algebraicas sobre el integrando, como se muestra en el Ejemplo 6.

EJEMPLO 6

Hallar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int y^2(y + \frac{2}{3})\,dy.$

Multiplicando el integrando, se obtiene

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\,dy = \int (y^3 + \tfrac{2}{3}y^2)\,dy$$
$$= \frac{y^4}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3} + C = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + C.$$

b. $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\,dx.$

Factorizando $\frac{1}{6}$ y multiplicando los binomios, se produce

$$\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int (2x^2 + 5x - 3)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left[(2)\frac{x^3}{3} + (5)\frac{x^2}{2} - 3x\right] + C$$
$$= \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x}{2} + C.$$

ADVERTENCIA

En el Ejemplo 6(a) primero se multiplicaron los factores del integrando. Es necesario señalar que

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\,dy \neq \left[\int y^2\,dy\right]\left[\int (y + \tfrac{2}{3})\,dy\right].$$

En términos más generales,

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx.$$

EJERCICIOS 15.1

En los Problemas **1-50**, *evalúe las integrales indefinidas.*

1. $\int 5\,dx$.

2. $\int \frac{1}{2}\,dx$.

3. $\int x^8\,dx$.

4. $\int 2x^{25}\,dx$.

5. $\int 5x^{-7}\,dx$.

6. $\int \frac{z^{-3}}{3}\,dz$.

7. $\int \frac{1}{x^{10}}\,dx$.

8. $\int \frac{7}{x^4}\,dx$.

9. $\int \frac{1}{y^{11/5}}\,dy$.

10. $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\,dx$.

11. $\int (8 + u)\,du$.

12. $\int (r^3 + 2r)\,dr$.

13. $\int (y^5 - 5y)\,dy$.

14. $\int (7 - 3w - 2w^2)\,dw$.

15. $\int (3t^2 - 4t + 5)\,dt$.

16. $\int (1 + u + u^2 + u^3)\,du$.

17. $\int (7 + e)\,dx$.

18. $\int (5 - 2^{-1})\,dx$.

19. $\int \left(\frac{x}{7} - \frac{3}{4}x^4\right) dx$.

20. $\int \left(\frac{2x^2}{7} - \frac{8}{3}x^4\right) dx$.

21. $\int 3e^x\,dx$.

22. $\int \left(\frac{e^x}{3} + 2x\right) dx$.

23. $\int (x^{8.3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3})\,dx$.

24. $\int (0.3y^4 - 8y^{-3} + 2)\,dy$.

25. $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx$.

26. $\int dw$.

27. $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^7}}\,dx$.

28. $\int \frac{-3}{4\sqrt[8]{x}}\,dx$.

29. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}\right) dx$.

30. $\int \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^4}\right) dx$.

31. $\int \left(\frac{3w^2}{2} - \frac{2}{3w^2}\right) dw$.

32. $\int \frac{2}{e^{-s}}\,ds$.

33. $\int \frac{2z - 5}{7}\,dz$.

34. $\int \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^x\right) dx$.

35. $\int \left(\frac{e^u}{4} + 1\right) du$.

36. $\int \left(3y^3 - 2y^2 + \frac{e^y}{6}\right) dy$.

37. $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x})\,dx$.

38. $\int 0\,dx$.

39. $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x\right) dx$.

40. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

41. $\int (x^2 + 5)(x - 3)\,dx$.

42. $\int x^4(x^3 + 3x^2 + 7)\,dx$.

43. $\int \sqrt{x}(x + 3)\,dx$.

44. $\int (z + 2)^2\,dz$.

45. $\int (2u + 1)^2\,du$.

46. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)^2 dx$.

47. $\int v^{-2}(2v^4 + 3v^2 - 2v^{-3})\,dv$.

48. $\int [6e^u - u^3(\sqrt{u} + 1)]\,du$.

49. $\int \frac{e^6 + e^x}{2}\,dx$.

50. $\int \frac{\sqrt{x}(x^5 - \sqrt[3]{x} + 2)}{3}\,dx$.

15.2 Integración con condiciones iniciales

Si se conoce la tasa de variación f' de la función f, entonces la propia función f es la antiderivada de f'. Por supuesto, existen muchas antiderivadas de f', y a la más general de ellas se le denota mediante la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x,$$

entonces

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C. \tag{1}$$

Es decir, la derivada de *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ es igual a $2x$. Obsérvese que no se conoce $f(x)$ específicamente, debido a la constante de integración. Sin embargo, si f debe tomar un determinado valor de la función para un valor específico de x, entonces se puede determinar el valor de C, y por lo mismo puede determinarse $f(x)$ específicamente. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, entonces, de la Ec. (1),

$$f(1) = 1^2 + C,$$
$$4 = 1 + C,$$
$$C = 3.$$

Por lo tanto

$$f(x) = x^2 + 3.$$

Es decir, ahora se conoce la función específica $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. A la condición $f(1) = 4$, que le da un valor a la función para un valor específico de x, se le denomina *condición inicial* (o *valor en la frontera*).

EJEMPLO 1

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encontrar y. (Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = (2)$. Obtener también y (4).

Aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$.

$$y = \int (8x - 4)\,dx = 8\cdot\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C. \tag{2}$$

Puede determinarse el valor de C utilizando la condición inicial. Como $y = 5$ cuando $x = 2$, se tiene, de la Ec. (2),

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C,$$
$$5 = 16 - 8 + C,$$
$$C = -3.$$

Reemplazando C por -3 en la Ec. (2) se obtiene la función que se busca:

$$y = 4x^2 - 4x - 3. \tag{3}$$

Para encontrar $y(4)$, se fija $x = 4$ en la Ec. (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45.$$

EJEMPLO 2

Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$, *y* $y(1) = -1$, *obtener* y

Puesto que $y'' = \dfrac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, y' es una antiderivada de $x^2 - 6$. Por consiguiente

$$y' = \int (x^2 - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1. \tag{4}$$

Como $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = (0)$, de la Ec.(4) se tiene

$$2 = \frac{0^3}{2} - 6(0) + C_1.$$

De ahí que $C_1 = 2$ y

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2.$$

Por integración, se puede evaluar y:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2.$$

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2. \tag{5}$$

Ya que $y = -1$ cuando $x = 1$, de la Ecuación (4) resulta

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2.$$

Por lo tanto, $C_2 = -\frac{1}{12}$ y

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}.$$

La integración con condiciones iniciales es útil en muchas aplicaciones, como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3

Para un grupo urbano específico algunos sociólogos estudiaron los ingresos anuales promedio en esos momentos, y (en dólares) que una persona puede esperar recibir con x años de educación antes de buscar empleo regular. Estimaron que la tasa a la cual el ingreso varía con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 10x^{3/2}, \qquad 4 \le x \le 16,$$

en donde $y = 5872$ *cuando* $x = 9$. *Determinar* y.

En este caso, y es una antiderivada de $10x^{3/2}$. Así que

$$y = \int 10x^{3/2}\,dx = 10\int x^{3/2}\,dx$$

$$= (10)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C.$$

$$y = 4x^{5/2} + C. \tag{6}$$

La condición inicial es que $y = 5872$ cuando $x = 9$. Sustituyendo estos valores en la Ec. (6) puede determinarse el valor de C:

$$5872 = 4(9)^{5/2} + C$$

$$= 4(243) + C.$$

$$5872 = 972 + C.$$

Por lo tanto, $C = 4900$ y

$$y = 4x^{5/2} + 4900.$$

EJEMPLO 4

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2,$$

hallar la función de demanda.

Como dr/dq es la derivada de los ingresos totales r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\,dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C.$$

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C. \tag{7}$$

Se supone que *cuando no se vende ninguna unidad son cero;* es decir, $r = 0$ cuando $q = 0$. Esta es la condición inicial. Sustituyendo estos valores en la Ecuación (7) da

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Consecuentemente $C = 0$ y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para determinar la función de demanda se utiliza este resultado junto con la relación general de que $r = pq$, en donde p es el precio por unidad. Despejando p en $r = pq$ y sustituyendo r, se obtiene la función de demanda:

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}.$$

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

EJEMPLO 5

En la fabricación de un producto los costos fijos por semana son \$4000. *Los costos fijos son costos como renta y seguros que permanecen constantes con cualquier nivel de producción en un periodo dado. Si la función de costos marginales dc/dq es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2,$$

en donde c es el costo total (en dólares) de fabricar q libras de un producto por semana, calcular el costo de fabricar 10,000 *libras en una semana.*

Debido a que dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\, dq$$

$$= 0.000001 \int (0.002q^2 - 25q)\, dq + \int 0.2\, dq.$$

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C.$$

Los costos fijos son constantes sin importar el nivel de producción. Por lo tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, que es la condición inicial. Por sustitución se encuentra que $c = 4000$, por lo que

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000. \tag{8}$$

De la Ecuación (8) cuando $q = 10{,}000$, $c = 5416.67$. El costo total de fabricar 10,000 libras del producto en una semana es \$5416.67.

EJERCICIO 15.2

En los Problemas **1** *y* **2** *evaluar y, sujeta a las condiciones dadas*

1. $dy/dx = 3x - 4$; $y(-1) = \frac{13}{2}$.

2. $dy/dx = x^2 - x$; $y(3) = 4$.

En los Problemas **3** *y* **4** *si y satisface las condiciones dadas, evaluar y(x)* para el valor dado de x.

3. $y' = 4/\sqrt{x}$, $y(4) = 10$; $x = 9$.

4. $y' = -x^2 + 2x$, $y(2) = 1$; $x = 1$.

En los Problemas **5-8** *evalúe y según las condiciones dadas.*

5. $y'' = -x^2 - 2x$; $y'(1) = 0$, $y(1) = 1$.

6. $y'' = x + 1$; $y'(0) = 0$, $y(0) = 5$.

7. $y''' = 2x$; $y''(-1) = 3$, $y'(3) = 10$, $y(0) = 2$.

8. $y''' = e^x + 1$; $y''(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y(0) = 3$.

En los Problemas **9-12**, *dr/eq es una función de ingreso marginal. Obtenga la función de demanda.*

9. $dr/dq = 0.7$.

10. $dr/dq = 15 - \frac{1}{15}q$.

11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$.

12. $dr/dq = 10{,}000 - 2(2q + q^3)$.

En los Problemas **13-16** *dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos se muestran entre llaves. Para los Problemas* **13** *y* **14** *, determinan la función de costo total. Para los Problemas* **15** *y* **16** *calcule el costo total para el valor que se señala de q.*

13. $dc/dq = 1.35$; $\{200\}$.

14. $dc/dq = 2q + 50$; $\{1000\}$.

15. $dc/dq = 0.09q^2 - 1.2q + 4.5$; $\{7700\}$; $q = 10$.

16. $dc/dq = 0.000102q^2 - 0.034q + 5$; $\{10{,}000\}$; $q = 100$.

17. Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales observados en ratas a las que se alimentó con una dieta que contenía el 10% de proteínas.* La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Durante cierto tiempo el grupo descubrió que la tasa de cambio (aproximada) en el aumento promedio en peso G (en gramos) de una rata con respecto al porcentaje P de yema que contenía la mezcla de proteínas es

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2, \qquad 0 \le P \le 100.$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, evalúe G.

18. En Nueva Escocia se hizo un estudio acerca de la polilla de invierno.† Las preninfas de la polilla caen al suelo desprendiéndose de los árboles anfitriones. Se descubrió que la tasa (aproximada) a la cual cambia la densidad y de las preninfas (número de preninfas por pie cuadrado de terreno), con respecto a la distancia x (en pies) de la base de los árboles anfitriones es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x, \qquad 1 \le x \le 9.$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, determine y.

19. En el estudio del flujo en un tubo de radio constante R, como el de la sangre en algunas porciones del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, en donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es función de r y está dada por ‡

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta}\, dr,$$

en donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (la letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r = R$, demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}.$$

20. El fabricante único de un producto ha determinado que la función de ingreso marginal es $dr/dq = 100 - 3q^2$. Calcule la elasticidad punto de la demanda para el producto cuando $q = 5$. (*Sugerencia*: Halle primero la función de demanda.)

21. Un fabricante ha decidido que la función de costo marginal es $dc/dq = 0.003q^2 - 0.4q + 40$, en donde q es el número de unidades que se fabrican. Si el costo marginal es \$27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son \$5000, ¿cuál es el costo promedio de elaborar 100 unidades?

15.3 Más fórmulas de integración

La fórmula

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \ne -1,$$

que se aplica a una potencia de x, puede generalizarse para manejar la potencia de una

* Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", in *Single-Cell Protein*, ed. R.I. Mateles y S.R. Tannenbaum (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

† Adaptado de D.G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

‡ R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

función de x. Sea u una función diferenciable de x. Por la regla de la potencia para la diferenciación si $n \neq -1$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)[u(x)]^n \cdot u'(x)}{n+1} = [u(x)]^n \cdot u'(x).$$

Así,

$$\int [u(x)]^n \cdot u'(x)\, dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

A ésta se le denomina *regla de la potencia para la integración*. Dado que $u'(x)\, dx$ es la diferencial de u, es decir du. Para abreviar se reemplaza $u(x)$ por u y $u'(x)\, dx$ por du:

Regla de la potencia para la integración

Si u es diferenciable, entonces

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{si } n \neq -1.$$

Es esencial darse cuenta de la diferencia que existe entre la regla de la potencia para la integración y la fórmula para $\int x^n\, dx$. En la regla de la potencia, u representa una función, mientras que en $\int x^n\, dx$, x es una variable.

EJEMPLO 1

Utilizar la regla de la potencia para la integración para obtener las siguientes.

a. $\int (x+1)^{20}\, dx$.

En virtud de que el integrando es una potencia de la función $x + 1$, se fija $u = x + 1$. Entonces, $du = dx$ y $\int (x+1)^{20}\, dx$ tiene la forma $\int u^{20}\, du$. Por la regla de la potencia para la integración,

$$\int (x+1)^{20}\, dx = \int u^{20}\, du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x+1)^{21}}{21} + C.$$

Nótese que se da la respuesta no en términos de u sino que se proporciona explícitamente en términos de x.

b. $\int 3x^2(x^3+7)^3\, dx$.

Sea $u = x^3 + 7$. Entonces $du = 3x^2\, dx$. Por fortuna, $3x^2$ aparece como factor en el integrando y se le puede utilizar como parte de du.

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3\,dx = \int (x^3 + 7)^3[3x^2\,dx] = \int u^3\,du$$
$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3 + 7)^4}{4} + C.$$

EJEMPLO 2

Evalúe $\int x\sqrt{x^2 + 5}\,dx$.

Se puede escribir esto como, $\int x(x^2 + 5)^{1/2}\,dx$. Obsérvese que el integrando contiene una potencia de la función $x^2 + 5$. Si $u = x^2 + 5$, entonces $du = 2x\,dx$. Ya que el factor *constante* 2 de *du no* aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma $\int u^n\,du$. Sin embargo, se le puede expresar en esta forma primero multiplicando y dividiendo el integrando por 2. Esto no cambia su valor. En consecuencia,

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\,dx = \int \frac{2}{2}x(x^2 + 5)^{1/2}\,dx = \int \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{1/2}[2x\,dx].$$

Pasando el factor *constante* $\frac{1}{2}$ enfrente del signo de integral, se tiene

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 5)^{1/2}[2x\,dx] \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + C.$$

Volviendo a x, resulta

$$\int x\sqrt{x^2 + 5}\,dx = \frac{(x^2 + 5)^{3/2}}{3} + C.$$

En el Ejemplo 2 se necesitó colocar el factor 2 en el integrando. En la Ecuación (1) se insertó y en forma simultánea se multiplicó la integral por $\frac{1}{2}$. En términos más generales, si c es una constante diferente de cero, entonces

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{c}{c}f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int cf(x)\,dx.$$

En efecto, se puede multiplicar el integrando por una constante c distinto de cero, siempre y cuando se compense esto multiplicando la totalidad de la integral por $1/c$. Esta manipulación *no puede* hacerse con factores *variables*.

ADVERTENCIA

Cuando se utiliza la forma $\int u^n\,du$, no se debe despreciar du. Por ejemplo

$$\int (4x + 1)^2\,dx \neq \frac{(4x + 1)^3}{3} + C.$$

La forma apropiada de resolver este problema es como sigue. Igualando $u = 4x + 1$, se tiene $du = 4\,dx$. Por lo tanto,

$$\int (4x + 1)^2 dx = \frac{1}{4}\int (4x + 1)^2 [4\,dx] = \frac{1}{4}\int u^2\,du$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x + 1)^3}{12} + C.$$

EJEMPLO 3

Determinar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int \sqrt[3]{6y}\,dy.$

El integrando es $(6y)^{1/3}$. Inténtese utilizar la regla de la potencia para la integración. Si se fija $u = 6y$, entonces $du = 6\,dy$. Puesto que el factor 6 no aparece en el integrando, se inserta un factor 6 y se le ajusta con un factor de $1/6$ enfrente de la integral.

$$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int (6y)^{1/3}\,dy = \frac{1}{6}\int (6y)^{1/3}[6\,dy] = \frac{1}{6}\int u^{1/3}\,du$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{(6y)^{4/3}}{8} + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 3x}{(x^4 + 3x^2 + 7)^4}\,dx.$

Se puede escribir esto como $\int [x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}\,(2x^3 + 3x)\,dx$. Trátese de aplicar la regla de la potencia para la integración. Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces la cantidad $(2x^3 + 3x)\,dx$ de la integral. Por consiguiente, se inserta un factor de 2 y se le ajusta con un factor de $\frac{1}{2}$ enfrente de la integral.

$$\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}(2x^3 + 3x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[2(2x^3 + 3x)\,dx]$$
$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[(4x^3 + 6x)\,dx]$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C$$
$$= -\frac{1}{6(x^4 + 3x^2 + 7)^3} + C.$$

Cuando se utiliza la regla de la potencia para integración se debe tener cuidado al decidir qué u utilizar. En el Ejemplo 3(b) *no* habría sido posible llegar muy lejos si, por ejemplo, se hubiera fijado $u = 2x^3 + 3x$. En ocasiones puede que sea necesario

intentar muchas alternativas distintas. De modo que no se debe contemplar sólo la integral, sino intentar algo, aunque sea erróneo, porque ello podrá arrojar alguna luz sobre lo que sí podría funcionar. **La habilidad en la integración sólo se produce después de muchas horas de práctica y de estudio concienzudo.**

EJEMPLO 4

Evaluar $\int 4x^2(x^4 + 1)^2 + dx.$

Si se fija $u = x^4 + 1$, entonces $du = 4x^3\,dx$. Para colocar du en la integral se requiere un factor adicional de la *variable* x. Sin embargo, sólo se pueden hacer ajustes para factores **constantes**. Consecuentemente, es posible emplear la regla de la potencia. Para hallar la integral en primer lugar se expande $(x^4 + 1)^2$.

$$\begin{aligned}\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx &= 4\int x^2(x^8 + 2x^4 + 1)\,dx \\ &= 4\int (x^{10} + 2x^6 + x^2)\,dx \\ &= 4\left(\frac{x^{11}}{11} + \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

Se vuelve ahora la atención a la integración de funciones exponenciales. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

a esta fórmula de diferenciación le corresponde la siguiente fórmula de integración

$$\int e^u \frac{du}{dx}\,dx = e^u + C.$$

Pero $\dfrac{du}{dx}\,dx$ es el diferencial de u, es decir du. Por ello,

$$\int e^u\,du = e^u + C. \qquad (2)$$

EJEMPLO 5

Obtener las siguientes integrales.

a. $\int 2xe^{x^2}\,dx.$

Sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$ y por la Ecuación (2),

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2}\,dx &= \int e^{x^2}[2x\,dx] = \int e^u\,du \\ &= e^u + C = e^{x^2} + C.\end{aligned}$$

b. $\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\,dx$.

Si $u = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\,dx = 3(x^2 + 1)\,dx$. Si en el integrando hubiera un factor 3, la integral tendría la forma $\int e^u\,du$. En consecuencia, se escribe

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{x^3+3x}[3(x^2 + 1)\,dx] \\ &= \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C.\end{aligned}$$

ADVERTENCIA

No se debe aplicar la fórmula de la regla de la potencia para $\int u^n\,du$ a $\int e^u\,du$. Por ejemplo,

$$\int e^x\,dx \neq \frac{e^{x+1}}{x + 1} + C.$$

Como se sabe, en la fórmula de la regla de la potencia $\int u^n\,du = u^{n+1}/(n + 1) + C$ se supone que $n \neq -1$. Para evaluar $\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du$, en primer lugar se debe recordar que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Parecería que $\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$. Sin embargo, el logaritmo de u está definido si y sólo si, u es positivo. Si $u < 0$, entonces $\ln u$ no está definido. Así, $\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$ siempre y cuando $u > 0$. Por otro lado, si $u < 0$, entonces $-u > 0$ y $\ln(-u)$ está definido. Además,

$$\frac{d}{dx}[\ln(-u)] = \frac{1}{-u}(-1)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

En este caso $(u < 0)$, $\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C$. En resumen, si $u > 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$; si $u < 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C$. Combinando estos casos, se tiene

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C. \tag{3}$$

En particular, si $u = x$, entonces $du = dx$ y

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \tag{4}$$

EJEMPLO 6

Evaluar las siguientes integrales.

a. $\int \frac{7}{x}\,dx.$

De la Ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln|x| + C.$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir esta respuesta de otra forma:

$$\int \frac{7}{x}\,dx = \ln|x^7| + C.$$

b. $\int \frac{2x}{x^2 + 5}\,dx.$

Sea $u = x^2 + 5$. Entonces $du = 2x\,dx$. De la Ecuación (3),

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5}\,dx = \int \frac{1}{x^2 + 5}[2x\,dx] = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|x^2 + 5| + C.$$

Dado que $x^2 + 5$ siempre es positivo, se pueden omitir las barras que señalan el valor absoluto

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5}\,dx = \ln(x^2 + 5) + C.$$

EJEMPLO 7

Evaluar las siguientes integrales

a. $\int \frac{(2x^3 + 3x)\,dx}{x^4 + 3x^2 + 7}.$

Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces el numerador. Para aplicar la Ec.(3) se inserta un factor de 2 y se le ajusta con un factor de ½.

$$\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + 3x^2 + 7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3 + 3x)}{x^4 + 3x^2 + 7}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 7}[(4x^3 + 6x)\,dx] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^4 + 3x^2 + 7| + C = \ln\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7} + C.$$

b. $\int\left[\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right]dw.$

$$\int\left[\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right]dw=\int(1-w)^{-2}\,dw+\int\frac{1}{w-1}\,dw$$

$$=-1\int(1-w)^{-2}[-dw]+\int\frac{1}{w-1}\,dw.$$

En la última línea la primera integral tiene la forma $\int u^{-2}\,du$, y la segunda tiene la forma $\int\frac{1}{v}dv$. Por lo tanto

$$\int\left[\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right]dw=-\frac{(1-w)^{-1}}{-1}+\ln|w-1|+C$$

$$=\frac{1}{1-w}+\ln|w-1|+C.$$

Para conveniencia de los lectores se lista en la Tabla 15.2 las fórmulas básicas de integración que se han analizado hasta aquí. Se supone que u es función de x.

TABLA 15.2
Fórmulas básicas de la integración

1. $\int k\,du=ku+C,\quad k$ es una constante.
2. $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\quad n\neq -1.$
3. $\int e^u\,du=e^u+C.$
4. $\int\frac{1}{u}\,du=\ln|u|+C,\quad u\neq 0.$
5. $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$
6. $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

EJERCICIOS 15.3

En los Problemas **1-76** *evalúe las integrales indefinidas.*

1. $\int(x+5)^7\,dx.$

2. $\int 15(x+2)^4\,dx.$

3. $\int 2x(x^2+3)^5\,dx.$

4. $\int(3x^2+14x)(x^3+7x^2+1)\,dx.$

5. $\int(3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3}\,dy.$

6. $\int(-12z^2-12z+1)(-4z^3-6z^2+z)^{18}\,dz.$

7. $\int\frac{3}{(3x-1)^3}\,dx.$

8. $\int\frac{4x}{(2x^2-7)^{10}}\,dx.$

9. $\int \sqrt{x + 10}\, dx.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x - 2}}\, dx.$

11. $\int (7x - 6)^4\, dx.$

12. $\int x^2(3x^3 + 7)^3\, dx.$

13. $\int x(x^2 + 3)^{12}\, dx.$

14. $\int x\sqrt{1 + 2x^2}\, dx.$

15. $\int x^4(27 + x^5)^{1/3}\, dx.$

16. $\int (3 - 2x)^{10}\, dx.$

17. $\int 3e^{3x}\, dx.$

18. $\int 2e^{2t+5}\, dt.$

19. $\int (2t + 1)e^{t^2+t}\, dt.$

20. $\int -3w^2e^{-w^3}\, dw.$

21. $\int xe^{5x^2}\, dx.$

22. $\int x^3e^{4x^4}\, dx.$

23. $\int 6e^{-2x}\, dx.$

24. $\int x^4e^{-6x^5}\, dx.$

25. $\int \frac{1}{x + 5}\, dx.$

26. $\int \frac{2x + 1}{x + x^2}\, dx.$

27. $\int \frac{3x^2 + 4x^3}{x^3 + x^4}\, dx.$

28. $\int \frac{3x^2 - 2x}{1 - x^2 + x^3}\, dx.$

29. $\int \frac{6z}{(z^2 - 6)^5}\, dz.$

30. $\int \frac{1}{(8y - 3)^3}\, dy.$

31. $\int \frac{4}{x}\, dx.$

32. $\int \frac{3}{1 + 2y}\, dy.$

33. $\int \frac{s^2}{s^3 + 5}\, ds.$

34. $\int \frac{2x^2}{3 - 4x^3}\, dx.$

35. $\int \frac{7}{5 - 3x}\, dx.$

36. $\int \frac{7t}{5t^2 - 6}\, dt.$

37. $\int \sqrt{5x}\, dx.$

38. $\int \frac{1}{(4x)^7}\, dx.$

39. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx.$

40. $\int \frac{7}{3 - 2x}\, dx.$

41. $\int 2y^3e^{y^4+1}\, dy.$

42. $\int \sqrt{4x - 3}\, dx.$

43. $\int v^2e^{-2v^3+1}\, dv.$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3 + 9}}\, dx.$

45. $\int (e^{-5x} + 2e^x)\, dx.$

46. $\int 4\sqrt[3]{y + 1}\, dy.$

47. $\int (x + 1)(3 - 3x^2 - 6x)^3\, dx.$

48. $\int 2ye^{3y^2}\, dy.$

49. $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x}\, dx.$

50. $\int (e^x - e^{-x} + e^{2x})\, dx.$

51. $\int \frac{16s - 4}{3 - 2s + 4s^2}\, ds.$

52. $\int (t^2 + 4t)(t^3 + 6t^2)^6\, dt.$

53. $\int x(2x^2 + 1)^{-1}\, dx.$

54. $\int (w^3 - 8w^7 + 1)(w^4 - 4w^8 + 4w)^{-6}\, dw.$

55. $\int -(x^2 - 2x^5)(x^3 - x^6)^{-10}\, dx.$

56. $\int \frac{3}{7}(v - 2)e^{2-4v+v^2}\, dv.$

57. $\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2)\, dx.$

58. $\int (e^{3.1})^2\, dx.$

59. $\int \frac{18 + 12x}{(4 - 9x - 3x^2)^5}\, dx.$

60. $\int (e^x - e^{-x})^2\, dx.$

61. $\int x(2x + 1)e^{4x^3+3x^2-4}\, dx.$

62. $\int (u^2 + 3 - ue^{7-u^2})\, du.$

63. $\int x\sqrt{(7 - 5x^2)^3}\, dx.$

64. $\int e^{-x/4}\, dx.$

65. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}.$

66. $\int \frac{x^3}{e^{x^4}}\, dx.$

67. $\int (x^2 + 1)^2\, dx.$

68. $\int \left[x(x^2 - 16)^2 - \frac{1}{2x + 5}\right] dx.$

69. $\int \left[\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^5}{(x^6 + 1)^2}\right] dx.$

70. $\int \left[\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right] dx.$

71. $\int \left[\frac{1}{3x - 5} - (x^2 - 2x^5)(x^3 - x^6)^{-10}\right] dx.$

72. $\int (r^3 + 5)^2\, dr.$

73. $\int\left[\sqrt{2x+3}-\frac{x}{x^2+3}\right]dx.$

74. $\int\left[\frac{2x}{x^2+3}-\frac{x^3}{(x^4+2)^2}\right]dx.$

75. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

76. $\int(e^4-2^e)\,dx.$

En los Problemas **77-80,** *determine y según las condiciones dadas.*

77. $y'=(3-2x)^2;\quad y(0)=1.$

78. $y'=x/(x^2+4);\quad y(1)=0.$

79. $y''=1/x^2;\quad y'(-1)=1,\ y(1)=0.$

80. $y''=\sqrt{x+2};\quad y'(2)=\frac{1}{3},\ y(2)=-\frac{7}{15}.$

81. En un estudio de la difusión de oxígeno en vasos capilares,* se utilizaron cilindros concéntricos de radio r como modelo de vaso capilar. La concentración C de oxígeno en los vasos capilares está dada por

$$C=\int\left(\frac{Rr}{2K}+\frac{B_1}{r}\right)dr,$$

en donde R es la rapidez constante a la cual el oxígeno se difunde desde el vaso, y K y B_1 son constantes. Calcule C. (Exprese la constante de integración como B_2.)

15.4 Técnicas de integración

Ahora que se tiene cierta práctica en la determinación de integrales indefinidas, supóngase que se consideran algunos problemas con mayor grado de dificultad.

Cuando se integran fracciones se requiere a veces una división preliminar para llegar a formas de integración más familiares, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1

a. $\int\frac{x^3+x-1}{x^2}\,dx.$

No resulta evidente ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, se puede dividir el integrando en tres fracciones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador.

$$\int\frac{x^3+x-1}{x^2}\,dx=\int\left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right]dx=\int\left[x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right]dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\int x^{-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

b. $\int\frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}\,dx.$

Aquí el integrando es un cociente de polinomios en el cual el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y el denominador tiene más de un término.

* W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

En situaciones como éstas para integrar se utiliza primero la división larga hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\,dx = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x + 1}[2\,dx]$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C.$$

EJEMPLO 2

Determinar las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)^3}\,dx.$

Se puede escribir esta integral como $\int \frac{(\sqrt{x} - 2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx$. Inténtese utilizar la regla de la potencia para la integración con $u = \sqrt{x} - 2$. Entonces, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ y

$$\int \frac{(\sqrt{x} - 2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int (\sqrt{x} - 2)^{-3}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]$$
$$= 2\int u^{-3}\,du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$
$$= -u^{-2} + C = -(\sqrt{x} - 2)^{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{(\sqrt{x} - 2)^2} + C.$$

b. $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx.$

Si $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}\,dx$ y

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

c. $\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw.$

Si $u = \ln w$, entonces $du = \frac{1}{w}\,dw$. Aplicando la regla para la integración, se tiene

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left(\frac{1}{w}\,dw\right)$$

$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C.$$

En la Secc. 15.3 se integró una función exponencial con base en e:

$$\int e^u\,du = e^u + C.$$

Se considera ahora la integral de una función exponencial con base diferente de e:

$$\int a^u\,du.$$

Para evaluar esta integral, en primer lugar se convierte a^u en una función exponencial con base e utilizando la Propiedad 8 de la Secc. 5.3:

$$a = e^{\ln a}. \tag{1}$$

El Ejemplo 3 lo ilustrará.

EJEMPLO 3

Obtener $\int 2^{3-x}\,dx$.

Aquí se desea integrar una función exponencial con base 2. Para efectuarlo, se convierte la base 2 a la base e utilizando la Ec. (1) para expresar 2 en términos de e. Como $2 = e^{\ln 2}$, se tiene

$$\int 2^{3-x}\,dx = \int (e^{\ln 2})^{3-x}\,dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx.$$

El integrando de la última integral es de la forma e^u, en donde $u = (\ln 2)(3-x)$. Como $du = -\ln 2\,dx$, se tiene

$$\int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}\int e^{(\ln 2)(3-x)}[(-\ln 2)\,dx] \quad \left(\text{forma: } \int e^u\,du\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Por ello,

$$\int 2^{3-x}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Obsérvese que se ha expresado la respuesta en términos de una función exponencial con base 2, la base del integrando original.

EJEMPLO 4

En cierto país la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}},$$

en donde el consumo C es función del ingreso nacional I. Aquí, I está expresada en miles de millones de unidades monetarias (u.m.) (50 u.m. = \$0.01). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 10 miles de millones de u.m. (C = 10) cuando I = 12.

Debido a que la propensión marginal al consumo es la derivada de C, se tiene

$$C = \int\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \int\frac{3}{4}\,dI - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI.$$

Si se fija $u = 3I$, entonces $du = 3dI$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int(3I)^{-1/2}[3\,dI]$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_1.$$

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + C_1.$$

Cuando $I = 12$, entonces $C = 10$, de modo que,

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + C_1,$$

$$10 = 9 - 2 + C_1.$$

Por consiguiente, $C_1 = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3.$$

EJERCICIOS 15.4

En los Problemas **1-42**, *determine las integrales indefinidas.*

1. $\int\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2}{x^3}\,dx.$

2. $\int\frac{9x^2 + 5}{3x}\,dx.$

3. $\int(3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\,dx.$

4. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}\,dx.$

5. $\int\frac{4}{\sqrt{2 - 3x}}\,dx.$

6. $\int\frac{xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2} - 2}.$

7. $\int 4^{7x}\,dx.$

8. $\int 3^x\,dx.$

9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\,dx.$

10. $\int \left(e^x + x^e + ex + \frac{e}{x} \right) dx.$

11. $\int \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}\, dx.$

12. $\int (e^{4-3x})^2\, dx.$

13. $\int \frac{e^{7/x}}{x^2}\, dx.$

14. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\, dx.$

15. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\, dx.$

16. $\int \frac{3e^s}{6 + 5e^s}\, ds.$

17. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$

18. $\int \sqrt{t}(5 - t\sqrt{t})^{0.4}\, dt.$

19. $\int \frac{\ln^2(r + 1)}{r + 1}\, dr.$

20. $\int \frac{8x^3 - 6x^2 - ex^4}{3x^3}\, dx.$

21. $\int x\sqrt{e^{x^2+3}}\, dx.$

22. $\int \frac{x + 3}{x + 6}\, dx.$

23. $\int \frac{1}{(x + 3)\ln(x + 3)}\, dx.$

24. $\int (x^{e^2} + 2x)\, dx.$

25. $\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4 - 1}} - \ln 4 \right) dx.$

26. $\int \frac{x - x^{-2}}{x^2 + 2x^{-1}}\, dx.$

27. $\int \frac{2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4}{x^3}\, dx.$

28. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx.$

29. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\, dx.$

30. $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{x - 5}\, dx.$

31. $\int \frac{x}{x - 1}\, dx.$

32. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)}\, dx.$

33. $\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 2}}\, dx.$

34. $\int \frac{7}{(2x + 1)[1 + \ln(2x + 1)]^2}\, dx.$

35. $\int \frac{(e^{-x} + 6)^2}{e^x}\, dx.$

36. $\int \left[\frac{1}{8x + 1} - \frac{1}{e^x(8 + e^{-x})^2} \right] dx.$

37. $\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2} + 3}\, dx.$

38. $\int \frac{3}{x(\ln x)^{1/2}}\, dx.$

39. $\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\, ds.$

40. $\int \frac{\ln^3 x}{3x}\, dx.$

41. $\int e^{\ln(x+2)}\, dx.$

42. $\int dx.$

En los Problemas **43** *y* **44**, *dr/dq es una función de ingreso marginal. Calcule la función de demanda.*

43. $\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q + 2)^2}.$

44. $\frac{dr}{dq} = \frac{900}{(2q + 3)^3}.$

En los Problemas **45** *y* **46**, *dc/dq es una función de costo marginal. Evalúe la función de costo total si el costo fijo en cada caso es de* 2000.

45. $\frac{dc}{dq} = \frac{20}{q + 5}.$

46. $\frac{dc}{dq} = 2e^{0.001q}.$

En los Problemas **47-49** *dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Obtenga la función de consumo sujeta a la condición dada.*

47. $\frac{dC}{dI} = \frac{1}{\sqrt{I}};\quad C(9) = 8.$

48. $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}};\quad C(3) = \frac{11}{4}.$

49. $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6\sqrt{I}};\quad C(25) = 23.$

15.5 Sumatoria

Como preparación para otras aplicaciones de la integración es necesario analizar ciertas sumas.

Considérese la suma S de los primeros n enteros positivos:

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n. \tag{1}$$

Escribiendo el lado derecho de la Ecuación (1) en orden inverso, se tiene

$$S = n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1. \tag{2}$$

Sumando los lados correspondientes de las Ecuaciones (1) y (2), se produce

$$\begin{array}{rcccccccccc} S &=& 1 &+& 2 &+ \cdots +& (n-1) &+& n \\ S &=& n &+& (n-1) &+ \cdots +& 2 &+& 1 \\ \hline 2S &=& (n+1) &+& (n+1) &+ \cdots +& (n+1) &+& (n+1). \end{array}$$

En el lado derecho de la última ecuación el término $(n + 1)$ aparece n veces. Consecuentemente, $2S = n(n + 1)$, y

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(la suma de los primeros } n \text{ enteros positivos).} \tag{3}$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos corresponde a $n = 100$ y es $100(100 + 1)/2$ o bien 5050.

Por conveniencia con el objeto de señalar una suma se introduce la *notación con sigma* denominada así porque se utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula). Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 5)$$

denota la suma de los números que se obtienen de la expresión $2k + 5$, reemplazando primero k por 1, después por 2 y finalmente por 3. Por ello,

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 5) = [2(1) + 5] + [2(2) + 5] + [2(3) + 5]$$

$$= 7 + 9 + 11 = 27.$$

A la letra k se le denomina *índice de la sumatoria*; los números 1 y 3 son los *límites de la sumatoria* (el 1 es el *límite inferior* y 3 es el *límite superior*). Los valores del índice comienzan en el límite inferior y avanzan sobre los valores enteros hasta el límite superior. El símbolo que se utiliza para el índice es un símbolo "artificial" en el sentido de que no afecta la suma de los términos. Se puede utilizar cualquier otra letra. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{3} (2j + 5) = 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{3} (2k + 5).$$

EJEMPLO 1

Evaluar cada una de las siguientes

a. $\displaystyle\sum_{k=4}^{7} \frac{k^2 + 3}{2}$.

Aquí, la suma comienza con $k = 4$.

$$\sum_{k=4}^{7} \frac{k^2 + 3}{2} = \frac{4^2 + 3}{2} + \frac{5^2 + 3}{2} + \frac{6^2 + 3}{2} + \frac{7^2 + 3}{2}$$

$$= \frac{19}{2} + \frac{28}{2} + \frac{39}{2} + \frac{52}{2} = 69.$$

b. $\sum_{j=0}^{2} (-1)^{j+1}(j-1)^2$.

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^{j+1}(j-1)^2$$

$$= (-1)^{0+1}(0-1)^2 + (-1)^{1+1}(1-1)^2 + (-1)^{2+1}(2-1)^2$$

$$= (-1) + 0 + (-1) = -2.$$

Para expresar la suma de los primeros n enteros positivos en notación de sumatoria, se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$$

De la Ecuación (3),

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4}$$

Adviértase en la Ecuación (4) que $\sum_{k=1}^{n} k$ es función sólo de n y no de k.

EJEMPLO 2

Evaluar cada una de las siguientes.

a. $\sum_{k=1}^{60} k$.

Aquí se debe calcular la suma de los primeros sesenta enteros positivos. Por la Ecuación (4) con $n = 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} k = \frac{60(60+1)}{2} = 1830.$$

b. $\sum_{k=1}^{n-1} k$.

En este caso hay que sumar los primeros $n - 1$ enteros positivos. Reemplazando n por $n - 1$ en la Ecuación (4), se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Otra fórmula útil es la de la suma de los *cuadrados* de los primeros n enteros positivos. Se le utilizará posteriormente en la Sección 14.5.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3

Evaluar $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$.

Esta suma puede escribirse como $\sum_{k=1}^{6} k^2$. Mediante la Ecuación (5) con $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)[2(6)+1]}{6} = 91.$$

Se concluye con una propiedad de la sumatoria. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales y c es una constante, entonces

$$\sum_{i}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n$$

$$= c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Así

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esto significa que un factor constante puede "saltar" y aparecer antes del símbolo de sumatoria. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2.$$

Por la Ecuación (5), se tiene

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2 = 3\left[\frac{5(6)(11)}{6}\right] = 165.$$

ADVERTENCIA

Aunque los factores constantes pueden "saltar" a la parte anterior de la sigma, ninguna otra expresión puede hacerlo.

EJERCICIOS 15.5

En los Problemas **1-10**, *evalúe la suma dada.*

1. $\sum_{k=1}^{5} (k + 4)$.

2. $\sum_{k=12}^{15} (5 - 2k)$.

3. $\sum_{j=1}^{10} (-1)^j$.

4. $\sum_{j=0}^{5} 2^j$.

5. $\sum_{n=2}^{3} (3n^2 - 7)$.

6. $\sum_{n=2}^{4} \frac{n+1}{n-1}$.

7. $\sum_{k=3}^{4} \frac{(-1)^k(k+1)}{2^k}$.

8. $\sum_{n=1}^{5} 1$.

9. $\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}(1-k^2)}{k}$.

10. $\sum_{n=1}^{4} (n^2 + n)$.

En los Problemas **11-16**, *exprese las sumas dadas en notación de sumatoria.*

11. $1 + 2 + 3 + \cdots + 15$.

12. $7 + 8 + 9 + 10$.

13. $1 + 3 + 5 + 7$.

14. $2 + 4 + 6 + 8$.

15. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 12^2$.

16. $3 + 6 + 9 + 12$.

En los Problemas **17-22**, *evalúe las sumas utilizando las Ecuaciones* (4) *y* (5).

17. $\sum_{k=1}^{450} k$.

18. $\sum_{k=1}^{10} k^2$.

19. $\sum_{j=1}^{6} 4j$.

20. $\sum_{i=1}^{40} \frac{i}{2}$.

21. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$.

22. $\sum_{j=1}^{8} \left(\frac{j}{2}\right)^2$.

23. Una compañía tiene un activo cuyo valor original es \$3200 y no tiene valor de desecho. El costo de mantenimiento es \$100 anuales y aumenta en \$100 cada año. Demuestre que el costo total anual promedio C en un periodo de n años es

$$C = \frac{3200}{n} + 50(n + 1).$$

Obtenga el valor de n que minimiza C. ¿Cuál es el costo anual promedio a este valor de n?

15.6 La integral definida

En la Figura 15.1 se muestra la región limitada por las rectas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = 1$. Es simplemente un triángulo rectángulo. Si b y h son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, de lo que se conoce de geometría se sabe que el área A del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidades cuadradas. Ahora se halla esta área mediante otro método que, como se verá posteriormente, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la sumatoria de áreas de rectángulos.

Se divide el intervalo [0, 1] del eje x en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos separados entre sí en distancias iguales $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$ (véase la Figura 15.2). Cada subintervalo tiene longitud $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones: R_1, R_2, R_3 y R_4, tal como se señala.

A cada subregión se le puede asociar un rectángulo *suprainscrito* (Figura 15.3); es decir, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Puesto que f es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el punto final del lado derecho. En consecuencia, las áreas de los rectángulos suprainscritos asociados a las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de

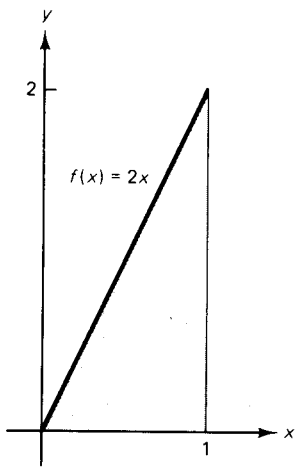


FIGURA 15.1

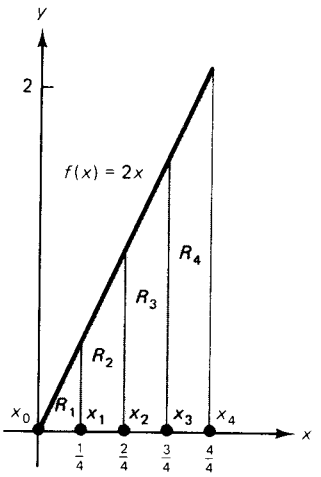


FIGURA 15.2

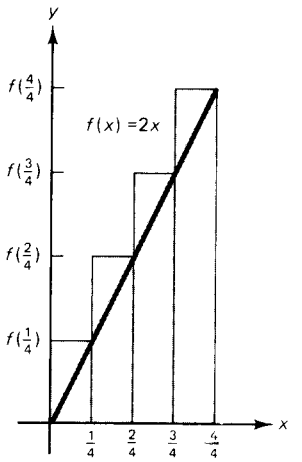


FIGURA 15.3

cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Por lo tanto, la suma de las áreas de esos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$, (que se lee "S sub 4 con raya" o "la cuarta suma superior"), aproxima el área A del triángulo.

$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{4}{4})$$

$$= \tfrac{1}{4}[2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4}) + 2(\tfrac{4}{4})] = \tfrac{5}{4}$$

Se puede verificar que es posible escribir $\overline{S}_4$ como $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ sea mayor que el área real del triángulo podría haberse anticipado debido a que $\overline{S}_4$ incluye áreas de las regiones sombreadas que no son partes del triángulo (véase la Figura 15.3).

Por otro lado, a cada subregión se le puede asociar también un rectángulo *infrainscrito* (véase la Figura 15.4); es decir, un rectángulo cuya base es el subintervalo corres-

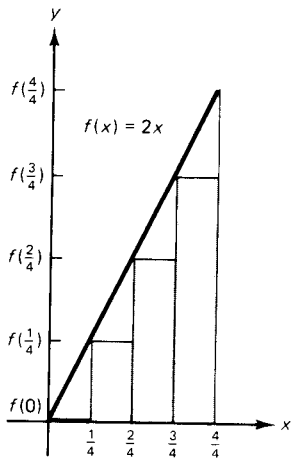


FIGURA 15.4

pondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Como f es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el punto final del lado izquierdo. Por consiguiente, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, la que se denota por $\underline{S}_4$ (que se lee "S sub 4 con raya" o "la cuarta suma inferior") es también una aproximación al área A del triángulo.

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4}) \\ &= \tfrac{1}{4}[2(0) + 2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Utilizando notación de sumatoria, se puede escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Obsérvese que $\underline{S}_4$ es inferior al área del triángulo porque los rectángulos no toman en consideración la porción del triángulo que no está sombreada en la Figura 15.4.

Dado que $\frac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \frac{5}{4}$, se dice que $\underline{S}_4$ es una aproximación a A desde *abajo* y que $\overline{S}_4$ es una aproximación a A desde *arriba*.

Si se divide [0, 1] en cuatro subintervalos más, se esperarían mejores aproximaciones a A. Para probar esta afirmación enseguida se utilizan seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. En este caso, $\overline{S}_6$, el área total de seis rectángulos suprainscritos (véase la Figura 15.5 y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos infrainscritos (véase la Figura 15.6) son

$$\begin{aligned}\overline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{6}{6}) \\ &= \tfrac{1}{6}[2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6}) + 2(\tfrac{6}{6})] = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\underline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(0) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6}) \\ &= \tfrac{1}{6}[2(0) + 2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6})] = \tfrac{5}{6}.\end{aligned}$$

Nótese que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$ y, con identificaciones apropiadas, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serían

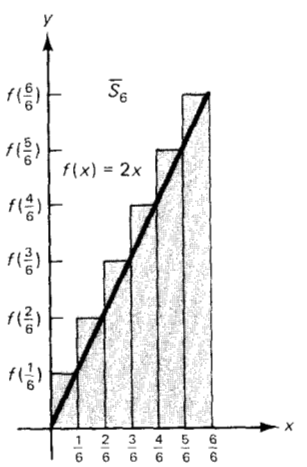


FIGURA 15.5

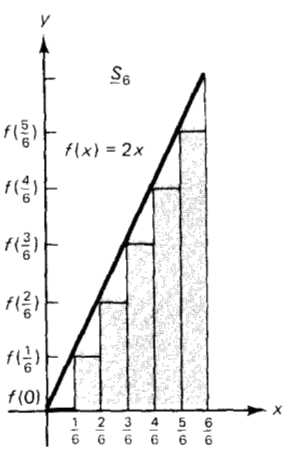


FIGURA 15.6

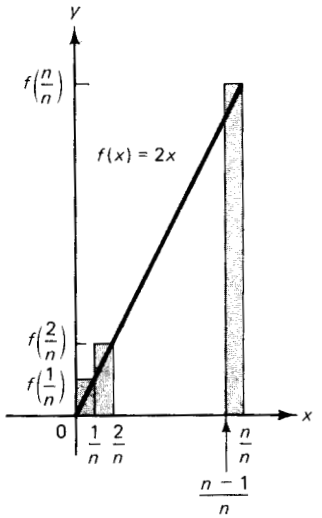


FIGURA 15.7

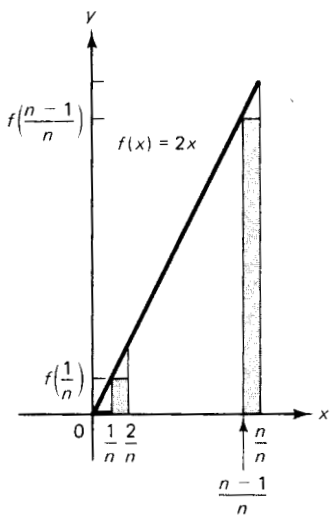


FIGURA 15.8

de la *forma* $\Sigma f(x)\,\Delta x$. Empleando seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que cuando se consideraron cuatro subintervalos, lo cual era de esperarse.

En términos más generales, si se divide [0, 1] en n subintervalos de igual longitud Δx, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos finales de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$, y $n/n = 1$ (véase la Figura 14.7). El área total de n rectángulos *suprainscritos* es

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left[2\left(\frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n^2}[1 + 2 + \cdots + n] \qquad \left(\text{factorizando } \frac{2}{n} \text{ en cada término}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

De la Sección 15.4, la suma de los primeros n enteros positivos es $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Consecuentemente,

$$\bar{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}.$$

Para n rectángulos *infrainscritos* el área total determinada por los subintervalos (véase la Figura 15.8) es

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left[2(0) + 2\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n^2}[1 + \cdots + (n-1)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Sumando los primeros $n - 1$ enteros positivos, como se hizo en el Ejemplo 2(b) de la Sección 15.4, se obtiene

$$\underline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n}.$$

De las Ecuaciones (1) y (2) se observa de nueva cuenta que tanto $\overline{S}_n$ como $\underline{S}_n$ son sumas de la *forma* $\Sigma f(x)\,\Delta x$, es decir $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, parece razonable y es en realidad cierto que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n.$$

Conforme n se hace mayor, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ se vuelven mejores aproximaciones a A. De hecho, si se obtienen los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ cuando n tiende a ∞ a través de valores enteros positivos.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Ya que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1, \tag{3}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n,$$

se considera que este límite es el área del triángulo. Por ello, $A = 1$ unidad cuadrada, lo cual concuerda con lo que se había averiguado antes.

Se define el límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, es decir 1, como la **integral definida** de $f(x) = 2x$ en el intervalo que va de $x = 0$ a $x = 1$, y se le denota escribiendo

$$\int_0^1 2x\,dx = 1. \tag{4}$$

La razón para utilizar el término "integral definida" y los símbolos de la Ecuación (4) será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen asociados al signo de integral $\int$ de la Ecuación (4) se denominan los **límites de la integración**; 0 es el **límite inferior** y 1 es el **límite superior**.

En general, para una función f definida en un intervalo de $x = a$ a $x = b$, en donde $a \leq b$, se pueden formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo, respectivamente, sobre cada uno de n subintervalos de igual longitud Δx.* Cada suma es de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$. El límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si existe, se denomina integral definida de f sobre $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

* Aquí, se supone que existen valores tanto máximo como mínimo.

El símbolo x es la **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando**. En términos de un proceso de límites, se tiene

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se deben hacer dos señalamientos con respecto a la integral definida. En primer lugar, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma\, f(x)\,\Delta x$. De hecho, el símbolo de integral es una "S" alargada, la primera letra de "Suma". En segundo lugar, para una función arbitraria f definida en un intervalo, se puede estar en posibilidades de calcular sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, y determinar su límite común, si existe. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos si $f(x)$ es negativa en algunos puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa) y, de manera que el límite común puede no representar área. Así que, la integral definida no es otra cosa que un número real; puede o no representar un área.

Como se vio en la Ecuación (3), $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que se considerarán aquí estos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para ahorrar tiempo sólo se utiliza el **punto extremo del lado derecho** de cada subintervalo para calcular la suma. Para las funciones de esta sección a esta suma se le denotará por S_n y corresponderá a $\underline{S}_n$ o bien a $\overline{S}_n$.

EJEMPLO 1

Calcular el área de la región del primer cuadrante delimitada por $y = f(x) = 4 - x^2$ *y las rectas* $x = 0$ y $y = 0$.

En la Figura 15.9 aparece un croquis de esa región. El intervalo sobre el cual varía x en tal región es, como puede verse, [0, 2], que se puede dividir en n subintervalos de igual longitud Δx. Puesto que la longitud de [0, 2] es 2, se toma $\Delta x = 2/n$. Los puntos finales de los subintervalos son $x = 0,\ 2/n,\ 2(2/n),\ \ldots,\ (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$ (véase la Figura 15.10).

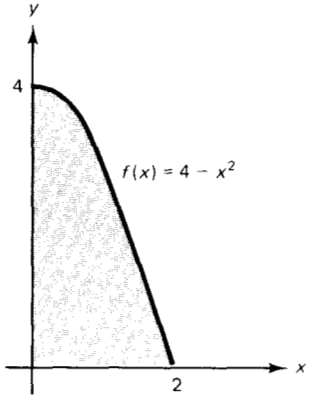


FIGURA 15.9

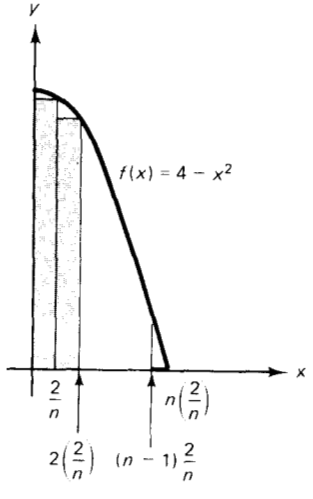


FIGURA 15.10

Utilizando los puntos finales del lado derecho,

$$S_n = \frac{2}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n}f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{2}{n}f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\left\{4 - \left[\frac{2}{n}\right]^2\right\} + \left\{4 - \left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\} + \cdots + \left\{4 - \left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\}\right].$$

En virtud de que el número 4 aparece n veces en la suma, se puede simplificar

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 - 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \cdots - n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2\{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}\right].$$

De la Sección 15.5, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, por lo que

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right).$$

Finalmente, se toma el límite de S_n cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

De ahí a que el área de la región es $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

b. Evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$.

Ya que $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$, de la parte (a) se concluye que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}.$$

EJEMPLO 2

Integrar $f(x) = x - 5$ *de* $x = 0$ *a* $x = 3$; *es decir, evaluar* $\int_0^3 (x - 5)\,dx$.

En la Figura 15.11 aparece un croquis de $f(x) = x - 5$ sobre $[0, 3]$. Se divide $[0, 3]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $x = 0, 3/n, 2(3/n), \ldots, (n-1)(3/n)$ y $n(3/n) = 3$. Adviértase que $f(x)$ es negativa en cada punto final. Se forma la suma

$$S_n = \frac{3}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n} f\left[2\left(\frac{3}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{3}{n} f\left[n\left(\frac{3}{n}\right)\right].$$

Debido a que todos los términos son negativos, *no* representan áreas de rectángulos; de hecho, son los valores negativos de áreas de rectángulos. Simplificando, resulta

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n}\left[\left\{\frac{3}{n} - 5\right\} + \left\{2\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\} + \cdots + \left\{n\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}\{1 + 2 + \cdots + n\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \left(\frac{3}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] \\ &= -15 + \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= -15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tomando el límite, da

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[-15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = -15 + \frac{9}{2} = -\frac{21}{2}.$$

En consecuencia,

$$\int_0^3 (x - 5)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

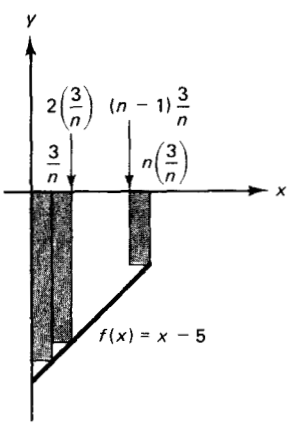


FIGURA 15.11

La integral definida **no** es el área de la región limitada por $f(x) = x - 5$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Representa el valor negativo de esa área.

En el Ejemplo 2 se demostró que *la integral definida no necesariamente representa áreas*. De hecho, en ese caso la integral definida fue negativa. Sin embargo, si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para toda n. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$ y de esto se desprende que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Además, esta integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ (véase la figura 15.12).

Aunque la forma en que se abordó aquí el análisis de la integral definida es suficiente para los propósitos del libro, no es de ninguna manera una forma rigurosa. **Lo importante que debe recordarse acerca de la integral definida es que es el límite de una suma.**

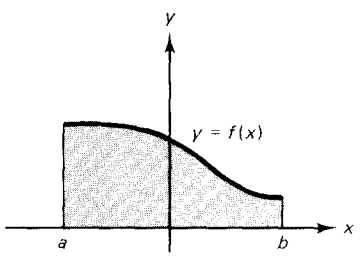


FIGURA 15.12

EJERCICIOS 15.6

En los Problemas **1-4** *esquematice la región en el primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región mediante la suma que se señala. Utilice el punto extremo del lado derecho de cada subintervalo.*

1. $f(x) = x$, $y = 0$, $x = 1$; S_3.

2. $f(x) = 3x$, $y = 0$, $x = 1$; S_5.

3. $f(x) = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; S_3.

4. $f(x) = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; S_2.

En los Problemas **5-10**, *defina la región en el primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de S_n cuando $n \to \infty$. Utilice el punto extremo del lado derecho de cada subintervalo.*

5. La región que se describió en el Problema 1.

6. La región que se describió en el Problema 2.

7. La región que se describió en el Problema 3.

8. La región que se describió en el Problema 4.

9. $f(x) = 2x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

10. $f(x) = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$.

Para cada uno de los siguientes problemas evalúe la integral definida dada obteniendo el límite de S_n. Utilice el punto extremo del lado derecho de cada subintervalo. Trace la gráfica, sobre el intervalo dado, de la función que se integra.

11. $\int_0^2 3x\,dx$.

12. $\int_0^4 9\,dx$.

13. $\int_0^3 -4x\,dx$.

14. $\int_0^3 (2x - 9)\,dx$.

15. $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx$.

15.7 El teorema fundamental del Cálculo Integral

Hasta ahora se han considerado en forma separada los procesos de límites tanto de la derivada como de la integral definida. En este punto se reúnen estas ideas fundamentales y se desarrolla la importante relación que existe entre ellas. Como resultado pueden evaluarse las integrales definidas en forma más eficiente.

En la Figura 15.13 se presenta la gráfica de una función f. Supóngase que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no queda por debajo del eje x. Es decir, $f(x) \geq 0$. De la última sección se sabe que el área de la región por debajo de la gráfica y por encima del eje x, de $x = a$ a $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Ahora se considera otra forma para determinar esta área.

Supóngase que existe una función $A = A(x)$, a la cual se hará referencia como una función "de área", que expresa el área de la región que se encuentra por debajo de la gráfica de f y por encima del eje x, de a a x, en donde $a \leq x \leq b$. Esta región aparece sombreada en la Figura 15.14. No se debe confundir $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en x.

De su definición pueden enunciarse en forma inmediata dos propiedades de A:

1. $A(a) = 0$ puesto que no existe área de a a a;
2. $A(b)$ es el área desde a hasta b; es decir,

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

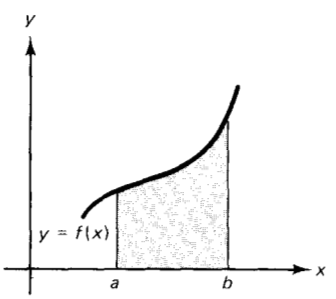


FIGURA 15.13

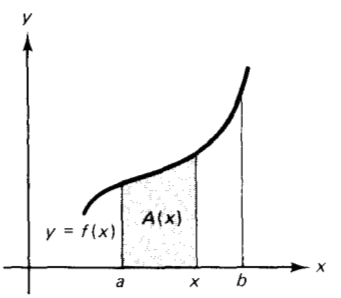


FIGURA 15.14

Si se aumenta x en h unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada de la Figura 15.15. Por consiguiente, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas de las Figuras 15.15 y 15.14: a saber, el área de la región sombreada de la Figura 15.16. Para una h que esté lo suficientemente cercana a 0 el área de esta región es la misma que el área de un rectángulo (Figura 15.17) cuya base es h y cuya altura es algún valor y que está entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí y es función de h. Así que el área del rectángulo es, por un lado, $A(x + h) - A(x)$, por el otro es, $h\ y$:

$$A(x + h) - A(x) = h\bar{y}$$

o bien

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \bar{y} \qquad \text{(dividiendo entre } h\text{)}.$$

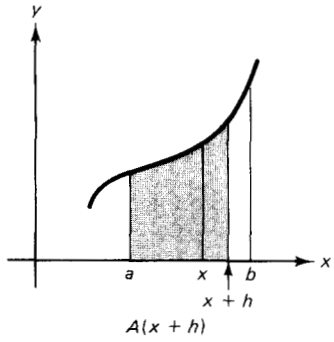


FIGURA 15.15

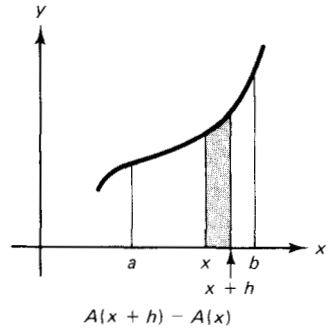


FIGURA 15.16

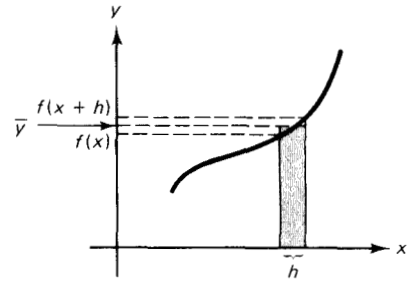


FIGURA 15.17

Cuando $h \to 0$, entonces $\bar{y}$ se aproxima al número $f(x)$, de modo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x). \tag{1}$$

Pero el lado izquierdo es simplemente la derivada de A. Consecuentemente, la Ecuación (1) se convierte en

$$A'(x) = f(x).$$

Se concluye que la función de área A tiene la propiedad adicional de que su derivada A' es f. Es decir, A es una antiderivada de f. Ahora, supóngase que F es *cualquier* antiderivada de f. Como tanto A como F son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante C:

$$A(x) = F(x) + C. \tag{2}$$

Se debe recordar que $A(a) = 0$. Evaluando ambos lados de la Ecuación (2) cuando $x = a$,

$$0 = F(a) + C$$

o bien

$$C = -F(a).$$

Por ello, la Ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Si $x = b$, entonces de la Ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Pero debe recordarse que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

De las Ecuaciones (4) y (5) resulta

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Así que es evidente una relación entre una integral definida y la antidiferenciación. Para determinar $\int_a^b f(x)\,dx$ resulta suficiente encontrar una antiderivada de f, por ejemplo F, y restar el valor de F en el límite inferior a de su valor en el límite superior b. Aquí se supuso que f era continua y que $f(x) \geq 0$, de manera que fue posible apoyarse en el concepto de "área". Sin embargo, el resultado es cierto para cualquier función continua* y se conoce como el *Teorema Fundamental del Cálculo Integral.*

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f ahí, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Es importante comprender la diferencia entre una integral definida y una indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número** definido como el límite de una suma. El Teorema Fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (una antiderivada de f), que es una **función** de x y está relacionada con el proceso de diferenciación, se puede utilizar para determinar este límite.

Supóngase que se aplica el Teorema Fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Dado que una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, entonces

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}.$$

Esto confirma el resultado que se obtuvo en el Ejemplo 1(b) de la Sección 15.5. Si se hubiera elegido $F(x)$ para $4x - (x^3/3) + C$, entonces $F(2) - F(0) = [(8 - \frac{8}{3}) + C] - [0 + C] = \frac{16}{3}$, al igual que antes. En virtud de que la elección del valor de C no es de importancia, por conveniencia siempre se elige un valor de 0, como se hizo originalmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(x)\Big|_a^b.$$

En consecuencia,

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}.$$

* Si f es continua en $[a, b]$, se puede demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe en realidad.

Para $\int_a^b f(x)\,dx$, se ha supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en los que $a > b$ o $a = b$. Si $a > b$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es decir, intercambiando los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\,dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\,dx.$$

Si los límites de la integración son iguales, se tiene

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Merecen atención algunas propiedades de la integral definida. La primera propiedad plantea de manera más formal el comentario que se hizo en la sección anterior con respecto al área.

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces puede interpretarse a $\int_a^b f(x)\,dx$ como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, en donde k es una constante.

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

Las Propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse mediante el Teorema Fundamental en términos de una antiderivada. Otras dos propiedades de las integrales definidas son:

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

La variable de integración es una "variable ficticia" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, es decir, el mismo número.

Por ejemplo, para ilustrar la propiedad 4, puede verificarse que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt.$$

5. Si f es continua en un intervalo I y a, b, c se encuentran en I, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

La Propiedad 5 significa que es posible expresar la integral definida sobre un intervalo en términos de integrales definidas sobre subintervalos. Por ello,

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx.$$

En este punto se examinan algunos ejemplos de integración definida y en la siguiente sección se calcularán algunas áreas.

EJEMPLO 1

Evaluar cada una de las siguientes integrales definidas.

a. $\displaystyle\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6)\,dx.$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6)\,dx \\
&= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3} \\
&= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right] \\
&= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48.
\end{aligned}$$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx.$

Para encontrar una antiderivada del integrando, se aplica la regla de la potencia para la integración

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx &= \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}[4x^3\,dx] = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

ADVERTENCIA
En la parte (b) el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior 0 es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** se suponga que una evaluación en el límite 0 da el valor 0.

EJEMPLO 2

Evaluar cada una de las siguientes integrales definidas.

a. $\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\, dt$.

$$\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\, dt = 4\int_1^2 t^{1/3}\, dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2 + 1)^3[2t\, dt]$$

$$= (4)\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2 + 1)^4}{4}\bigg|_1^2$$

$$= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4)$$

$$= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8}$$

$$= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}.$$

b. $\int_0^1 e^{3t}\, dt$.

$$\int_0^1 e^{3t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}[3\, dt]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

EJEMPLO 3

Evaluar $\int_{-2}^1 x^3\, dx$.

$$\int_{-2}^1 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

La razón por la cual el resultado es negativo resulta evidente de la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$ (véase la Figura 15.18). Para $-2 \le x < 0$, $f(x)$ es negativa. Ya que una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\, \Delta x$, entonces $\int_{-2}^0 x^3\, dx$ no sólo es un número negativo, sino que es también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\, dx$ es el área de la región sombreada en el primer cuadrante. Sin embargo, la integral definida sobre la totalidad del intervalo $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, puesto que

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx.$$

Por consiguiente, $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$ no representa el área entre la curva y el eje x. Sin embargo, si lo que se desea es el área, se puede obtener mediante

$$\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_{0}^{1} x^3\,dx.$$

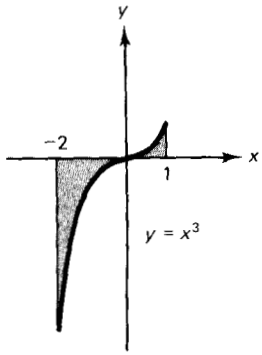


FIGURA 15.18

ADVERTENCIA

Se debe recordar que $\int_a^b f(x)\,dx$ es el límite de una suma. En algunos casos este límite representa una área. En otros casos no es así. Cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces representa el área que se encuentra entre f y el eje x, de $x = a$ hasta $x = b$.

Como una función f es una antiderivada de f', por el Teorema Fundamental se tiene que

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{6}$$

Pero $f'(x)$ es la tasa de variación de f con respecto a x. Consecuentemente, si se conoce la tasa de cambio de f y se desea hallar la diferencia entre los valores funcionales $f(b) - f(a)$, basta evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

EJEMPLO 4

La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2.$$

Si la producción es actualmente igual a $q = 80$ unidades por semana, ¿qué tanto más costaría incrementar la producción a 100 unidades por semana?

La función de costo total es $c = c(q)$, y se desea calcular la diferencia $c(100) - c(80)$. La tasa de cambio de c es dc/dq de modo que por la Ecuación (6),

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}\,dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$$

$$= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100}$$

$$= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)]$$

$$= 3200 - 2080 = 1120.$$

Si c está en dólares entonces el costo por aumentar la producción de 80 a 100 unidades es \$1120.

EJERCICIOS 15.7

En los Problemas **1-38,** *evalúe la integral definida.*

1. $\int_0^2 5\,dx.$

2. $\int_2^4 (1 - e)\,dx.$

3. $\int_1^2 7x\,dx.$

4. $\int_0^5 -3x\,dx.$

5. $\int_{-3}^1 (2x - 3)\,dx.$

6. $\int_{-1}^1 (4 - 9y)\,dy.$

7. $\int_2^3 (y^2 - 2y + 1)\,dy.$

8. $\int_3^2 (2t - t^2)\,dt.$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2 - w - 1)\,dw.$

10. $\int_8^9 dt.$

11. $\int_1^2 -4t^{-4}\,dt.$

12. $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2}\,dx.$

13. $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^5}\,dx.$

14. $\int_{1/2}^{3/2} (x^2 + x + 1)\,dx.$

15. $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx.$

16. $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)\,dx.$

17. $\int_{-1}^1 (z + 1)^5\,dz.$

18. $\int_1^8 (x^{1/3} - x^{-1/3})\,dx.$

19. $\int_0^1 2x^2(x^3 - 1)^3\,dx.$

20. $\int_1^3 (x + 3)^3\,dx.$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy.$

22. $\int_0^{e-1} \frac{1}{x + 1}\,dx.$

23. $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx.$

24. $\int_0^1 (3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2)^4\,dx.$

25. $\int_4^5 \frac{2}{(x - 3)^3}\,dx.$

26. $\int_0^6 \sqrt{2x + 4}\,dx.$

27. $\int_{1/3}^2 \sqrt{10 - 3p}\,dp.$

28. $\int_{-1}^1 q\sqrt{q^2 + 3}\,dq.$

29. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3 + 1}\,dx.$

30. $\int_0^{\sqrt{7}} \left[2x - \frac{x}{(x^2 + 1)^{5/3}}\right]\,dx.$

31. $\int_0^1 \frac{2x^3 + x}{x^2 + x^4 + 1}\,dx.$

32. $\int_a^b (m + ny)\,dy.$

33. $\int_0^1 (e^x - e^{-2x})\,dx.$

34. $\int_{-2}^1 |x|\,dx.$

35. $\int_1^e (x^{-1} + x^{-2} - x^{-3})\,dx.$

36. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)\,dx.$

37. $\int_1^3 (x + 1)e^{x^2 + 2x}\,dx.$

38. $\int_3^4 \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx.$

39. En un análisis de la seguridad en el tránsito Shonle* considera qué tanta aceleración puede tolerar una persona en un accidente sin que reciba lesiones considerables. El *índice de severidad* se define de la siguiente manera:

$$\text{índice de severidad} = \int_0^T \alpha^{5/2}\, dt,$$

en donde α (la letra griega "alfa") se considera una constante implicada en la aceleración promedio ponderada y T es la duración de la colisión. Calcule el índice de severidad.

40. En Estadística la media μ (la letra griega "mi") de la función densidad de probabilidad continua f definida en el intervalo $[a, b]$ es

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]\, dx,$$

y la variancia σ^2 (σ es la letra griega "sigma") es

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

Evalúe μ y después σ^2 si $a = 0$, $b = 1$ y $f(x) = 1$.

41. El economista Pareto† ha establecido una ley empírica para la distribución de ingresos elevados que da el número N de personas que reciben x o más unidades monetarias. Si $dN/dx = -Ax^{-B}$, en donde A y B son constantes, establezca una integral definida que de el número de personas que tienen ingresos entre a y b, en donde $a < b$.

42. En un análisis de la mutación de genes‡ ocurre la siguiente integral:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\, dx.$$

Evalúela.

43. El valor actual de un flujo continuo de ingresos de \$2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt.$$

Calcule el valor actual redondeando a unidades.

44. En Biología a menudo surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre distintos compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia de la corriente sanguínea a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que ocurre en un problema de difusión entre dos compartimentos:§

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\, d\tau,$$

en donde τ (la letra griega "tau") y a y b son constantes.

45. Para cierta población supóngase que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad de x en cualquier momento del año. A esta función se le denomina *función de la tabla de vida*. En condiciones apropiadas la integral

$$\int_x^{x+n} l(t)\, dt$$

da el número esperado de personas en la población entre las edades exactas de x y $x + n$, inclusive. Si $l(x) = 10{,}000\sqrt{100 - x}$, determine el número de personas entre las edades exactas de 36 y 64 años, inclusive. Proporcione la respuesta al entero más cercano, dado que respuestas fraccionarias no tienen sentido.

46. Si c_0 es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces con un consumo continuo la cantidad total de mineral que se utiliza en el intervalo $[0, t_1]$ es

$$\int_0^{t_1} c_0 e^{kt}\, dt,$$

en donde k es la tasa de consumo. Para un mineral de los llamados tierras raras se ha determinado que $c_0 = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral anterior para estos datos.

47. La función de costo marginal de un fabricante es $dc/dq = 0.2q + 3$. Si c está en dólares, determine el costo implicado en un aumento de la producción de 60 a 70 unidades.

48. Repita el Problema 47 si $dc/dq = 0.003q^2 - 0.6q + 40$ y la producción aumenta de 100 a 200 unidades.

49. La función de ingreso marginal de un fabricante

* J.I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

† G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), p. 16.

‡ W.J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

§ W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

es $dr/dq = 1000/\sqrt{100q}$. Si r está en dólares, obtenga el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 400 a 900 unidades.

50. Repita el Problema 49 si $dr/dq = 250 + 90q - 3q^2$ y la producción aumenta de 10 a 20 unidades.

51. Una socióloga está estudiando la tasa de criminalidad en cierta ciudad. Estima que t meses después del comienzo del año próximo, el número total de delitos cometidos aumentará a la tasa de $8t + 10$ crímenes por mes. Determine el número total de crímenes que puede esperarse se cometan el año entrante. ¿Cuántos delitos se puede esperar que se cometan durante los últimos seis meses de ese año?

52. Supóngase que la tasa a la que se da de alta a un grupo de personas hospitalizadas esta dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4},$$

en donde $f(t)$ es la proporción de miembros del grupo que es dada de alta, por día, al final de t días. ¿A qué proporción se ha dado de alta al final de 700 días?

53. Imagine un país "unidimensional" de longitud $2R$ (véase la Figura 15.19). Supóngase que la producción de bienes para este país se distribuye en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad que se fabrica cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción anual del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Evalúe G si $f(x) = i$, en donde i es constante.

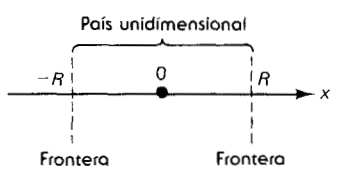


FIGURA 15.19

54. Para el país "unidimensional" del Problema 53, en ciertas condiciones, la cantidad E de sus exportaciones está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}]\,dx,$$

en donde i y k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E.

55. En un análisis del precio de un artículo entregado de la fábrica al cliente, DeCanio[≠] afirma que el precio promedio A del artículo que los consumidores pagan está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + x)[1 - (m + x)]\,dx}{\int_0^R [1 - (m + x)]\,dx},$$

en donde m es el precio en la fábrica, x es la distancia y R es la distancia máxima hasta el punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}.$$

Verifique esto.

15.8 Área

En la Sección 15.6 se vio que es posible determinar el área de una región evaluando el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, en donde $f(x)\,\Delta x$ representa el área de un rectángulo. De la Sección 15.7 se sabe que este límite es un caso especial de una integral definida, de modo que se le puede hallar con facilidad utilizando el Teorema Fundamental.

Cuando se utiliza la integral definida para determinar áreas debe hacerse un esbozo de la región implicada. Considérese ahora el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x de $x = a$ a $x = b$, como se muestra en la Figura 15.20. Para establecer la

* R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

≠ S.J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Reevaluation," *The Quarterly Journal of Economics*, XCIX, num. 2 (1984), 329-49.

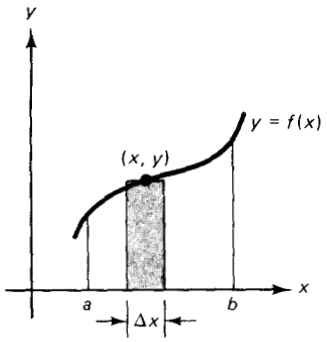


FIGURA 15.20

integral debe incluirse un rectángulo, a manera de ejemplo, en la gráfica, porque el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a comprender el proceso de integración sino que también ayuda a obtener áreas de regiones más complicadas. A un rectángulo como ese (véase la Figura 15.20) se le denomina **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama la anchura del elemento vertical es Δx. Su longitud es el valor de y para la curva. Por ello, el rectángulo tiene una área $y\,\Delta y$ o bien $f(x)\,\Delta x$. El área de la región total se determina sumando las áreas de todos esos elementos entre $x = a$ y $x = b$ y calculando el límite de esta suma, que es la integral definida. Simbólicamente, se tiene

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx = \text{área}.$$

Se ilustra esto en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Calcular el área de la región limitada por la curva

$$y = 6 - x - x^2$$

y el eje x.

En primer lugar debe trazarse la curva para que sea posible visualizar la región. Como $y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3)$, las intersecciones con el eje x son (2, 0) y (−3, 0). Utilizando las técnicas de graficación que se analizaron antes, se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 15.21. Con esta región resulta de gran importancia haber

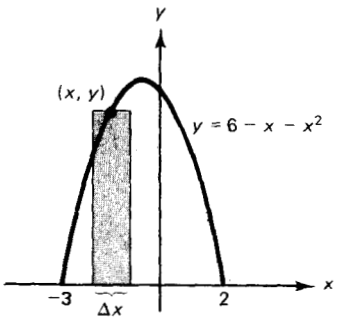


FIGURA 15.21

encontrado las intersecciones de la curva con el eje x porque determinan el intervalo sobre el cual deben sumarse las áreas de los elementos. Es decir, esos valores de x son los límites de la integración. El elemento vertical que se muestra tiene anchura Δx y altura y. Así, el área del elemento es $y\Delta x$. Sumando las áreas de estos elementos de $x = -3$ a $x = 2$, y hallando el límite por medio de la integral definida, resulta el área

$$\sum y\,\Delta x \to \int_{-3}^{2} y\,dx = \text{área}.$$

Para evaluar la integral debe expresarse el integrando en términos de la variable de integración, x. En virtud de que $y = 6 - x - x^2$,

$$\text{área} = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO 2

Evaluar el área de la región limitada por $y = x^2 + 2x + 2$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

En la Figura 15.22 se muestra una gráfica de la región.

$$\text{área} = \int_{-2}^{1} y\,dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right)$$

$$= 6 \text{ unidades cuadradas.}$$

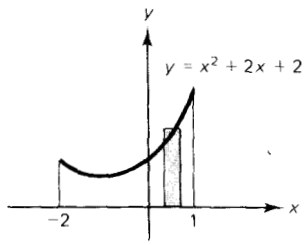


FIGURA 15.22

EJEMPLO 3

Calcular el área que está entre $y = e^x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 2$.

En la Figura 15.23 se presenta un diagrama de la región.

$$\text{área} = \int_{1}^{2} y\,dx = \int_{1}^{2} e^x\,dx = e^x\Big|_{1}^{2} = e^2 - e = e(e - 1) \text{ unidades cuadradas.}$$

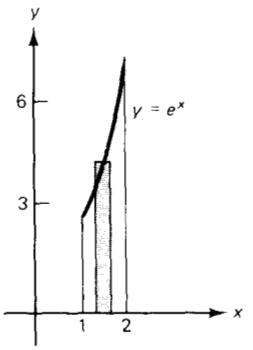


FIGURA 15.23

EJEMPLO 4

Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - x - 2$ *y* $y = 0$ *(el eje x) de* $x = -2$ *a* $x = 2$.

En la Figura 15.24 se presenta una gráfica de esa región. Nótese que las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

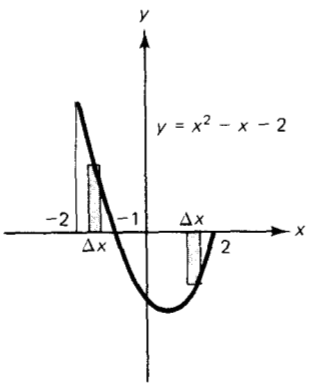


FIGURA 15.24

ADVERTENCIA

No es correcto apresurarse a escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$ por la siguiente razón. Para el rectángulo del lado izquiedo la altura es y. Sin embargo, para el rectángulo de la derecha y es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Se debe recordar que una área nunca es negativa. Esto señala la importancia de trazar un diagrama de la región.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área del elemento es

$$y\,\Delta x = (x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

En $[-1, 2]$ es

$$-y\,\Delta x = -(x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

En consecuencia,

$$\text{área} = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right] - \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right] = \frac{19}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso del área como probabilidad en Estadística.

EJEMPLO 5

En Estadística, una ***función densidad de probabilidad*** *f de una variable x, en donde x toma todos los valores del intervalo* $[a, b]$*, tiene las siguientes propiedades:*

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.
3. La probabilidad que x tome un valor entre c y d, que se escribe $P(c \leq x \leq d)$, en donde $a \leq c \leq d \leq b$, se representa mediante el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x, entre $x = c$ y $x = d$. Por lo tanto (véase la Figura 15.25)

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

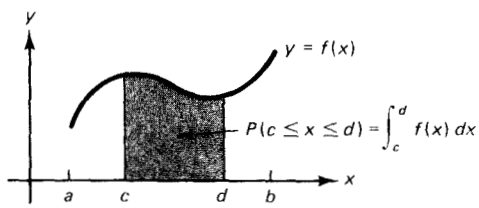


FIGURA 15.25

Para la función densidad $f(x) = 6(x - x^2)$*, en donde* $0 \leq x \leq 1$*, hallar*

$$(a)\ P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) \quad y \quad (b)\ P(x \geq \tfrac{1}{2}).$$

a. Aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, c es 0 y d es $\frac{1}{4}$. Por la Propiedad 3, se tiene

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\Bigg|_0^{1/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right] - 0 = \frac{5}{32}.$$

b. Ya que el dominio de f es $0 \le x \le 1$, decir que $x \ge \frac{1}{2}$ significa que $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Por consiguiente,

$$P(x \ge \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1}(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS 15.8

En los Problemas **1-34,** *utilice una integral definida para calcular el área de la región limitada por la curva dada, el eje x y las rectas dadas. En cada caso esquematice primero la región. Téngase cuidado con las áreas que están por abajo del eje x.*

1. $y = 4x,\ x = 2.$

2. $y = 3x + 1,\ x = 0,\ x = 4.$

3. $y = 3x + 2,\ x = 2,\ x = 3.$

4. $y = x + 5,\ x = 2,\ x = 4.$

5. $y = x - 1,\ x = 5.$

6. $y = 2x^2,\ x = 1,\ x = 2.$

7. $y = x^2,\ x = 2,\ x = 3.$

8. $y = 2x^2 - x,\ x = -2,\ x = -1.$

9. $y = x^2 + 2,\ x = -1,\ x = 2.$

10. $y = 2x + x^3,\ x = 1.$

11. $y = x^2 - 2x,\ x = -3,\ x = -1.$

12. $y = 3x^2 - 4x,\ x = -2,\ x = -1.$

13. $y = 9 - x^2.$

14. $y = \frac{4}{x},\ x = 1,\ x = 2.$

15. $y = 1 - x - x^3,\ x = -2,\ x = 0.$

16. $y = e^x,\ x = 1,\ x = 3.$

17. $y = 3 + 2x - x^2.$

18. $y = \frac{1}{x^2},\ x = 2,\ x = 3.$

19. $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = e.$

20. $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = e^2.$

21. $y = \sqrt{x + 9},\ x = -9,\ x = 0.$

22. $y = x^2 - 2x,\ x = 1,\ x = 3.$

23. $y = \sqrt{2x - 1},\ x = 1,\ x = 5.$

24. $y = x^3 + 3x^2,\ x = -2,\ x = 2.$

25. $y = \sqrt[3]{x},\ x = 2.$

26. $y = x^2 - 4,\ x = -2,\ x = 2.$

27. $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2.$

28. $y = |x|,\ x = -2,\ x = 2.$

29. $y = x + \frac{2}{x},\ x = 1,\ x = 2.$

30. $y = 6 - x - x^2.$

31. $y = x^3,\ x = -2,\ x = 4.$

32. $y = \sqrt{x - 2},\ x = 2,\ x = 6.$

33. $y = 2x - x^2,\ x = 1,\ x = 3.$

34. $y = x^2 - x + 1,\ x = 0,\ x = 1.$

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ 16 - 2x, & \text{si } x \ge 2, \end{cases}$$

evalúe el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la recta $x = 3$. Incluya una gráfica de la región.

36. En condiciones de distribución uniforme continua, un tema de Estadística, la proporción de personas que tienen ingresos entre a y t, en donde $a \le t \le b$, es el área de la región entre la curva $y = 1/(b-a)$ y el eje x, de $x = a$ a $x = t$. Trace la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

37. Supóngase que $f(x) = x/8$, en donde $0 \le x \le 4$. Si f es una función densidad (véase el Ejemplo 5), obtenga (a) $P(0 \le x \le 1)$, (b) $P(2 \le x \le 4)$ y (c) $P(x \ge 3)$.

38. Considérese que $f(x) = 3(1-x)^2$, en donde $0 \le x \le 1$. Si f es una función densidad (véase el Ejemplo 5), determine (a) $P(\frac{1}{2} \le x \le 1)$, (b) $P(\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2})$ y (c) $P(x \le \frac{1}{3})$. (d) Utilice el resultado de la parte (c) para determinar $P(x \ge \frac{1}{3})$.

39. Supóngase que $f(x) = 1/x$, en donde $e \le x \le e^2$. Si f es una función densidad (véase el Ejemplo 5), halle (a) $P(3 \le x \le 5)$, (b) $P(x \le 4)$ y (c) $P(x \ge 3)$. (d) Verifique que $P(e \le x \le e^2) = 1$.

15.9 Área entre curvas

Ahora se considerará la forma de calcular el área de una región circundada por varias curvas. Al igual que antes el procedimiento consiste en dibujar un elemento de muestra del área y emplear la integral definida para "sumar" las áreas de todos esos elementos. Por ejemplo, considérese el área de la región de la Figura 15.26 que está limitada por arriba y por abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y que está acotada por los lados por las rectas $x = a$ y $x = b$. La anchura del elemento que se señala es Δx, y su altura es el valor de y y para la curva superior, menos el valor de y para la curva inferior, lo cual se representa mediante $y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}}$. Por ello, el área del elemento es

$$[y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}}]\,\Delta x$$

o bien

$$[f(x) - g(x)]\,\Delta x.$$

sumando las áreas de todos los elementos como ése, de $x = a$ hasta $x = b$ mediante la integral definida, se obtiene el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)]\,\Delta x \to \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área}$$

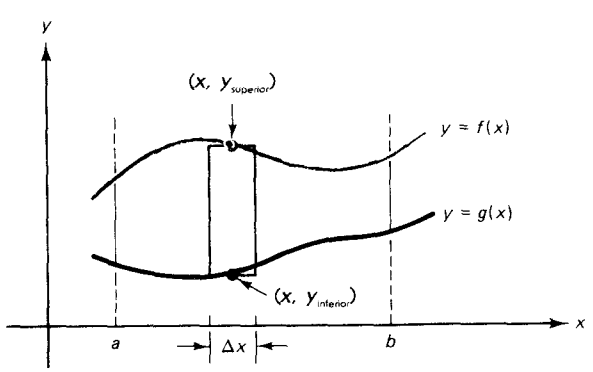


FIGURA 15.26

EJEMPLO 1

Obtener el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ *y* $y = x$.

En la Figura 15.26 aparece un croquis de esa región. Para determinar los puntos donde las curvas se intersecan, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Eliminando y por sustitución, se produce

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x, \\ x &= x^2 \qquad \text{(elevando ambos lados al cuadrado)}, \\ 0 &= x^2 - x = x(x - 1). \\ x &= 0 \quad \text{o bien} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces $y = 0$; si $x = 1$, entonces $y = 1$. Consecuentemente, las curvas se cortan en (0, 0) y (1, 1). La anchura del elemento del área que se señala es Δx. La longitud es el valor de y para la curva superior menos el valor de la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = \sqrt{x} - x.$$

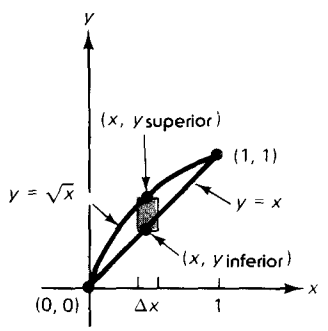


FIGURA 15.27

Por ello, el área del elemento es $(\sqrt{x} - x)\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos los elementos como ése, de $x = 0$, a $x = 1$ mediante la integral definida, se obtiene el área de la región total.

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \text{ unidad cuadrada.} \end{aligned}$$

Debe resultar evidente al lector que los puntos de intersección son importantes para determinar los límites de integración.

EJEMPLO 2

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ *y* $y = x^2 - 2x$.

En la Figura 15.28 aparece una gráfica de la región. Para determinar los puntos en donde se intersectan las curvas se resuelve el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

$$\begin{aligned} 4x - x^2 + 8 &= x^2 - 2x, \\ -2x^2 + 6x + 8 &= 0, \\ x^2 - 3x - 4 &= 0, \\ (x + 1)(x - 4) &= 0. \end{aligned}$$

$$x = -1 \quad \text{o bien} \quad x = 4.$$

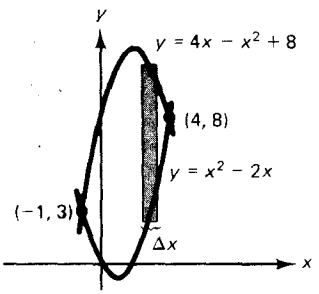


FIGURA 15.28

Cuando $x = -1$, $y = 3$; cuando $x = 4$, $y = 8$; así, las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. La anchura del elemento que se indica es Δx. Su longitud (o altura) es el valor de y sobre la curva superior menos el valor de y sobre la curva inferior:

$$y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)$$

En consecuencia, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,\Delta x = (-2x^2 + 6x + 8)\,\Delta x.$$

Sumando todas las áreas de $x = -1$ a $x = 4$ se tiene

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO 3

Evaluar el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = 9 - x^2$ *y* $y = x^2 + 1$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

La región se ilustra en la Figura 15.29. Las curvas se intersecan cuando

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= x^2 + 1, \\ 8 &= 2x^2, \\ 4 &= x^2, \\ \pm 2 &= x. \end{aligned}$$

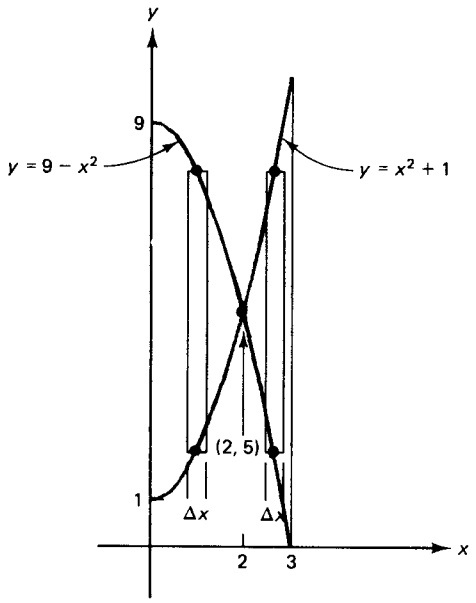


FIGURA 15.29

Cuando $x = \pm 2$, entonces $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son los de coordenadas $(\pm 2, 5)$. Como lo que interesa es región entre $x = 0$ y $x = 3$, el punto de intersección que interesa es (2, 5). Obsérvese en la Figura 15.29 que, para un elemento de la región a la *izquierda* del punto de intersección (2, 5).

$$y_{\text{sup.}} = 9 - x^2 \text{ y } y_{\text{inf.}} = x^2 + 1,$$

pero, para un elemento de la región que se encuentre a la *derecha* de (2, 5), la situación es la inversa; es decir,

$$y_{\text{sup.}} = x^2 + 1 \text{ y } y = 9 - x^2.$$

Por tanto, de $x = 0$ a $x = 2$, el área de un elemento es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}})\,\Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,\Delta x \\ &= (8 - 2x^2)\,\Delta x,\end{aligned}$$

pero, desde $x + 2$ hasta $x = 3$, es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}})\,\Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,\Delta x \\ &= (2x^2 - 8)\,\Delta x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para determinar el área de la totalidad de la región, es necesario definir *dos* integrales:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\,dx \\ &= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Bigg|_2^3\end{aligned}$$

$$= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right]$$

$$= \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

En ocasiones puede resultar más fácil determinar el área sumando áreas de elementos horizontales en vez de hacerlo con elementos verticales. En el ejemplo siguiente se encuentra el área mediante ambos métodos. En cada caso el elemento del área determina la forma de la integral.

EJEMPLO 4

Hallar el área de la región limitada por la curva $y^2 = 4x$ *y las rectas* $y = 3$ *y* $x = 0$ *(el eje y).*

La región se trazó en la Figura 15.30. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersectan, $9 = 4x$, de modo que, $x = \frac{9}{4}$. Por lo tanto, el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Dado que la anchura de la franja vertical es Δx, se integra con respecto a la variable x. Por consiguiente, $y_{\text{sup.}}$ y $y_{\text{inf.}}$, se deben expresar como funciones de x. Para la curva $y^2 = 4x$, se tiene $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero para la porción de esta curva que limita la región, $y \geq 0$, de forma que se utiliza $y = 2\sqrt{x}$. Así, la longitud de la franja es $y_{\text{sup.}} - y_{\text{inf.}} = 3 \times 2\sqrt{x}$. Consecuentemente, esa franja tiene una área de $(3 - 2\sqrt{x})\,\Delta x$, y se desea sumar todas esas áreas, de $x = 0$ a $x = 9/4$.

$$\text{área} = \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x})\,dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{9/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right] - (0)$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

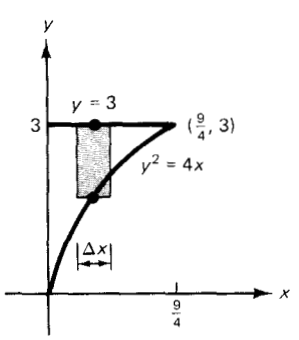


FIGURA 15.30

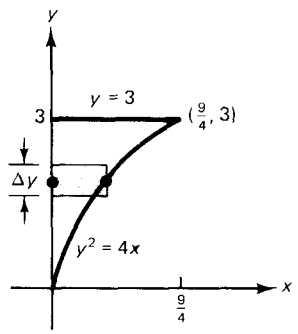


FIGURA 15.31

Enseguida se aborda este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**) como se muestra en la Figura 15.31. La anchura del elemento es Δy. La longitud del elemento es el *valor de x en la curva del lado derecho menos el valor de x en la curva del lado izquierdo*. Por ello, el área del elemento es $(x_{\text{der.}} - x_{\text{izq.}})\,\Delta y$. Se desea sumar todas esas áreas, de $y = 0$ a $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{der.}} - x_{\text{izq.}})\,\Delta y \to \int_0^3 (x_{\text{der.}} - x_{\text{izq.}})\,dy.$$

Ya que la variable de integración es y, se deben expresar $x_{\text{der.}}$ y $x_{\text{izq.}}$ como funciones de y. La curva de la derecha es $y^2 = 4x$ o, de manera equivalente, $x = y^2/4$. La curva de la izquierda es $x = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^3 (x_{\text{der.}} - x_{\text{izq.}})\,dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \frac{y^3}{12}\bigg|_0^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Obsérvese que para esta región las franjas horizontales hacen que la integral definida sea más fácil de evaluar (y de construir) que una integral con franjas verticales. En cualquier caso se debe recordar que **los límites de integración son los límites para la variable de integración.**

EJEMPLO 5

Calcular el área de la región limitada por $y^2 = x$ *y* $x - y = 2$.

En la Figura 15.32 aparece un diagrama de la región. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Por lo tanto, $y^2 - y - 2 = 0$, o bien, de manera equivalente $(y + 1)(y - 2) = 0$, de donde $y = -1$ o bien $y = 2$. Los puntos de intersección son $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Considerando elementos verticales de área [véase la Figura 15.32(a)]. Despejando y en $y^2 = x$, da $y = \pm\sqrt{x}$. Como se observa en la Figura 15.32(a), a la *izquierda* de $x = 1$ el extremo superior del elemento queda en $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior queda en $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$ la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior $x - y = 2$ (o bien $y = x - 2$). Por consiguiente, con franjas verticales se requieren *dos* integrales para evaluar el área.

$$\text{área} = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x - 2)\right] dx.$$

Considérense ahora franjas horizontales para ver si es posible simplificar el trabajo. En la Figura 15.32(b) la anchura de la franja es Δy. La curva de la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o bien $x = y + 2$) y la curva de la izquierda *siempre* es $y^2 = x$ (o bien $x = y^2$). Consecuentemente, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\,\Delta y$ y el área total es

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Resulta evidente que el uso de franjas horizontales es la forma más deseable de abordar el problema.

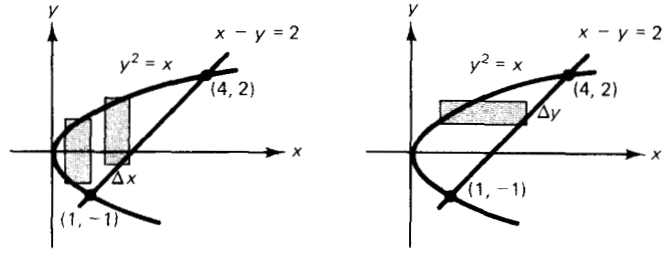


FIGURA 15.32

EJERCICIOS 15.9

En los Problemas **1-22**, *calcule el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Cerciórese de encontrar cualesquiera puntos de intersección necesarios. Considere si el uso de las franjas horizontales hace a la integral más sencilla que utilizando franjas verticales.*

1. $y = x^2, y = 2x.$

2. $y = x, y = -x + 3, y = 0.$

3. $y = x^2, x = 0, y = 4\ (x \geq 0).$

4. $y = x^2, y = x.$

5. $y = x^2 + 3, y = 9.$

6. $y^2 = x, x = 2.$

7. $x = 8 + 2y, x = 0, y = -1, y = 3.$

8. $y = x - 4, y^2 = 2x.$

9. $y = 4 - x^2, y = -3x.$

10. $x = y^2 + 2, x = 6.$

11. $y^2 = x, y = x - 2.$

12. $y = x^2, y = x + 2.$

13. $2y = 4x - x^2, 2y = x - 4.$

14. $y = \sqrt{x}, y = x^2.$

15. $y^2 = x, 3x - 2y = 1.$

16. $y = 2 - x^2, y = x.$

17. $y = 8 - x^2, y = x^2, x = -1, x = 1.$

18. $y^2 = 4 - x, y = x + 2.$

19. $y = x^2, y = 2, y = 5.$

20. $y = x^3 - x$, eje x

21. $y = x^3, y = x.$

22. $y = x^3, y = \sqrt{x}.$

23. Obtenga el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = x - 1$ y $y = 5 - 2x$, y desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

24. Obtenga el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 4x + 4$ y $y = 10 - x^2$, y desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

25. La *curva de Lorentz* se utiliza en el estudio de la distribución del ingreso. Si x es el porcentaje acumulado de receptores de ingresos, ordenados de los más pobres a los más ricos, y y es el porcentaje acumulado de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$ que aparece en la Figura 15.33, en donde x y y se expresan en decimales. Por ejemplo, 10% de las personas reciben el 10% de los ingresos totales, 20% de las personas reciben el 20% de los ingresos, etc. Supóngase que la distribución real está dada por la curva de Lorentz que se define por $y = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$.

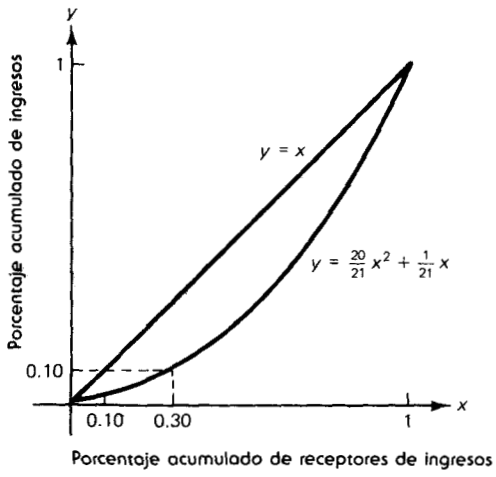


FIGURA 15.33

Adviértase, por ejemplo, que el 30% de las personas reciben sólo el 10% de los ingresos totales. El grado de desviación con respecto a la igualdad se mide mediante el *coeficiente de desigualdad** para una curva de Lorentz. Tal coeficiente está definido como el área que se encuentra entre la curva y la diagonal dividida entre el área que se encuentra bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}.$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Evalúe el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

26. Obtenga el coeficiente de desigualdad al igual que en el Problema 25 para la curva de Lorentz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

15.10 Excedentes de consumidores y fabricantes

La determinación de áreas de regiones tiene aplicaciones en Economía. En la Figura 15.34 se muestran las curvas de oferta y demanda para un producto. Indica el precio p por unidad al cual el fabricante vende (u ofrece) q unidades. También se muestra en la Figura 15.34 la curva de demanda para el producto. Indica el precio p por unidad al cual los consumidores adquieren (o demandan) q unidades. El punto (q_0, p_0) en donde estas curvas se intersecan se denomina *punto de equilibrio*. Aquí, p_0 es el precio por unidad al cual los consumidores adquirirán la misma cantidad q_0 de un producto que los fabricantes desean vender a ese precio. En términos breves, p_0 es el precio al cual ocurre la estabilidad en la relación entre fabricante y consumidor.

Suponiendo que el mercado se encuentra en equilibrio y que el precio por unidad del producto es p_0, de acuerdo con la curva de demanda, existen consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que p_0. Por ejemplo, al precio de p_1 por unidad los consumidores comprarían q_1 unidades. Estos consumidores se estarían beneficiando del menor precio de equilibrio p_0.

* G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed., (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), pp. 293-94.

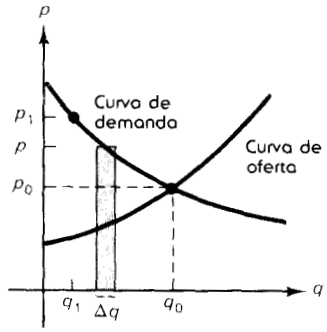


FIGURA 15.34

La franja vertical de la Figura 15.34 tiene una área de $p\ \Delta q$. Esta expresión puede pensarse también como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando Δq unidades del producto si el precio por unidad fuera p. Debido a que el precio es en realidad p_0, dichos consumidores gastan sólo $p_0\ \Delta q$ en estas Δq unidades y, por ello, se benefician en la cantidad $p\ \Delta q - p_0\ \Delta q$. Esto puede escribirse como $(p - p_0)\ \Delta q$, que es el área de un rectángulo con anchura Δq y longitud $p - p_0$ (véase la Figura 15.35). Sumando las áreas de todos esos rectángulos de $q = 0$ a $q = q_0$ mediante integración definida, se tiene $\int_0^{q_0} (p - p_0)\, dq$. Esta integral, en ciertas condiciones, representa la ganancia total para los consumidores que están dispuestos a pagar un precio superior al de equilibrio. A esta ganancia total se le denomina **excedente de los consumidores** que se abrevia como EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq.$$

En términos geométricos (véase la Figura 15.36), el excedente de los consumidores está representado por el área que se encuentra entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$, de $q = 0$ a $q = q_0$.

Algunos de los fabricantes también obtienen beneficios por el precio de equilibrio, ya que están dispuestos a ofrecer el producto a precios *inferiores* a p_0. En ciertas

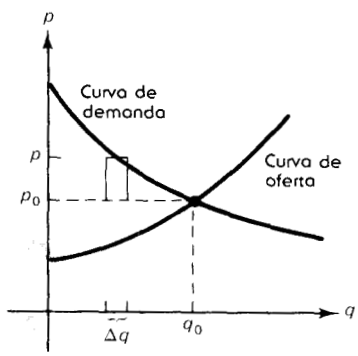


FIGURA 15.35

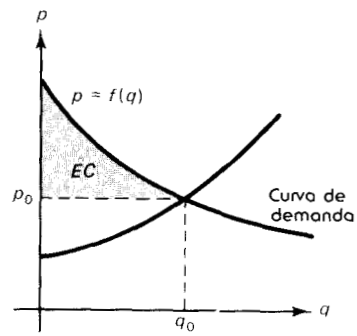


FIGURA 15.36

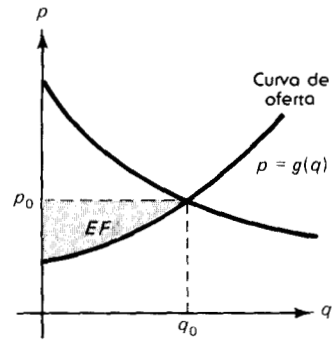


FIGURA 15.37

condiciones la ganancia total para los fabricantes está representada en términos geométricos en la Figura 15.37 por el área que está entre la recta $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$ de $q = 0$ a $q = q_0$. Esta ganancia, a la que se denomina **excedente de los fabricantes** y que se abrevia como *EF*, está dada por

$$EF = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq.$$

EJEMPLO 1

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q,$$

en donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y el excedente de los fabricantes cuando el mercado está en equilibrio.

En primer lugar, se debe hallar el punto de equilibrio resolviendo el sistema formado por $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$.

$$10 + 0.1q = 100 - 0.05q,$$
$$0.15q = 90,$$
$$q = 600.$$

Cuando $q = 600$, entonces $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\, dq$$
$$= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18{,}000 - 9000 = 9000.$$

El excedente de los fabricantes es

$$EF = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq$$

$$= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 36{,}000 - 18{,}000 = 18{,}000.$$

En consecuencia, el excedente de los consumidores es \$9000 y el de los fabricantes \$18000.

EJEMPLO 2

La ecuación de demanda para un producto es $q = f(p) = (90/p) - 2$ *y la ecuación de oferta es* $q = g(p) = p - 1$. *Calcular el excedente de los consumidores y el excedente de los fabricantes cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

Determinando el punto de equilibrio, se tiene

$$p - 1 = \frac{90}{p} - 2,$$

$$p^2 + p - 90 = 0,$$

$$(p + 10)(p - 9) = 0.$$

Por lo tanto, $p_0 = 9$ y $q_0 = 9 - 1 = 8$ (véase la Figura 15.38). Se debe observar que la ecuación de demanda expresa a q como función de p. Puesto que el excedente de los consumidores puede considerarse como una área, es posible evaluar esta área a través de franjas horizontales de anchura Δp y longitud $q = f(p)$. Se suman estas franjas de $p = 9$ a $p = 45$.

$$EC = \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2\right) dp = (90 \ln |p| - 2p)\Big|_9^{45}$$

$$= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85.$$

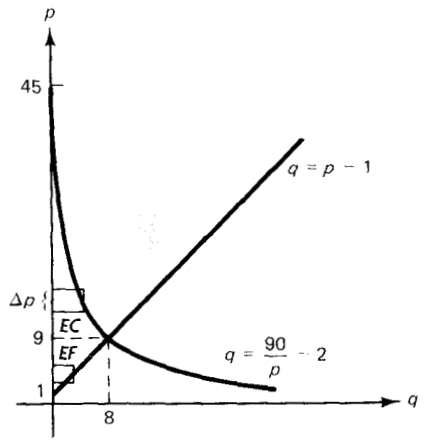


FIGURA 15.37

Utilizando franjas horizontales para el excedente de los fabricantes, se obtiene

$$EF = \int_1^9 (p - 1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2}\Big|_1^9 = 32.$$

EJERCICIOS 15.10

En los Problemas **1-6**, *la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta para un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y el excedente de los fabricantes en condiciones de equilibrio del mercado.*

1. $p = 20 - 0.8q$, $p = 4 + 1.2q$.

2. $p = 900 - q^2$, $p = 100 + q^2$.

3. $p = \dfrac{50}{q+5}$, $p = \dfrac{q}{10} + 4.5$.

4. $p = 400 - q^2$, $p = 20q + 100$.

5. $q = 100(10 - p)$, $q = 80(p - 1)$.

6. $q = \sqrt{100 - p}$, $q = \dfrac{p}{2} - 10$.

15.11 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 15.1 antiderivada integral indefinida $\int f(x)\, dx$ símbolo de integral integrando variable de integración constante de integración

Sección 15.2 condición inicial

Sección 15.3 regla de la potencia para la integración

Sección 15.5 $\sum$ índice de sumatoria límites de la sumatoria

Sección 15.6 integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ límite inferior de integración límite superior de la integración

Sección 15.7 Teorema Fundamental del Cálculo Integral $F(x)\Big|_a^b$

Sección 15.8 elemento vertical de área

Sección 15.9 elemento horizontal de área

Sección 15.10 excedente de los consumidores excedente de los fabricantes

RESUMEN

La antiderivada de una función f es otra función F tal que $F'(x) = f(x)$. Cualquesquiera dos antiderivadas de f difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada de f más general se denomina integral indefinida de f y se la denota por $\int f(x)\, dx$. Por consiguiente,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

en donde C se denomina constante de integración.

Algunas fórmulas básicas de integración son:

$$\int k\,dx = kx + C, \quad k \text{ es una constante}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante}$$

y

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para la integración:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$$

Aquí, u representa una función diferenciable de x y du es su diferencial. Cuando se aplica la regla de la potencia a una integral determinada es importante asegurarse de que la integral está escrita en forma tal que se ajuste con precisión a la regla de la potencia. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u\,du = e^u + C,$$

y

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0.$$

Además, si se sabe que f satisface una condición inicial, es posible, entonces, evaluar la antiderivada específica. Si se conoce la tasa de variación de una función f, es decir, se conoce f', entonces f es una antiderivada de f'. Por ejemplo, si se proporciona la función de costos marginales dc/dq, entonces se puede hallar la forma más general de c mediante integración. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también se proporcionan algunos costos fijos determinados (es decir, los costos implicados cuando $q = 0$), entonces se puede determinar el valor de la constante de integración y, consecuentemente, es posible calcular la función específica de costos c. Análogamente, si se proporciona una función de ingresos marginales dr/dq, entonces puede determinarse la función específica de ingresos r a través de integración y utilizando el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$. Una vez que se conoce r, es posible encontrar la correspondiente ecuación de demanda empleando la ecuación $p = r/q$.

La notación de sumatoria es conveniente para representar sumas. Esta notación es útil en especial para determinadas áreas. Para hallar el área de la región limitada por $d = f(x)$ [en donde $f(x) > 0$ y f es continua] y el eje x, de $x = a$ a $x = b$ se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δx. Si x_i es el extremo del lado derecho de un subintervalo arbitrario, entonces el producto $f(x_i)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo. Denotando la suma de todas esas áreas de rectángulos para los n subintervalos mediante S_n, entonces el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es el área de la región total.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \text{área}.$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite así definido arriba se expresa como la integral definida de f sobre $[a, b]$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En vez de evaluar integrales definidas utilizando límites puede emplearse el Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

en donde F es cualquier antiderivada de f.

Algunas propiedades de la integral definida son:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante,}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si se conoce la tasa de variación de una función f, entonces resulta fácil obtener los cambios en los valores de función de f mediante la fórmula

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Si $f(x) \geq 0$ y continua en $[a, b]$, entonces se puede usar la integral definida para calcular el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x de $x = a$ a $x = b$. Puede emplearse también la integral definida para encontrar áreas de regiones más complicadas. En estas situaciones debe dibujarse en la región un elemento de área. Esto permite estructurar la integral definida apropiada. En algunas situaciones deben considerarse elementos verticales, en tanto que en otras, resultan más ventajosos los elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas se refiere al excedente de los consumidores y el excedente de los fabricantes. Supóngase que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio. (El punto de intersección de las curvas de oferta y de demanda para el producto). El excedente de los consumidores, EC corresponde al área de $q = 0$ a $q = q_0$ limitada arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Por ello,

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq,$$

en donde f es la función de demanda. El excedente de los fabricantes, EF, corresponde al área de $q = 0$ a $q = q_0$, limitada arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Así,

$$EF = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq,$$

en donde g es la función de oferta.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-32**, *determinar las integrales.*

1. $\int (x^3 + 2x - 7)\,dx.$

2. $\int dx.$

3. $\int_0^9 (\sqrt{x} + x)\,dx.$

4. $\int \frac{2}{5 - 3x}\,dx.$

5. $\int \frac{2}{(x + 5)^3}\,dx.$

6. $\int_4^{12} (y - 8)^{501}\,dy.$

7. $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\,dx.$

8. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx.$

9. $\int_0^1 \sqrt[3]{3t + 8}\,dt.$

10. $\int \frac{5 - 3x}{2}\,dx.$

11. $\int y(y + 1)^2\,dy.$

12. $\int_0^1 10^{-8}\,dx.$

13. $\int \frac{\sqrt[4]{z} - \sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}}\,dz.$

14. $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\,dx.$

15. $\int_1^2 \frac{t^2}{2 + t^3}\,dt.$

16. $\int \frac{4x^2 - x}{x}\,dx.$

17. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\,dx.$

18. $\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2)^{3/4}\,dx.$

19. $\int (e^{2y} - e^{-2y})\,dy.$

20. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\,dx.$

21. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\,dx.$

22. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx.$

23. $\int_{-2}^1 (y^4 - y + 1)\,dy.$

24. $\int_7^{70} dx.$

25. $\int_{\sqrt{3}}^2 7x\sqrt{4 - x^2}\,dx.$

26. $\int_0^1 (2x + 1)(x^2 + x)^4\,dx.$

27. $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x + 1)^{2/3}}\right]\,dx.$

28. $\int_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4)\,dx.$

29. $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\,dt.$

30. $\int \frac{z^2}{z - 1}\,dz.$

31. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2}\,dx.$

32. $\int \frac{(x^2 + 4)^2}{x^2}\,dx.$

En los Problemas **33** *y* **34**, *encontrar y, sujeta a las condiciones dadas.*

33. $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$

34. $y' = \frac{x + 3}{x}, \quad y(1) = 5.$

En los Problemas **35-42**, *calcular el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas que se especifican.*

35. $y = x^2 - 1, \quad x = 2 \quad (y \geq 0).$

36. $y = 4e^{2x}, \quad x = 0, \quad x = 3.$

37. $y = \sqrt{x + 4}, \quad x = 0.$

38. $y = x^2 - x - 2, \quad x = -2, \quad x = 2.$

39. $y = 5x - x^2.$

40. $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 1, \quad x = 16.$

41. $y = \frac{1}{x} + 3, \quad x = 1, \quad x = 3.$

42. $y = x^3 - 1, \quad x = -1.$

En los Problemas **43-50** *hallar el área de la región limitada por las líneas dadas.*

43. $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2.$

44. $y = 2x^2, \quad x = 0, \quad y = 2 \quad (x \geq 0).$

45. $y = x^2 + 4x - 5, \quad y = 0.$

46. $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9.$

47. $y = x^2 - 2x, \quad y = 12 - x^2.$

48. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3.$

49. $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1.$

50. $y = 1 - x, \quad y = x - 2, \quad y = 0, \quad y = 1$

51. Si los ingresos marginales están dados por $pr/pq = 100 - (3/2)\sqrt{2q}$, obtenga la ecuación de demanda correspondiente.

52. Si el costo marginal está dado por $dc/dq = q^2 + 7q + 6$, y los costos fijos son 2500, evalúe el costo total de fabricar 6 unidades. Supóngase que los costos están dados en dólares.

53. La función de ingresos marginales de un fabricante es $dr/dq = 275 - q - 0.3\,q^2$. Si r está en dólares, halle el aumento en los ingresos totales del fabricante si la producción se aumenta de 10 a 20 unidades.

54. La función de costos marginales de un fabricante es $dc/dq = 500/\sqrt{2q + 25}$. Si c está en dólares determine el costo en el que se incurre al aumentar la producción de 100 a 300 unidades.

55. Para un producto la ecuación de demanda es $p = 0.01q^2 - 1.1q + 30$ y su ecuación de oferta es $p = 0.01q^2 + 8$. Halle el excedente de los consumidores y el excedente de los fabricantes cuando se ha establecido el equilibrio en el mercado.

56. Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos 5 años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\,dt.$$

Evalúe los gastos.

57. Obtenga el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$, y desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

58. Evalúe el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = x^2$ y $x = 4 - 3x$, y desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

59. Para un grupo de individuos hospitalizados supóngase que la tasa de los que se dan de alta está dada por $f(t) = 0.008e^{-0.008t}$, en donde $f(t)$ es la proporción de los que se dan de alta por día al final de t días de hospitalización. ¿A qué proporción del grupo se da de alta al final de 100 días?

60. En un análisis de mutación de genes,* aparece la siguiente ecuación:

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \hat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt,$$

en donde u y v son tasas de mutación de genes, las q son frecuencias de genes y n es el número de generaciones. Supóngase que todas las letras representan constantes excepto q y t. Integrar ambos lados y después utilizar el resultado para probar que

$$n = \frac{1}{u + v} \ln \left| \frac{q_0 - \hat{q}}{q_n - \hat{q}} \right|.$$

61. Al estudiar el flujo de un fluido en un tubo de radio constante R, como el flujo de sangre en algunas porciones del cuerpo, se puede pensar que el tubo está formado por tubos concéntricos de radio r, en donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es función de r y está dada por†

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l},$$

en donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (la letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. El flujo en volumen, Q, a través del tubo, está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi r v\,dr.$$

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Obsérvese que R aparece como factor a la cuarta potencia. En consecuencia, duplicar el radio del tubo tiene el efecto de aumentar el flujo en un factor de 16. La fórmula que se derivó para el flujo en volumen se denomina ley de Poiseuille, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

62. En un análisis de inventarios Barbosa y Friedman‡ se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\,du,$$

en donde k y r son constantes, $k > 0$, $r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}.$$

(*Sugerencia*: Considérense dos casos: cuando $r \neq -1$, y cuando $r = -1$.)

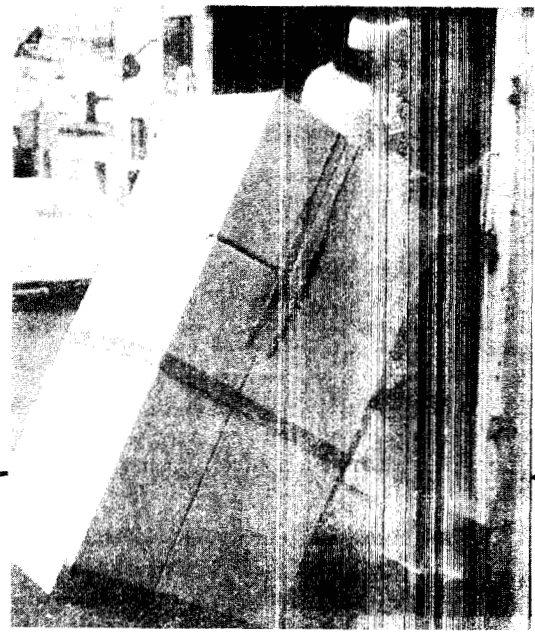
---

* W.B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis, Minn.: Burgess Publishing Company, 1964).

† R.W. Stacy y cols., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

‡ L.C. Barbosa y M. Friedman. "Deterministic Inventory Lot Size Models—A General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-26.

APLICACIÓN PRÁCTICA



Precio de un artículo entregado

Suponga que es el fabricante de un producto cuyas ventas se realizan a no más de R kilómetros de distancia de su fábrica. Suponga también que se cobra a los clientes el flete según la tasa de s, en dólares por kilómetro, por cada unidad de producto vendida. Si m es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario para el cliente en la entrega, p a x kilómetros de distancia de la fábrica, es el precio en ésta, más el cargo por envío, sx:

$$p = m + sx, \qquad 0 \leq x \leq R. \tag{1}$$

El problema consiste en determinar el precio medio de los artículos vendidos y entregados. Puede pensarse que la respuesta es el promedio de la función p en el intervalo de $x = 0$ hasta $x = R$. Pero no es éste necesariamente el caso porque el valor medio de p no toma en consideración el número de unidades vendidas.

Considere que existe una función f tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y tal que el área bajo la gráfica de f y por encima del eje x, de $t = 0$ a $t = x$, representa el número total de unidades Q que se venden a los clientes a x kilómetros de distancia de la fábrica. Véase Figura 15.39(a). Puede hacerse referencia a f como la distribución de la demanda. Como Q es función de x y está representada por el área.

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área de mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\, dt$$

[Figura 15.39(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área de mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\, dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000.$$

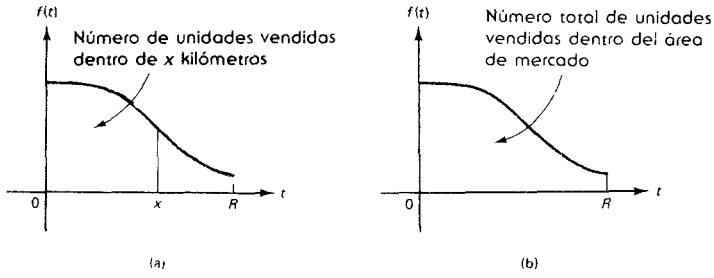


FIGURA 15.39

El precio promedio entregado A está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}$$

Como el denominador es $Q(R)$, es posible determinar A una vez que se ha evaluado el ingreso total.

Para calcular los ingresos totales, en primer lugar se considera el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [véase la Figura 15.40(a)], entonces el área bajo la gráfica de f y por encima del eje x de $t = 0$ a $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas a no más de t_1 kilómetros de la fábrica. De manera similar el área bajo la gráfica de f y por encima del eje x de $t = 0$ a $t = t_2$, representa el número de unidades vendidas a no más de t_2 kilómetros de distancia de la fábrica. Por ello, en términos geométricos, la diferencia entre estas dos áreas es el área sombreada en la Figura 15.40(a), y representa el número de unidades vendidas a entre t_1 y t_2 kilómetros de la fábrica, o sea $Q(t_2) - Q(t_1)$. Por ello

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes ubicados a entre 4 y 6 kilómetros de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\, dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20.$$

Es posible aproximar el área de la región sombreada de la Figura 15.40(a) mediante el área de un rectángulo [Figura 15.40(b)] cuya altura es $f(t)$ y cuya anchura es Δt, en donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Por ello, el número unidades de vendidas en el intervalo de longitud Δt es aproximadamente $f(t)\,\Delta t$.

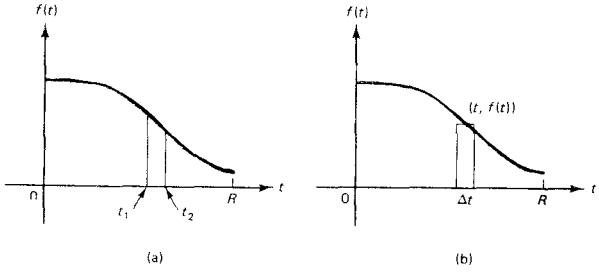


FIGURA 15.40

Como el precio de estas unidades es [por la Ec. (1)] aproximadamente $m + st$, el ingreso que se percibe es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\,\Delta t.$$

La suma de todos los productos como éste, de $t = 0$ a $t = R$, es una aproximación de los ingresos totales. La integración definida da

$$\sum (m + st)f(t)\,\Delta t \to \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

Por lo que

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

En consecuencia, el precio promedio de entrega A está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{Q(R)}$$

o de manera equivalente,

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{\int_0^R f(t)\,dt}.$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, $m = 200$, $s = 0.25$, y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\,dt = \int_0^{100} (200 + 0.25t)\cdot 10\,dt &= 10\int_0^{100} (200 + 0.25t)\,dt \\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Bigg|_0^{100} \\ &= 10\left[\left(20{,}000 + \frac{10{,}000}{8}\right) - 0\right] \\ &= 212{,}500.\end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\int_0^R f(t)\,dt = \int_0^{100} 10\,dt = 1000.$$

Así, el precio promedio entregado es 212,500/1000 = \$212.50.

EJERCICIOS

1. Si $f(t) = 50 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes ubicados a no más de cinco kilómetros de la fábrica. Entre 10 y 15 kilómetros.
2. Si $f(t) = 20$, $m = 50$, $s = 0.20$, y $R = 80$, determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el precio promedio por artículo entregado.
3. Si $f(t) = 60 - 2t$, $m = 100$, $s = 1$, y $R = 30$, determine (a) el ingreso total, (b) el número, total de unidades vendidas y (c) el precio medio por artículo entregado.

CAPÍTULO 16

Métodos y aplicaciones de la integración

16.1 Integración por partes*

No es posible encontrar muchas integrales por medio de los métodos antes señalados. Sin embargo, existen maneras de cambiar ciertas integrales a formas que sean más fáciles de integrar. De estos métodos se analizan dos: *integración por partes* y (en la Sección 16.2) el de *integración por fracciones parciales*.

Si u y v son funciones diferenciables de x, por la regla del producto se tiene que

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Reordenando, se obtiene

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Integrando ambos lados con respecto a x,

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx. \tag{1}$$

Se debe encontrar para $\int (uv)'\,dx$ una función cuya derivada con respecto a x sea $(uv)'$. Es claro que una de tales funciones es uv. Por ello, $\int (uv)'\,dx = uv + C_1$ y la Ecuación (1) se convierte en

$$\int uv'\,dx = uv + C_1 - \int vu'\,dx.$$

Incorporando C_1 en la constante de integración para $\int vu'\,dx$ y reemplazando $v'\,dx$ por dv y $u'\,dx$ por du, se tiene la *fórmula de integración por partes*:

* Se puede omitir sin perder continuidad

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$, en términos de otra, $\int v\,du$, que puede resultar más fácil de evaluar.

Para aplicar la fórmula a $\int f(x)\,dx$, se debe escribir $f(x)\,dx$ como el producto de dos factores (o *partes*) eligiendo una función u y una diferencial dv tales que $f(x)\,dx = u\,dv$. Para que la fórmula resulte útil debe haber posibilidades de integrar la parte elegida para dv. Para ilustrar esto considérese

$$\int xe^x\,dx.$$

No puede determinarse esta integral por las fórmulas de integración vistas antes. Se puede escribir $xe^x\,dx$ en la forma $u\,dv$, tomando

$$u = x \qquad \text{y} \qquad dv = e^x\,dx.$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes, se debe evaluar du y v: y

$$du = dx \qquad \text{y} \qquad v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} &= uv - \int v\,du \\ &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\,dx \\ &= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C \\ &= xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.\end{aligned}$$

La primera constante C_1 no aparece en la respuesta final. Esta es una característica de la integración por partes y, a partir de este momento, no se escribe esta constante cuando se determina v a partir de dv.

Cuando se emplea la fórmula de integración por partes, en ocasiones puede no ser evidente la "mejor selección" para u y dv. En algunos casos una alternativa puede ser tan buena como otra y, en otros, es posible que sólo sea apropiada una de las alternativas. El conocimiento de cuál es la mejor alternativa (si es que existe alguna) se obtiene sólo con la práctica y, por supuesto, mediante tanteos.

EJEMPLO 1

Evaluar $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante integración por partes.

Se ensaya

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Entonces

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad v = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}.$$

De donde

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right)}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2})\left(\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2(2\sqrt{x}) + C$$

$$= 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C$$

EJEMPLO 2

Evaluar $\int_1^2 x \ln x\,dx$.

Sean $u = x$ y $dv = \ln x\,dx$. Entonces $du = dx$, pero $v = \int \ln x\,dx$ no es evidente mediante inspección. En consecuencia, se hace una selección diferente para u y dv. Sean

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x\,dx.$$

Entonces

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

De donde

$$\int_1^2 x \ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 0) - (1 - \tfrac{1}{4}) = 2\ln 2 - \tfrac{3}{4}.$$

EJEMPLO 3

Determinar $\int \ln y \, dy$.

Sean $u = \ln y$ y $dv = dy$. Entonces, $du = (1/y)dy$ y $v = y$.

$$\int \ln y \, dy = (\ln y)(y) - \int y\left(\frac{1}{y}\, dy\right)$$

$$= y \ln y - \int dy = y \ln y - y + C$$

$$= y(\ln y - 1) + C.$$

EJEMPLO 4

Hallar $\int xe^{x^2} \, dx$.

$$\int xe^{x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x \, dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u \, du \qquad (\text{en donde } u = x^2)$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

ADVERTENCIA

No deben olvidarse las formas básicas de integración. ¡No se requiere aquí la integración por partes!

En ocasiones puede utilizarse la integración por partes más de una vez, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Determinar $\int x^2 e^{2x+1} \, dx$.

Sean $u = x^2$ y $dv = e^{2x+1} \, dx$. Entonces $du = 2x \, dx$ y $v = e^{2x+1}/2$.

$$\int x^2 e^{2x+1} \, dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} (2x \, dx)$$

$$= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1} \, dx.$$

Para evaluar $\int xe^{2x+1} \, dx$ se utiliza de nueva cuenta la integración por partes. Aquí, sean $u = x$ y $dv = e^{2x+1} \, dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^{2x+1}/2$.

$$\int xe^{2x+1} \, dx = \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} \, dx$$

$$= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1.$$

Por lo tanto

$$\int x^2 e^{2x+1}\,dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C \qquad \text{(en donde } C = -C_1\text{)}$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

EJERCICIOS 16.1

En los Problemas **1-20**, *determinar las integrales.*

1. $\int xe^{-x}\,dx$.

2. $\int xe^{2x}\,dx$.

3. $\int y^3 \ln y\,dy$.

4. $\int x^2 \ln x\,dx$.

5. $\int \ln(4x)\,dx$.

6. $\int \frac{t}{e^t}dt$.

7. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

8. $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x}}\,dx$.

9. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$.

10. $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx$.

11. $\int_1^2 xe^{2x}\,dx$.

12. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

13. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

15. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$.

16. $\int (\ln x)^2\,dx$.

17. $\int x^2 e^x\,dx$.

18. $\int x^2 e^{-2x}\,dx$.

19. $\int (x - e^{-x})^2\,dx$.

20. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

21. Halle el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = \ln x$ y la recta $x = e^3$.

22. Determine el área de la región limitada por el eje x y la curva $y = xe^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 4$.

16.2 Integración por fracciones parciales*

Ahora se considerará la integral de una función racional (el cociente de dos polinomios). Sin perder generalidad, puede suponerse que el numerador $N(x)$ y el denominador $D(x)$ no tienen un factor polinomial común y que el grado de $N(x)$ es inferior al grado de $D(x)$ [es decir, $N(x)/D(x)$ define una *función racional propia*]. Si el numerador no fuera de menor grado, se podría utilizar la división no abreviada para dividir $N(x)$ entre $D(x)$:

$$D(x)\overline{)N(x)}\,\frac{P(x)}{\vdots}\,; \quad \text{por lo que} \quad \frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

$$\overline{R(x)}$$

$P(x)$ sería un polinomio (fácil de integrar) y $R(x)$, un polinomio de menor grado que $D(x)$. Por lo tanto, $R(x)/D(x)$ definiría una función racional propia. Por ejemplo,

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\right) dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx.$$

* Se puede omitir sin perder continuidad.

Por consiguiente, se considera

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx = \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)}\,dx.$$

Obsérvese que el denominador del integrando está formado sólo por **factores lineales distintos**, y que cada factor aparece solamente una vez. Se puede probar que a cada uno de esos factores $x - a$ le corresponde una *fracción parcial* de la forma

$$\frac{A}{x - a} \qquad (A \text{ es una constante})$$

tal que el integrando es la suma de las fracciones parciales. Si existen n de tales factores lineales *distintos*, habrá n fracciones parciales como ésas, cada una de las cuales se puede integrar con facilidad. Aplicando estos datos, puede escribirse

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}. \tag{1}$$

Para determinar las constantes A, B y C, en primer lugar se combinan los términos del lado derecho:

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1)}{x(x + 1)(x - 3)}.$$

Como los denominadores de ambos lados son iguales, pueden igualarse sus numeradores:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1). \tag{2}$$

Aunque la Ecuación (1) no está definida para $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$ se desea encontrar valores para A, B y C que hagan que la Ecuación (2) resulte cierta para todos los valores de x. Es decir, que sea una identidad. Haciendo en forma sucesiva en la Ecuación (2) a x igual a cualesquiera tres números diferentes, se puede obtener un sistema de ecuaciones que pueda resolverse para hallar A, B y C. En particular, puede simplificarse el trabajo igualando x a las raíces de $D(x) = 0$, en nuestro caso, $x = 0$, $x = -1$, y $x = 3$. Utilizando la Ecuación (2), si $x = 0$,

$$-6 = A(1)(-3) + B(0) + C(0) = -3A \qquad \text{y} \qquad A = 2.$$

Si $x = -1$,

$$12 = A(0) + B(-1)(-4) + C(0) = 4B \qquad \text{y} \qquad B = 3.$$

Si $x = 3$,

$$-12 = A(0) + B(0) + C(3)(4) = 12C \qquad \text{y} \qquad C = -1.$$

Consecuentemente, la Ecuación (1) se convierte en

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}.$$

De donde

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}\right) dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= 2 \ln |x| + 3 \ln |x+1| - \ln |x-3| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x^2(x+1)^3}{x-3} \right| + C \quad \text{(aplicando las propiedades de los logaritmos).}$$

Se establece ahora para la integral *original*

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx = x^2 + x + \ln \left| \frac{x^2(x+1)^3}{x-3} \right| + C.$$

Existe un método alternativo para determinar A, B y C. Implica desarrollar el segundo miembro de la Ecuación (2) y combinar términos semejantes:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x)$$

$$= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + Cx.$$

$$4x^2 - 14x - 6 = (A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (-3A).$$

Para esta identidad los coeficientes de potencias correspondientes de x en los lados derecho e izquierdo de la ecuación deben ser iguales a

$$\begin{cases} 4 = A + B + C, \\ -14 = -2A - 3B + C, \\ -6 = -3A. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$, al igual que antes.

EJEMPLO 1

Determinar $\displaystyle\int \frac{2x+1}{3x^2 - 27}\, dx.$

Ya que el grado de $N(x)$ es menor que el grado de $D(x)$ no se necesita la división no abreviada. La integral se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2 - 9}\, dx.$$

Expresando $(2x + 1)/(x^2 - 9)$ como una suma de fracciones parciales,

$$\frac{2x+1}{x^2 - 9} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}.$$

Combinando términos e igualando los numeradores,

$$2x + 1 = A(x - 3) + B(x + 3).$$

Si $x = 3$, entonces

$$7 = 6B \qquad \text{y} \qquad B = \frac{7}{6};$$

si $x = -3$, entonces

$$-5 = -6A \qquad \text{y} \qquad A = \frac{5}{6}.$$

De donde

$$\int \frac{2x + 1}{3x^2 - 27}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{\frac{5}{6}\,dx}{x + 3} + \int \frac{\frac{7}{6}\,dx}{x - 3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}\ln|x + 3| + \frac{7}{6}\ln|x - 3|\right] + C$$

$$= \frac{1}{18}\ln|(x + 3)^5(x - 3)^7| + C.$$

Si el denominador de $N(x)/D(x)$ contiene sólo factores lineales, algunos de los cuales se repiten, entonces para cada factor $(x - a)^k$, en donde k es el número máximo de veces que se presenta $x - a$ como factor, le corresponderá la siguiente suma de k fracciones parciales:

$$\frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{K}{(x - a)^k}.$$

EJEMPLO 2

Evaluar $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x + 2)(x + 1)^2}\,dx.$

En virtud de que el grado $N(x)$, o sea 2, es menor que el de $D(x)$, o sea 3, no es necesaria la división larga. $D(x)$ el factor lineal $x + 2$ ocurre una vez, y el factor lineal $x + 1$, dos veces. Será necesario hallar tres fracciones parciales y tres constantes.

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2},$$

$$6x^2 + 13x + 6 = A(x + 1)^2 + B(x + 2)(x + 1) + C(x + 2).$$

Se eligen $x = -2$, $x = -1$ y, por conveniencia, $x = 0$.

Para $x = -2$,

$$4 = A.$$

Si $x = -1$, entonces

$$-1 = C.$$

Si $x = 0$, entonces

$$6 = A + 2B + 2C = 4 + 2B - 2 = 2 + B,$$
$$4 = 2B,$$
$$2 = B.$$

Por ello,

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x + 2)(x + 1)^2}\,dx = 4\int \frac{dx}{x + 2} + 2\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2}$$

$$= 4 \ln |x + 2| + 2 \ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C$$

$$= \ln [(x + 2)^4 (x + 1)^2] + \frac{1}{x + 1} + C.$$

Supóngase que se presenta en $D(x)$ un factor cuadrático $x^2 + bx + c$ y que éste no puede expresarse como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales. A este factor se le denomina *irreductible sobre los números reales*. A cada factor cuadrático irreductible que ocurre exactamente una vez en $D(x)$ le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}.$$

EJEMPLO 3

Determinar $\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x}\, dx.$

Dado que $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, se tiene el factor lineal x y el factor cuadrático $x^2 + x + 1$ que por simple inspección no parece ser factorizable. Si lo fuera $(x - r_1)(x - r_2)$, en donde r_1 y r_2 son reales, entonces estos valores r_1 y r_2 serían raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Mediante la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}.$$

Como no existen raíces reales se concluye que $x^2 + x + 1$ es irreductible. Así, será necesario determinar dos fracciones parciales y *tres* constantes:

$$\frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

$$-2x - 4 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x$$

$$= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx.$$

$$0x^2 - 2x - 4 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de x,

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ -2 = A + C, \\ -4 = A. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene $A = -4$, $B = 4$ y $C = 2$. En consecuencia,

$$\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\, dx = \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

$$= -4 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

Ambas integrales tienen la forma $\int \frac{du}{u}$, por lo que,

$$\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\,dx = -4\ln|x| + 2\ln|x^2 + x + 1| + C$$

$$= \ln\left[\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^4}\right] + C.$$

Supóngase que $D(x)$ contiene factores de la forma $(x^2 + bx + c)^k$, en donde k es el número máximo de veces que ocurre el factor irreductible $x^2 + bx + c$. Entonces, a cada uno de esos factores le corresponderá una suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A + Bx}{x^2 + bx + c} + \frac{C + Dx}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M + Nx}{(x^2 + bx + c)^k}.$$

EJEMPLO 4

Determinar $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\,dx$.

Puesto que $N(x)$ es de grado 5 y $D(x)$ lo es de 4, en primer lugar se divide $N(x)$ entre $D(x)$.

$$\frac{x^5}{x^4 + 8x^2 + 16} = x - \frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2}.$$

El factor cuadrático $x^2 + 4$ del denominador de $(8x^3 + 16x)/(x^2 + 4)^2$ es irreductible y aparece dos veces como factor. Por lo tanto, a $(x^2 + 4)^2$ le corresponden dos fracciones parciales y *cuatro* coeficientes que es necesario determinar.

$$\frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2},$$

$$8x^3 + 16x = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D.$$

$$8x^3 + 0x^2 + 16x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + 4B + D.$$

Igualando potencias similares de x,

$$\begin{cases} 8 = A, \\ 0 = B, \\ 16 = 4A + C, \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$. Por consiguiente,

$$\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int\left(x - \left[\frac{8x}{x^2 + 4} - \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}\right]\right)dx$$

$$= \int x\,dx - 4\int \frac{2x}{x^2 + 4}\,dx + 8\int \frac{2x}{(x^2 + 4)^2}\,dx.$$

La segunda integral de la última línea tiene la forma $\int \frac{du}{u}$ y la tercera es de la forma $\int \frac{du}{u^2}$.

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{x^2+4} + C.$$

A partir de los ejemplos el lector puede haber deducido que el número de constantes que se necesitan para expresar $N(x)/D(x)$ mediante fracciones parciales es igual al grado de $D(x)$, si se supone que $N(x)/(D(x)$ define una función racional propia. Esto es exactamente lo que sucede. Debe añadirse que es única la representación de una función racional propia por fracciones parciales; es decir, sólo hay una forma de elegir las constantes. Además, sin importar la complejidad del polinomio $D(x)$, siempre se le puede expresar (en teoría) como un producto de factores cuadráticos lineales e irreductibles con coeficientes reales.

EJEMPLO 5

Encontrar $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$.

Esta integral es de la forma $\int \frac{1}{u}\,du$. Consecuentemente,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1| + C.$$

ADVERTENCIA
No se deben olvidar las formas básicas de integración.

EJERCICIOS 16.2

En los Problemas **1-22**, *determine las integrales.*

1. $\int \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$.

2. $\int \frac{3x+8}{x^2+2x}\,dx$.

3. $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

5. $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4}\,dx$.

6. $\int \frac{4-x^2}{(x-4)(x-2)(x+3)}\,dx$.

7. $\int \frac{17x-12}{x^3-x^2-12x}\,dx$.

8. $\int \frac{4-x}{x^4-x^2}\,dx$.

9. $\int \frac{3x^5+4x^3-x}{x^6+2x^4-x^2-2}\,dx$.

10. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}\,dx$.

11. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)}\,dx$.

12. $\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)}\,dx$.

13. $\int \frac{x^2+8}{x^3+4x}\,dx$.

14. $\int \frac{2x^3-6x^2-10x-6}{x^4-1}\,dx$.

15. $\int \frac{-x^3 + 8x^2 - 9x + 2}{(x^2 + 1)(x - 3)^2}\,dx.$

16. $\int \frac{2x^4 + 9x^2 + 8}{x(x^2 + 2)^2}\,dx.$

17. $\int \frac{14x^3 + 24x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}\,dx.$

18. $\int \frac{12x^3 + 20x^2 + 28x + 4}{(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)}\,dx.$

19. $\int \frac{3x^3 + x}{(x^2 + 1)^2}\,dx.$

20. $\int \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x - 6}\,dx.$

21. $\int_0^1 \frac{2 - 2x}{x^2 + 7x + 12}\,dx.$

22. $\int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{(x + 3)(x + 2)}\,dx.$

23. Evalúe el área limitada por $y = (x^2 + 1)/(x + 2)^2$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

16.3 Integración por medio de tablas

Ocurren frecuentemente ciertas formas de integrales que pueden evaluarse en tablas de fórmulas de integración.* En el Apéndice E aparece una tabla breve, y en tal sección se ilustra la forma en que se utiliza.

Es posible que sea necesario reemplazar una integral dada por una forma equivalente antes de que se ajuste a algunas de las fórmulas de la tabla. La forma equivalente debe ajustarse de manera *exacta* a la fórmula. En consecuencia, las modificaciones que se lleven a cabo *no* deben realizarse en forma mental. *¡Escríbalas!* El no hacer lo anterior puede conducir fácilmente a resultados incorrectos. Antes de realizar los ejercicios el lector debe asegurarse de que comprende *plenamente* los ejemplos ilustrativos.

En los siguientes ejemplos los números de fórmula se refieren a la Tabla de Integrales Seleccionadas que se presenta en el Apéndice E.

EJEMPLO 1

Resolver $\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)^2}$.

Explorando en las tablas, puede identificarse el integrando con la Fórmula 7:

$$\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a + bu| + \frac{a}{a + bu}\right) + C.$$

Ahora se observa si es posible asociar en forma exacta el integrando dado con el de la fórmula. Si se reemplaza x por u, 2 por a y 3 por b, entonces $du = dx$ y, mediante sustitución, se tiene

$$\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)^2} = \int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a + bu| + \frac{a}{a + bu}\right) + C.$$

Volviendo a la variable x y reemplazando a por 2 y b por 3, resulta

$$\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)^2} = \frac{1}{9}\left(\ln|2 + 3x| + \frac{2}{2 + 3x}\right) + C.$$

* Véase, por ejemplo, S. M. Selby, *Standard Mathematical Tables*, 22ª ed. (Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Company, 1974).

EJEMPLO 2

Evaluar $\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\,dx$.

Esta integral se identifica con la Fórmula 24:

$$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

En ésta última, si se utiliza el signo inferior del símbolo dual "±" en el lado izquierdo, entonces debe utilizarse también el signo de la parte inferior de los símbolos duales del lado derecho. En la integral original se fijan $q = x$ y $a = 1$. Entonces, $du = dx$ y, por sustitución, la integral se convierte en

$$\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C.$$

Como $u = x$ y $a = 1$,

$$\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.$$

EJEMPLO 3

Resolver $\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}}$.

Puede identificarse el integrando con la Fórmula 28:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C.$$

Si $u = 4x$ y a $= \sqrt{3}$, entonces $du = 4\,dx$. Obsérvese cuidadosamente la forma en que insertando cuatros en el numerador y en el denominador, se transforma la integral dada en una forma equivalente que se ajusta a la Fórmula 28.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}} = \int \frac{(4\,dx)}{(4x)\sqrt{(4x)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2 + 3} - \sqrt{3}}{4x}\right| + C.$$

Obsérvese que la respuesta debe darse en términos de x, la variable *original* de integración.

EJEMPLO 4

Determinar $\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}}$.

Este integrando se identifica con la Fórmula 21:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C.$$

Haciendo $u = \sqrt{3}x$ y $a^2 = 2$, se tiene $du = \sqrt{3}\,dx$. Por ello, insertando dos factores de $\sqrt{3}$ tanto en el numerador como en el denominador de la integral original, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}} &= \sqrt{3}\int \frac{(\sqrt{3}\,dx)}{(\sqrt{3}\,x)^2[2 - (\sqrt{3}\,x)^2]^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)^{1/2}} \\ &= \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u}\right] + C = \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2(\sqrt{3}\,x)}\right] + C \\ &= -\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2x} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Evaluar $\int 7x^2 \ln(4x)\,dx$.

Esta es similar a la Fórmula 42, con $n = 2$:

$$\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n + 1} - \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2} + C.$$

Si $u = 4x$, entonces $du = 4\,dx$. De aquí que

$$\begin{aligned}\int 7x^2 \ln(4x)\,dx &= \frac{7}{4^3}\int (4x)^2 \ln(4x)\,(4\,dx) \\ &= \frac{7}{64}\int u^2 \ln u\,du = \frac{7}{64}\left(\frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9}\right) + C \\ &= \frac{7}{64}\left[\frac{(4x)^3 \ln(4x)}{3} - \frac{(4x)^3}{9}\right] + C \\ &= 7x^3\left[\frac{\ln(4x)}{3} - \frac{1}{9}\right] + C \\ &= \frac{7x^3}{9}[3 \ln(4x) - 1] + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Resolver $\int \frac{e^{2x}\,dx}{7 + e^{2x}}$.

A primera vista no se identifica el integrando con ninguna forma de la tabla. Quizá el reescribir la integral resulte útil. Sea $u = 7 + e^{2x}$; en este caso, $du = 2e^{2x}\,dx$.

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2e^{2x}\,dx)}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|7 + e^{2x}| + C = \frac{1}{2}\ln(7 + e^{2x}) + C.$$

De manera que sólo se requirió utilizar el conocimiento que ya se tenía de las formas básicas de integración. En realidad, esta forma aparece como Fórmula 2 en las tablas.

EJEMPLO 7

Evaluar $\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}}$.

Se utiliza en primer lugar la Fórmula 32 para obtener la integral indefinida:

$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

Si $u = 2x$ y $a^2 = 2$ entonces $du = 2\,dx$. Así

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\,dx)}{[(2x)^2 + 2]^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2\sqrt{u^2 + 2}}\right] + C.$$

En vez de volver a sustituir la x y evaluar a partir de $x = 1$ hasta $x = 4$, es posible determinar los correspondientes límites de integración con respecto a u y después evaluar la última expresión entre esos límites. Ya que $u = 2x$ cuando $x = 1$, entonces $u = 2$; cuando $x = 4$, se tiene que $u = 8$. En consecuencia

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\sqrt{u^2 + 2}}\right)\Bigg|_2^8 = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

ADVERTENCIA

Cuando se cambia la variable de integración x a la variable de integracion u debe asegurarse de que se cambian los límites de integración para que concuerden con u. Es decir,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} \neq \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}}.$$

Las tablas son útiles cuando se manejan integrales relacionadas con anualidades. Supóngase que se deben pagar \$100 al final de cada año en los próximos dos años. Recuérdese del Capítulo 7 que a una serie de pagos realizados en un periodo, tal como el que se plantea aquí, se le denomina *anualidad*. Si en vez de hacerlo como se plantea, fuera a liquidarse en este momento la deuda, se pagaría el valor presente de los \$100 que vencen al final del primer año más el valor actual de los \$100 que vencen al final del segundo año. (Se analiza en la Sección 7.3 el valor actual de una anualidad.) La

suma de estos valores presentes es el valor actual de la anualidad. Ahora, se considera el valor actual de pagos realizados en forma continua en el intervalo de tiempo que transcurre de $t = 0$ a $t = T$, en donde t está en años, cuando el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de r.

Supóngase que se hace un pago en el tiempo t de manera que según una base anual este pago es $f(t)$. Si se divide el intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de amplitud Δt (en donde Δt es pequeña), entonces el monto total de todos los pagos en ese subintervalo es aproximadamente $f(t_i)\Delta t$. [Por ejemplo, si $f(t) = 2000$ y Δt fueran un día, entonces el monto total de los pagos sería $2000(\frac{1}{365})$.] El valor actual de los pagos es aproximadamente $e^{-rti}f(t_i)\ \Delta t$ (véase la Sección 10.3). En el intervalo $[0, T]$, el total de todos esos valores actuales es

$$\sum e^{-rt_i} f(t_i)\Delta t.$$

Esta suma se aproxima al valor presente A de la anualidad. Conforme más pequeño es Δt tanto mejor es la aproximación. Es decir, cuando $\Delta t \to 0$, el límite de la suma *es* el valor actual. Sin embargo, este límite es también una integral definida. Es decir,

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt. \tag{1}$$

donde A es **el valor actual de una anualidad continua** a una tasa anual r (compuesta continuamente) durante T años si un pago en el tiempo t es la tasa de $f(t)$ al año.

En ocasiones se dice que la Ecuación (1) proporciona el **valor actual de un flujo continuo de ingresos.** También se puede utilizar la Ecuación (1) para calcular el valor actual de las unidades futuras de un negocio. En tal caso, $f(t)$ es la tasa anual de utilidades en el tiempo t.

También puede considerarse el valor *futuro* de una anualidad en vez de su valor actual. Si se hace un pago en el tiempo t, entonces tiene cierto valor al *final* del periodo de la anualidad, es decir, $T - t$ años después. Este valor es

$$\begin{pmatrix}\text{importe}\\ \text{del pago}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{interés sobre este pago}\\ \text{durante } T - t \text{ años}\end{pmatrix}.$$

Si S es el total de estos valores para todos los pagos, entonces a S se le denomina el **monto acumulado de una anualidad continua** y está dado por la siguiente fórmula

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt.$$

en donde S es el **monto acumulado de una anualidad continua** al final de T años, a una tasa anual r (capitalizable continuamente) cuando un pago al tiempo t es la tasa $f(t)$ por año.

EJEMPLO 8

Evaluar el valor actual (redondeado a unidades) de una anualidad continua a una tasa anual de 8% *durante* 10 *años, si el pago en el momento t es según la tasa de* t^2 *unidades monetarias al año.*

El valor actual está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t}\,dt.$$

Se usa la Fórmula 39,

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du,$$

que se denomina *fórmula de reducción* porque transforma una integral a una expresión que es más fácil de determinar. Si $u = t$, $n = 2$ y $a = -0.08$, entonces $du = dt$ y se tiene

$$A = \frac{t^2 e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\int_0^{10} te^{-0.08t}\,dt.$$

En la nueva integral el exponente t se ha reducido a 1. Se puede asociar esta integral a la Fórmula 38,

$$\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C,$$

haciendo $u = t$ y $a = -0.08$. En este caso, $du = dt$ y

$$A = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t}\,dt = \frac{t^2 e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.08t}}{(-0.08)^2}(-0.08t - 1)\right]\bigg|_0^{10}$$

$$= \frac{100e^{-0.8}}{-0.08} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.8}}{(-0.08)^2}(-0.8 - 1) - \frac{1}{(-0.08)^2}(-1)\right]$$

$$= -1250e^{-0.8} + 25[-281.25e^{-0.8} + 156.25]$$

$$= -8281.25e^{-0.8} + 3906.25 \approx -8281.25(0.44933) + 3906.25 \approx 185.$$

El valor actual es \$185.

EJERCICIOS 16.3

En los Problemas **1-34,** *evalúe las integrales utilizando la tabla del Apéndice E.*

1. $\int \frac{dx}{x(6 + 7x)}$.

2. $\int \frac{x^2\,dx}{(1 + 2x)^2}$.

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$.

4. $\int \frac{dx}{(x^2 + 7)^{3/2}}$.

5. $\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)(4 + 5x)}$.

6. $\int 2^{5x}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{4 + 3e^{2x}}$.

8. $\int x^2\sqrt{1 + x}\,dx$

9. $\int \frac{2\,dx}{x(1 + x)^2}$.

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5 - 11x^2}}$.

11. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2 + x}$.

12. $\int \frac{x^2\,dx}{2 + 5x}$.

13. $\int \sqrt{x^2 - 3}\,dx$.

14. $\int \frac{dx}{(4 + 3x)(4x + 3)}$.

15. $\int_0^{1/12} xe^{12x}\,dx$.

16. $\int \sqrt{\frac{2 + 3x}{5 + 3x}}\,dx$.

17. $\int x^2 e^x\,dx$.

18. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1 + x)}$.

19. $\int \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x^2}\,dx$.

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 - x}}$.

21. $\int \frac{x\,dx}{(1+3x)^2}$.

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+2x)(3+2x)}}$.

23. $\int \frac{dx}{7-5x^2}$.

24. $\int x^2\sqrt{2x^2-9}\,dx$.

25. $\int x^5 \ln(3x)\,dx$.

26. $\int \frac{dx}{x^2(1+x)^2}$.

27. $\int 2x\sqrt{1+3x}\,dx$.

28. $\int x^2 \ln x\,dx$.

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-13}}$.

30. $\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$.

31. $\int x\ln(2x)\,dx$.

32. $\int \frac{\sqrt{2-3x^2}}{x}\,dx$.

33. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-4x^2}}$.

34. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^4}$.

En los Problemas **35-52,** *resuelva las integrales por cualquier método.*

35. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

36. $\int \sqrt{x}\,e^{x^{3/2}}\,dx$.

37. $\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx$.

38. $\int \frac{4x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx$.

39. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

40. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}\,dx$.

41. $\int x^3 \ln x\,dx$.

42. $\int_0^3 xe^{-x}\,dx$.

43. $\int xe^{2x}\,dx$.

44. $\int_1^2 x^2\sqrt{3+2x}\,dx$.

45. $\int \ln^2 x\,dx$.

46. $\int_1^e \ln x\,dx$.

47. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x}}$.

48. $\int_1^2 x\sqrt{1+2x}\,dx$.

49. $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

50. $\int_0^{\ln 2} x^3e^{2x}\,dx$.

51. $\int_1^2 x\ln(2x)\,dx$.

52. $\int_1^2 dx$.

53. En un análisis referente a la frecuencia de genes,* se presenta la siguiente integral:

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q(1-q)},$$

en donde las q representan las frecuencias de genes. Evalúe esta integral.

54. En ciertas condiciones el número n de generaciones que se requieren para cambiar la frecuencia de un gene de 0.3 a 0.1 está dado por §

$$n = -\frac{1}{0.4}\int_{0.3}^{0.1} \frac{dq}{q^2(1-q)}.$$

Calcule n (al entero más cercano).

55. Obtenga el valor actual (redondeando a unidades) de una anualidad continua a una tasa anual de r durante T años, si el pago en el momento t es a la tasa anual $f(t)$, dado que

a. $r = 0.06,\quad T = 10,\quad f(t) = 5000,$
b. $r = 0.05,\quad T = 8,\quad f(t) = 200t.$

56. Si $f(t) = k$, en donde k es una constante positiva, demuestre que el valor de la integral en la Ecuación (1) de esta sección es

$$k\left(\frac{1-e^{-rT}}{r}\right).$$

57. Calcule el monto acumulado, redondeando a unidades, de una anualidad continua a una tasa anual r durante T años, si el pago en el momento t es a la tasa anual $f(t)$, dado que

a. $r = 0.06,\quad T = 10,\quad f(t) = 400,$
b. $r = 0.04,\quad T = 5,\quad f(t) = 40t.$

58. Durante los 5 próximos años las utilidades de un negocio en el tiempo t se estiman en $20{,}000t$ dólares por año. El negocio se va a vender a un precio equivalente al valor actual de esas utilidades futuras. Si el interés se capitaliza continuamente a la tasa anual del 10%, ¿cuál debe ser el precio al que se venda dicho negocio, redondeado a decenas de dólares?

---

§ E.O. Wilson y W.H. Bossert, *A Primer of Population Biology* (Stamford, Conn.: Sinauer Associates, Inc., 1971).

16.4 Valor promedio de una función

Si se dan los números 1, 2 y 9, entonces su valor promedio, o *media*, es su suma dividida entre 3. Si se denomina $\bar{y}$ a este valor promedio, se tiene que

$$\bar{y} = \frac{1 + 2 + 9}{3} = 4.$$

De modo semejante, supóngase que se tiene una función f definida en el intervalo $[a, b]$ y que los puntos $x_1, x^2, \ldots, x_n$ están en el intervalo. Entonces, el valor promedio de los n valores funcionales correspondientes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\bar{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}. \tag{1}$$

Es posible avanzar un paso más. Divídase el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual amplitud. Se decide que x_1 esté en el primer subintervalo, x_2 en el segundo, etcétera. Como $[a, b]$ es de amplitud $b - a$, cada subintervalo es de amplitud $\dfrac{b - a}{n}$, a la que se identifica como Δx. En consecuencia, (1) se puede escribir como

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}{n} = \frac{\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}{n} = \frac{1}{n\,\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \tag{2}$$

Ya que $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$, entonces $n\,\Delta x = b - a$, por lo que la expresión $\dfrac{1}{n\,\Delta x}$ de la Ec. (2) puede reemplazarse por $\dfrac{1}{b - a}$. Además, cuando $n \to \infty$ aumenta el número de valores funcionales que se utilizan para calcular $\bar{y}$ y se obtiene lo que se denomina el *valor promedio de la función f*, denotado por $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b - a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Pero el límite del lado derecho es exactamente la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Consecuentemente, se tiene la siguiente definición

DEFINICIÓN

El valor promedio (o media) de una función $y = f(x)$ *sobre el intervalo* $[a, b]$ *se denota por* $\bar{f}$ *(o bien* $\bar{y}$*) y está dado por*

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1

Calcular el valor promedio de la función $f(x) = x^2$ *en el intervalo* $[1, 2]$.

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

En el Ejemplo 1 se encontró que el valor promedio de $y = f(x) = x^2$ en el intervalo [1, 2] es $\frac{7}{3}$. Se puede interpretar tal valor en forma geométrica. En virtud de que

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3},$$

resolviendo la integral se tiene

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}(2-1).$$

Sin embargo, esta integral da el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 2$ (véase la Figura 16.1). De la ecuación anterior, esta área es $(7/3)(2-1)$, la cual es el área de un rectángulo cuya altura es el valor promedio $f = 7/3$ y cuya anchura es $b - a = 2 - 1 = 1$.

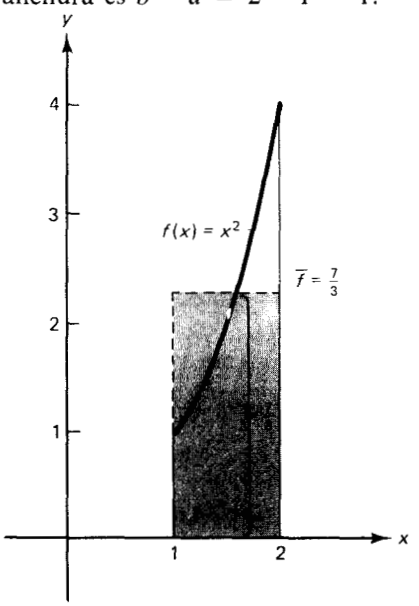


FIGURA 16.1

EJEMPLO 2

Supóngase que el flujo sanguíneo en el tiempo t en un sistema orgánico está dado por

$$F(t) = \frac{F_1}{(1+\alpha t)^2}, \qquad 0 \le t \le T,$$

en donde F_1 y α (la letra griega "alfa") son constantes. Determinar el flujo promedio F en el intervalo* [0, T].

* W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

$$\overline{F} = \frac{1}{T - 0}\int_0^T F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2}\,dt = \frac{F_1}{\alpha T}\int_0^T (1 + \alpha t)^{-2}(\alpha\,dt)$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{(1 + \alpha t)^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_0^T = \frac{F_1}{\alpha T}\left[-\frac{1}{1 + \alpha T} + 1\right]$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{-1 + 1 + \alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{\alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{1 + \alpha T}.$$

EJERCICIOS 16.4

En los Problemas **1-8,** *halle el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.*

1. $f(x) = x^2$; $[0, 4]$.

2. $f(x) = 3x - 1$; $[1, 2]$.

3. $f(x) = 2 - 3x^2$; $[-1, 2]$.

4. $f(x) = x^2 + x + 1$; $[1, 3]$.

5. $f(t) = 4t^3$; $[-2, 2]$.

6. $f(i) = i\sqrt{i^2 + 9}$; $[0, 4]$.

7. $f(x) = \sqrt{x}$; $[1, 9]$.

8. $f(x) = 1/x$; $[2, 4]$.

9. La utilidad P de un negocio está dada por

$$P = P(q) = 396q - 2.1q^2 - 400,$$

en donde q es el número de unidades que se venden de un producto. Evalúe la utilidad promedio en el intervalo que va de $q = 0$ a $q = 100$.

10. Supóngase que el costo c de fabricar q unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2.$$

Calcule el costo promedio en el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

11. Una inversión de \$3000 gana interés a una tasa anual del 10% compuesto continuamente. Después de t años su valor S está dado por $S = 3000e^{0.10t}$. Obtenga el valor promedio de una inversión a 2 años.

12. Supóngase que se inyecta cierto tipo de tinte en el flujo sanguíneo a una tasa constante R.* Sea $C(t)$ la concentración de tinte en el tiempo t en una ubicación distante (distal) del punto de inyección, en donde

$$C(t) = \frac{R}{F(t)}$$

y $F(t)$ está dada en el Ejemplo 2. Demuestre que la concentración promedio $\overline{C}$ en $[0, T]$ es

$$\overline{C} = \frac{R(1 + \alpha T + \frac{1}{3}\alpha^2 T^2)}{F_1}.$$

16.5 Integración aproximada

Cuando se utiliza el Teorema Fundamental para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ es posible que resulte muy difícil, o quizá imposible, encontrar una antiderivada de f, aun utilizando tablas. Por fortuna, existen métodos numéricos que pueden utilizarse para estimar una integral definida. Tales procedimientos emplean valores de $f(x)$ en diversos puntos y son especialmente apropiados para computadoras o calculadoras. Aquí se considerarán dos métodos: la *regla trapecial* y la *regla de Simpson*. En ambos casos se supone que f es continua en $[a, b]$.

* W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology, and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

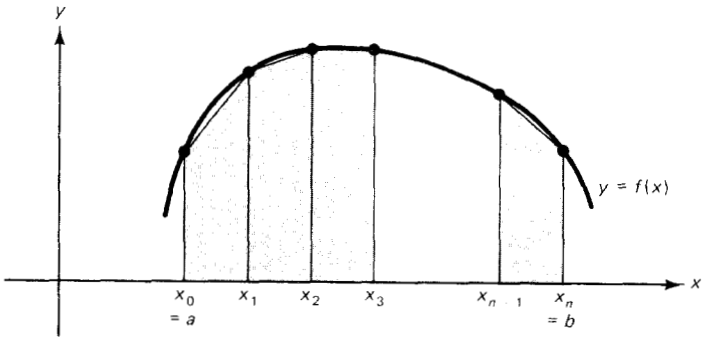


FIGURA 16.2

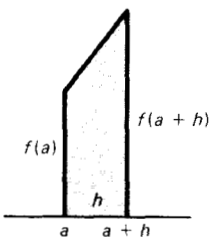


FIGURA 16.3

Al desarrollar la regla trapecial se supondrá también, por conveniencia, que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, de manera que se pueda pensar en términos de área. Básicamente, esta regla implica la aproximación de la gráfica de f por medio de segmentos de recta.

En la Figura 15.2 el intervalo $[a, b]$ está dividido en n subintervalos de igual amplitud, por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ y $x_n = b$. Debido a que la amplitud de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $(b - a)/n$, a la cual se denominará h. Resulta claro que $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $\ldots$, $x_n = a + nh = b$. A cada intervalo se le puede asociar un trapecio (con dos lados paralelos). El área A de la región acotada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$ y puede aproximarse mediante la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

Considérese el primer trapecio, que se muestra aparte en la Figura 15.3. Puesto que el área de un trapecio es igual a la mitad de la base multiplicada por la suma de las longitudes de los lados paralelos, esta figura tiene como área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)].$$

Análogamente, el segundo trapecio tiene por área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)].$$

El área A bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de n trapecios:

$$A \approx \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)] + \tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)] + \tfrac{1}{2}h[f(a + 2h) + f(a + 3h)] + \cdots + \tfrac{1}{2}h[f(a + (n - 1)h) + f(b)].$$

Dado que $A = \int_a^b f(x)\,dx$, simplificando lo anterior se obtiene la regla trapecial:

Regla trapecial

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) + \cdots + 2f[a + (n - 1)h] + f(b)\},$$

en donde $h = (b - a)/n$.

La disposición de los coeficientes que se encuentran dentro de los corchetes es 1, 2, 2, . . ., 2, 1. Por lo general, conforme mayor es el número de subintervalos tanto mejor es la aproximación. En el desarrollo anterior se supuso por conveniencia que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Sin embargo, la regla trapecial es válida sin esta restricción.

EJEMPLO 1

Utilizar la regla trapecial para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

con $n = 5$. Calcular cada término hasta cuatro cifras decimales y redondear la respuesta a tres.

Aquí $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $n = 5$, $a = 0$, y $b = 1$. De modo que,

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Los términos que deben sumarse son

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) &&= 1.0000 \\ 2f(a + h) &= 2f(0.2) &&= 1.9231 \\ 2f(a + 2h) &= 2f(0.4) &&= 1.7241 \\ 2f(a + 3h) &= 2f(0.6) &&= 1.4706 \\ 2f(a + 4h) &= 2f(0.8) &&= 1.2195 \\ f(b) &= f(1) &&= \underline{0.5000} \\ & & & \quad 7.8373 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por tanto, la estimación del valor de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784.$$

El valor real es aproximadamente 0.785.

La regla de Simpson proporciona otro método para estimar $\int_a^b f(x)\, dx$ y que implica la aproximación de la gráfica de f mediante segmentos parabólicos. Se omite la deducción

Regla de Simpson (con n par)

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a + h) + 2f(a + 2h) + \cdots + 4f[a + (n - 1)h] + f(b)\},$$

en donde $h = (b - a)/n$ y se tiene que n es par.

El patrón de los coeficientes que se encuentran dentro de los corchetes es 1, 4, 2, 4,

2, . . . , 2, 4, 1 y esto exige que ***n* sea par**. Ahora, se empleará esta regla para la integral del Ejemplo 1.

EJEMPLO 2

Usar la regla de Simpson para estimar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *empleando* $n = 4$. *Calcular cada uno de los términos con cuatro cifras decimales y redondear la respuesta a tres.*

Aquí, $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$. Así, $h = (b - a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos que deben sumarse son

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) &&= 1.0000 \\ 4f(a+h) &= 4f(0.25) &&= 3.7647 \\ 2f(a+2h) &= 2f(0.5) &&= 1.6000 \\ 4f(a+3h) &= 4f(0.75) &&= 2.5600 \\ f(b) &= f(1) &&= \underline{0.5000} \\ & && 9.4247 = \text{suma}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, mediante la Regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785.$$

Esta es una mejor aproximación que la que se obtuvo en el Ejemplo 1 con la regla trapecial.

Tanto la regla de Simpson como la trapecial pueden utilizarse si se conocen sólo $f(a), f(a + h)$, etcétera; no se requiere conocer la propia f. Se ilustra esto en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Una función que se emplea con frecuencia en Demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etc., en una población) es la ***función de la tabla de vida****, denotada por l. En una población que tiene 100,000 nacimientos en cualquier año,* $l(x)$ *representa el número de personas que llegan a la edad x en cualquier año. Por ejemplo, si* $l(20) = 95{,}961$, *entonces el número de personas que llegan a la edad de 20 años en cualquier año es* 95,961. *Supóngase que se aplica la función l a todas las personas que nacieron en un intervalo amplio de tiempo. Puede probarse que, en cualquier momento, el número esperado de personas de la población que tienen exactamente edades entre x y x + m, inclusive, está dado por*

$$\int_x^{x+m} l(t)\,dt.$$

En la siguiente tabla se presentan valores de l(x), para hombres y mujeres de cierta población. Obtener aproximadamente el número de mujeres que se encuentran en el grupo de edades de 20-35. Aplicando la regla trapecial, con* $n = 3$.

* *Fuente*: Adaptado de *Population: Facts and Methods of Demography* de Nathan Keyfitz y William Flieger, W. H. Freeman and Company. Copyright ©1971.

Tabla de tiempo de vida

	$l(x)$			$l(x)$	
Edad x	**Hombres**	**Mujeres**	**Edad x**	**Hombres**	**Mujeres**
0	100,000	100,000	45	89,489	93,667
5	97,158	97,791	50	86,195	91,726
10	96,921	97,618	55	81,154	88,935
15	96,672	97,473	60	73,830	84,971
20	95,961	97,188	65	64,108	79,445
25	95,000	96,839	70	52,007	71,196
30	94,097	96,429	75	38,044	59,946
35	93,067	95,844	80	24,900	45,662
40	91,628	94,961			

Se desea estimar

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt.$$

Se tiene $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{35-20}{3} = 5$. Los términos que deben sumarse son

$$\begin{aligned} l(20) &= 97{,}188 \\ 2l(25) &= 2(96{,}839) = 193{,}678 \\ 2l(30) &= 2(96{,}429) = 192{,}858 \\ l(35) &= \underline{95{,}844} \\ &\quad 579{,}568 = \text{suma}. \end{aligned}$$

Mediante la regla trapecial,

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt \approx \tfrac{5}{2}(579{,}568) = 1{,}448{,}920.$$

Existen fórmulas que sirven para determinar la precisión de las respuestas que se obtienen utilizando la regla trapecial o la regla de Simpson. Estas fórmulas se pueden encontrar en textos de análisis numérico.

EJERCICIOS 16.5

En cada problema calcule cada uno de los términos con cuatro cifras decimales y redondee la respuesta a tres.

En los Problemas **1-6,** *utilice la regla trapecial o la regla de Simpson (según se señala) y el valor indicado de n para estimar la integral.*

En los Problemas **1-4,** *halle también la respuesta mediante antidiferenciación (por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral).*

1. $\int_0^1 x^2\,dx$; regla trapecial, $n = 5$.

2. $\int_0^1 x^2\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$.

3. $\int_1^4 \frac{dx}{x}$; regla de Simpson, $n = 6$.

4. $\int_1^4 \frac{dx}{x}$; regla trapecial, $n = 6$.

5. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x+1}$; regla trapecial, $n = 4$.

6. $\int_2^4 \frac{dx}{x+x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$.

En los Problemas **7** *y* **8**, *emplee la tabla de vida del Ejemplo 3 para estimar mediante la regla trapecial las integrales dadas.*

7. $\int_{15}^{40} l(t)\,dt$, hombres, $n = 5$.

8. $\int_{35}^{55} l(t)\,dt$, mujeres, $n = 4$.

En los Problemas **9** *y* **10**, *supóngase que la gráfica de una función continua f, en donde* $f(x) \geq 0$, *contiene los puntos dados. Aplique la regla de Simpson y todos los puntos para aproximar el área que se encuentra entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado.*

9. (1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5); [1, 5].

10. (2, 0), (2.5, 3.6), (3, 10), (3.5, 19.9), (4, 34); [2, 4].

11. Empleando toda la información que se presenta de la Figura 15.4, estime $\int_1^3 f(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson.

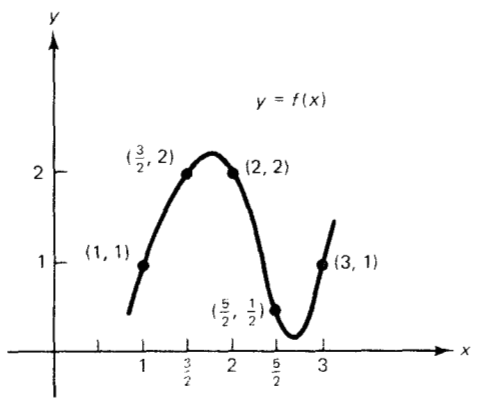


FIGURA 16.4

En los Problemas **12** *y* **13**, *utilícese la regla indicada del valor dado n para estimar la integral.*

12. $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$. También, evalúe la integral mediante el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

13. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$.

16.6 Ecuaciones diferenciales

En ocasiones puede resultar necesario resolver una ecuación que implica la derivada de una función desconocida. A esas ecuaciones se les denomina **ecuaciones diferenciales**. Un ejemplo es

$$y' = xy^2. \tag{1}$$

En términos más precisos, la Ecuación (1) es una *ecuación diferencial de primer orden*, porque contiene una derivada de primer orden y ninguna de orden superior. Una solución para la Ecuación (1) es una función $y = f(x)$ que esté definida en un intervalo y que satisfaga la ecuación para toda x en el intervalo.

Para resolver $y' = xy^2$ o, de manera equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^2, \tag{2}$$

se considera que dy/dx es un cociente de diferenciales y "en forma algebraica" se "separan" variables, replanteando la ecuación de manera que cada uno de los lados contenga sólo una variable y que no se encuentre una diferencial en ningún denominador:

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx.$$

Integrando ambos lados y combinando las constantes de integración,

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2C_1}{2}.$$

Como $2C_1$ es una constante arbitraria, se le puede reemplazar por C.

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2}. \tag{3}$$

Despejando y en la Ec. (3), resulta

$$y = -\frac{2}{x^2 + C}. \tag{4}$$

Puede verificarse por sustitución que y es una solución para la Ecuación diferencial (2):

$$\frac{dy}{dx} = xy^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = x\left[-\frac{2}{x^2 + C}\right]^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}.$$

Se debe observar en la Ecuación (4) que para *cada* valor de C se obtiene una solución diferente. A la Ecuación (4) se le denomina **solución general** de la ecuación diferencial. El método que se empleó para hallarla se denomina **separación de variables**.

En el ejemplo anterior supóngase que se fija la condición de que $y = -\frac{2}{3}$ cuando $x = 1$; es decir $y(1) = -\frac{2}{3}$. Entonces, la función *particular* que satisface la Ecuación

(2) y tal condición se puede encontrar sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = -\frac{2}{3}$ en la Ecuación (4) y despejando C:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{1^2 + C},$$

$$C = 2.$$

Por lo tanto, la solución de $dy/dx = xy^2$, tal que $y(1) = -\frac{2}{3}$ es

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2}. \tag{5}$$

A la Ecuación (5) se le denomina **solución particular** de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1

Resolver $y' = -\dfrac{y}{x}$ *si* $x, y > 0$.

Escribiendo y' como dy/dx, separando variables e integrando, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx,$$

$$\ln |y| = C_1 - \ln |x|.$$

En virtud de que $x, y > 0$, se pueden omitir las barras de valor absoluto:

$$\ln y = C_1 - \ln x. \tag{6}$$

La forma exponencial de la Ec. (6) es $y = e^{C_1 - \ln x}$,

por lo que $$y = e^{C_1} e^{-\ln x} = \frac{e^{C_1}}{e^{\ln x}}.$$

Reemplazando e^{C_1} *por* C, en donde $C > 0$ y $e^{\ln x}$ por x se obtiene

$$y = \frac{C}{x}, \qquad C, x > 0.$$

En la Sección 10.3 se analizó el interés compuesto continuamente. Ahora se aborda este tema de manera diferente. Supóngase que se invierten P dólares a una tasa anual r compuesta n veces al año. Supóngase que la función $S = S(t)$ da el monto compuesto S (o el monto total) a los t años de la fecha de la inversión inicial. En este caso, el capital inicial es $S(0) = P$. Además, como existen n periodos de interés por año, cada uno es de longitud $1/n$ años, lo que se denota por Δt. Al final del primer periodo el interés acumulado se suma al capital, y la suma actúa en calidad de capital para el segundo periodo, y así sucesivamente. Consecuentemente, si el comienzo de un periodo de inte-

rés ocurre en el tiempo t, entonces el aumento en el monto al final del periodo Δt es $S(t + \Delta t) - S(t)$, que se escribe como ΔS. Este incremento, ΔS, es también el interés que se gana en el periodo. De forma equivalente, el interés es el capital multiplicado por la tasa y multiplicado también por el tiempo:

$$\Delta S = S \cdot r \cdot \Delta t.$$

Dividiendo ambos lados entre Δt, se obtiene

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = rS. \tag{7}$$

Cuando $\Delta t \to 0$, entonces $n = \dfrac{1}{\Delta t} \to \infty$ y, en consecuencia el interés se *capitaliza continuamente*; es decir, el capital experimenta un crecimiento continuo en cada instante. Sin embargo, cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta S/\Delta t \to dS/dt$, y la Ecuación (7) toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = rS. \tag{8}$$

Esta ecuación diferencial significa que *cuando se capitaliza continuamente el interés la rapidez de cambio de la cantidad de dinero que se tiene en el momento t es proporcional a la cantidad que se tiene en el tiempo t*. La constante de proporcionalidad es r.

Para determinar la función real S se resuelve la ecuación diferencial (8) mediante el método de separación de variables.

$$\frac{dS}{dt} = rS,$$

$$\frac{dS}{S} = r\,dt,$$

$$\int \frac{1}{S}\,dS = \int r\,dt,$$

$$\ln |S| = rt + C_1.$$

Puesto que puede suponerse que $S > 0$ entonces $\ln |S| = \ln S$. Por ello,

$$\ln S = rt + C_1.$$

Se puede despejar S convirtiendo la forma exponencial siguiente.

$$S = e^{rt+C_1} = e^{C_1}e^{rt}.$$

Por sencillez puede reemplazarse e^{C_1}, por C, para tener

$$S = Ce^{rt}.$$

Debido a la condición de que $S(0) = P$, es posible calcular el valor de C:

$$P = Ce^{r(0)} = C \cdot 1.$$

Así, $C = P$ y

$$S = Pe^{rt}. \tag{9}$$

La Ecuación (9) da el valor total después de t años de una inversión inicial P compuesta continuamente a una tasa anual r (véase la Figura 15.5).

En el análisis del interés compuesto se vio de la Ecuación (8) que la rapidez de cambio en el monto presente era proporcional a su misma magnitud. Existen muchas

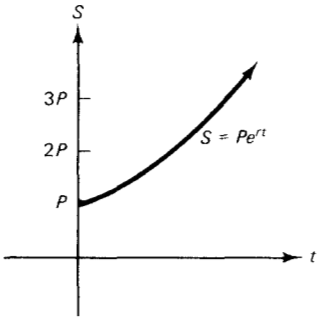


FIGURA 16.5

cantidades naturales como la población, cuya tasa de crecimiento o de disminución, en cualquier momento se considera proporcional al valor inicial que se tiene. Si N denota la magnitud de esa cantidad en un tiempo t, entonces la tasa de crecimiento significa que

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

en donde k es una constante. Si se separan las variables y se despeja N, tal como se hizo para la Ecuación (8) se obtiene

$$N = N_0 e^{kt}, \tag{10}$$

en donde N_0 es una constante. Debido a la forma de la Ecuación (10) se dice que la cantidad sigue una **ley exponencial de crecimiento** si k es positiva y un **decrecimiento exponencial** si k es negativa.

EJEMPLO 2

En cierta ciudad la tasa a la cual crece su población en cualquier momento es proporcional al tamaño de esta última. Si la población era de 125,000 *en* 1960 *de* 140,000 *en* 1980, *¿cuál es la población esperada para el año* 2000*?*

Sea N el tamaño de la población en el tiempo t. Como se aplica la ley del crecimiento exponencial,

$$N = N_0 e^{kt}.$$

Para determinar la población en el año 2000, debe encontrarse primero la ley de crecimiento específica e implícita, determinando los valores de N_0 y k. Si se hace que el año 1960 corresponda a $t = 0$, entonces $t = 20$ en 1980 y $t = 40$ en 2000. Para evaluar N_0 se utiliza el hecho de que $n = 125\,000$ cuando $t = 0$.

$$N = N_0 e^{kt},$$

$$125{,}000 = N_0 e^0 = N_0.$$

De donde $N_0 = 125{,}000$ y

$$N = 125{,}000e^{kt}.$$

Para determinar k se utiliza el hecho de que $N = 140\,000$ cuando $t = 20$:

$$140{,}000 = 125{,}000e^{20k}.$$

Por consiguiente,

$$e^{20k} = \frac{140{,}000}{125{,}000} = 1.12,$$

$$20k = \ln(1.12) \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$k = \tfrac{1}{20}\ln(1.12).$$

De manera que la ley de crecimiento es

$$N = 125{,}000e^{(t/20)\ln 1.12} \tag{11}$$

$$= 125{,}000[e^{\ln 1.12}]^{t/20}.$$

$$N = 125{,}000(1.12)^{t/20}. \tag{12}$$

Haciendo $t = 40$ se obtiene la población esperada en el año 2000:

$$N = 125{,}000(1.12)^2 = 156{,}800.$$

Se destaca que puede escribirse la Ecuación (11) en forma distinta a la que tiene la Ecuación (12) puesto que $\ln 1.12 \approx 0.11333$, se tiene $k \approx 0.11333/20 \approx 0.0057$. Por ello,

$$N \approx 125{,}000e^{0.0057t}.$$

En el capítulo 5 se analizó el decaimiento radiactivo. Aquí se considera este mismo tema desde la perspectiva de una ecuación diferencial. La tasa a la cual decrece un elemento radiactivo en cualquier momento es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decrecimiento está dada por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{13}$$

A la constante positiva λ (la letra griega lambda) se le denomina **constante de decrecimiento** y el signo negativo señala que N disminuye cuando t aumenta. Así, se tiene una disminución exponencial. De la Ecuación (10), la solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0e^{-\lambda t}. \tag{14}$$

Si $t = 0$ entonces $N = N_0 \cdot 1 = N_0$ de modo que N_0 representa la cantidad de sustancia radiactiva cuando $t = 0$.

Al tiempo que transcurre hasta que se tiene la mitad de la sustancia se le llama **semivida** (o "vida media") de la sustancia. En la Sección 5.2 se mostró que la semivida está dada por

$$\text{Semivida} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}. \tag{15}$$

Obsérvese que la semivida depende de λ. En la Figura 5.3 del capítulo 5 se muestra la gráfica del decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 3

Si después de 50 días se tiene el 60% de una sustancia radioactiva, determinar la constante de decrecimiento y la semivida de la sustancia.

De la Ecuación (14),

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

en donde N_0 es la cantidad del elemento cuando $t = 0$. Cuando $t = 50$, $N = 0.6N_0$ y

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0 e^{-50\lambda}, \\ 0.6 &= e^{-50\lambda}, \\ -50\lambda &= \ln(0.6) \qquad \text{(forma logarítmica)}, \\ \lambda &= -\frac{\ln(0.6)}{50} \approx -\frac{-0.51083^*}{50} \\ &\approx 0.01022. \end{aligned}$$

En consecuencia $N \approx N_0 e^{-0.01022t}$. La semivida, a partir de la Ecuación (15), vale aproximadamente

$$\frac{0.69315}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{0.01022} \approx 67.82 \text{ días}.$$

La radiactividad sirve para fijar la edad de cosas como restos de plantas fósiles y restos arqueológicos formados de material orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contiene una pequeña cantidad de carbono 14 (C^{14}) radiactivo, además del carbono ordinario (C^{12}). Los átomos de C^{12} son estables, pero los de C^{14} decrecen en forma exponencial. Sin embargo, el C^{14} se forma en la atmósfera debido al efecto de los rayos cósmicos. Finalmente, este C^{14} es absorbido por las plantas durante la fotosíntesis y reemplaza lo que se ha perdido. Como resultado, el cociente de átomos de C^{14} con respecto a los átomos de C^{12} se considera constante para un periodo largo. Cuando una planta muere deja de absorber C^{14} y decrecen los átomos restantes de C^{14}. Comparando la proporción de C^{14} a C^{12} en una planta fósil con respecto a las plantas que existen en la actualidad, es posible estimar la edad del fósil. La semivida del C^{14} es aproximadamente 5600 años. De modo que, por ejemplo, si se averigua que un fósil tiene un cociente de C^{14} a C^{12} que es la mitad del de una sustancia similar que existe en la actualidad, se estimaría que el fósil tiene 5600 años de antigüedad.

EJEMPLO 4

Se descubre que una herramienta de madera encontrada en una excavación en el Medio Oriente tiene una razón de C^{14} a C^{12} de 0.6 de la razón correspondiente en un árbol actual. Estimar la antigüedad de la herramienta redondeando al centenar de años.

* $\ln(0.6) = \ln(6/10) = \ln 6 - \ln 10 \approx 1.79176 - 2.30259 \approx -0.51083.$

Sea N la cantidad presente de C^{14} en la madera t años después de que se fabricó la herramienta. En este caso, $N = N_0e^{-\lambda t}$, en donde N_0 es la cantidad de C^{14} cuando $t = 0$. En virtud de que la razón de C^{14} a C^{12} es 0.6 de la razón correspondiente a un árbol actual ello significa que se desea hallar el valor de t para el cual $N = 0.6N_0$.

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0e^{-\lambda t}, \\ 0.6 &= e^{-\lambda t}, \\ -\lambda t &= \ln(0.6), \\ t &= -\frac{1}{\lambda}\ln(0.6). \end{aligned}$$

De la Ecuación (15) la semivida es (aproximadamente) $0.69315/\lambda$, que es igual a 5600, por lo que $\lambda = 0.69315/5600$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} t &\approx -\frac{1}{0.69315/5600}\ln(0.6) \\ &\approx -\frac{5600}{0.69315}(-0.51083) \\ &\approx 4100 \text{ años}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 16.6

En los Problemas **1-8**, *resuelva las ecuaciones diferenciales.*

1. $y' = 2xy^2$.

2. $y' = x^3y^3$.

3. $\dfrac{dy}{dx} - x\sqrt{x^2+1} = 0$.

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.

5. $\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y > 0$.

6. $y' = e^xy^2$.

7. $y' = \dfrac{y}{x}, \quad x, y > 0$.

8. $\dfrac{dy}{dx} + xe^x = 0$.

En los Problemas **9-14**, *resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales según las condiciones dadas.*

9. $y' = \dfrac{1}{y}; \quad y > 0, y(2) = 2$.

10. $y' = e^{x-y}; \quad y(0) = 0$. (*Sugerencia:* $e^{x-y} = e^x/e^y$.)

11. $e^yy' - x^2 = 0; \quad y = 0$ cuando $x = 0$.

12. $x^2y' + \dfrac{1}{y^2} = 0; \quad y(1) = 2$.

13. $(4x^2 + 3)^2y' - 4xy^2 = 0; \quad y(0) = \frac{3}{2}$.

14. $y' + x^2y = 0; \quad y > 0, y = 1$ cuando $x = 0$.

15. En cierto pueblo la población en cualquier instante cambia a una tasa que es proporcional al valor de la población. Si los habitantes eran 20,000 en 1975 y 24,000 en 1985, obtenga una ecuación para la población en el tiempo t, en donde t es el número de años después de 1975. Escriba la respuesta en dos formas, una incluyendo e. Se puede suponer ln 1.2 = 0.18. ¿Cuál es la población esperada en 1995?

16. La población de un lugar aumenta con crecimiento natural a una tasa que es proporcional al número N actual de personas. Si la población en el tiempo $t = 0$ es 10,000, halle dos expresiones para la población N, a los t años después, si la población se duplica cada 50 años. Suponga que ln 2 = 0.69. Calcule también N para $t = 100$.

17. Supóngase que la población mundial era de 2 mil millones en 1930 y de 3 mil millones en 1960. Si se supone que rige la ley del crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada para el año 2000? Proporciónese la respuesta en términos de e.

18. Si se supone crecimiento exponencial, ¿en aproximadamente cuántos años se triplicará la población si se duplica cada 50 años? (*Sugerencia*: Considérese que la población cuando $t = 0$ es N_0.)

19. Si después de 100 segundos se tiene el 30% de la cantidad inicial de una muestra radioactiva, evalúe la constante de decrecimiento y la semivida del elemento.

20. Si después de 100 segundos se *ha desintegrado* el 30% de la cantidad inicial de una muestra radioactiva, calcule la constante de decrecimiento y la semivida de la sustancia.

21. Se descubrió que un pergamino egipcio tiene una razón de C^{14} a C^{12} igual a 0.7 de la razón correspondiente en material actual semejante. Estime la antigüedad del pergamino al centenar de años.

22. Un espécimen arqueológico recién descubierto tiene una razón de C^{14} a C^{12} que es 0.2 de la razón correspondiente a un material orgánico actual. Estime la antigüedad del espécimen al centenar de años.

23. Supóngase que una población sigue un crecimiento exponencial dado por $dN/dt = kN$ para $t \geq t_0$ y de $N = N_0$ cuando $t = t_0$. Calcule N, la magnitud de la población en el tiempo t.

24. El radón tiene una semivida de 3.82 días. (a) Obtenga la constante de decrecimiento en términos de ln 2. (b) ¿Qué fracción de la cantidad original se tiene después de $2(3.82) = 7.64$ días?

25. En el diagnóstico médico se utilizan isótopos radioactivos como rastreadores para determinar anormalidades que puedan existir en un órgano. Por ejemplo, si se ingiere yodo radioactivo, después de cierto tiempo es absorbido por la glándula tiroides. Con el uso de un detector puede medirse la tasa a la cual es absorbido y determinar si la absorción es normal o no. Supóngase que se va a utilizar en un rastreo cerebral tecnesio-99m, que tiene una semivida de 6 horas, y se le va a detectar dentro de 2 horas. ¿Cuál debe ser su actividad ahora para que la actividad al momento de su utilización sea de 10 unidades? Proporcione la respuesta con una cifra decimal. [*Sugerencia*: En la Ecuación (14), sea N la actividad dentro de t horas, y N_0 la actividad ahora.]

26. Se va a implantar en forma temporal una sustancia radioactiva que tiene una semivida de 8 días a un paciente de hospital hasta que se tengan tres quintos de la cantidad originalmente presente. ¿Qué tanto tiempo debe permanecer la sustancia implantada en el paciente?

27. En un bosque natural se crea basura, como las hojas y ramas que caen, animales muertos, etc.* Empleando $A = A(t)$ para denotar la cantidad de basura presente en el tiempo t, en donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t en años, y suponiendo que no existe basura en $t = 0$, entonces $A(0) = 0$. Supóngase que

1) La basura cae en forma continua a una tasa constante de 200 gramos por metro cuadrado y por año.

2) La basura acumulada se descompone en forma continua a una tasa que es el 50% de la cantidad presente por año (que es $0.050A$).

La diferencia entre las dos tasas es la rapidez de cambio de la cantidad de basura presente con respecto al tiempo (variación):

$$\begin{pmatrix}\text{rapidez de}\\ \text{cambio de la}\\ \text{basura presente}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\text{rapidez del}\\ \text{depósito en}\\ \text{el piso}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{rapidez de}\\ \text{descomposición}\end{pmatrix}.$$

Consecuentemente,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0.50A.$$

Despeje A. Redondeando a unidades, calcule la cantidad de basura por metro cuadrado después de 1 año.

* R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

16.7 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Supóngase que el número N de personas de una población en el tiempo t sigue una ley de crecimiento exponencial. De lo visto en la sección anterior, $N = N_0e^{kt}$, en donde $k > 0$ y N_0 es la población cuando $t = 0$. Por esta ley se supone que en el tiempo t, la tasa de crecimiento, dN/dt, de la población, es proporcional al número de personas que integran la población. Es decir, $dN/dt = kN$.

Con crecimiento exponencial una población crecería en forma indefinida al avanzar el tiempo. Sin embargo, en realidad, cuando la población crece lo suficiente existen factores del medio ambiente que reducen la tasa de crecimiento. Algunos ejemplos son disponibilidad de alimentos, depredadores, hacinamiento, etc. Estos factores ocasionan que al final dN/dt disminuya. Es razonable suponer que el tamaño de la población está limitado a cierto número máximo M, en donde $0 < N < M$; cuando $N \to M$, entonces $dN/dt \to 0$ y el tamaño de la población tiende a ser estable.

En resumen, se desea obtener un modelo de población que tenga inicialmente un crecimiento exponencial pero que también incluya los efectos de la resistencia del medio a un crecimiento grande de la población. Se obtiene un modelo como estos multiplicando el lado derecho de $dN/dt = kN$ por el factor $(M - N)/M$:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M - N}{M}\right).$$

Adviértase que si N es pequeña, entonces $(M - N)/M$ es cercano a 1 y se tiene un crecimiento aproximadamente exponencial. Cuando $N \to M$, entonces $M - N \to 0$ y $dN/dt \to 0$, como se deseaba en el modelo. Como k/M es una constante, se la puede reemplazar por K. Por tanto

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N). \tag{1}$$

Esto establece que la tasa de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y a la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño de la misma. Se puede despejar N en la ecuación diferencial (1) mediante el método de separación de variables.

$$\frac{dN}{N(M - N)} = K\,dt,$$

$$\int \frac{1}{N(M - N)}\,dN = \int K\,dt. \tag{2}$$

Es posible evaluar la integral del lado izquierdo usando la Fórmula 5 de la tabla de integrales. Por ello, la Ecuación (2) se convierte en

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{N}{M - N}\right| = Kt + C,$$

$$\ln\left|\frac{N}{M - N}\right| = Mkt + MC.$$

Dado que $N > 0$ y $M - N > 0$, puede escribirse

$$\ln \frac{N}{M - N} = Mkt + MC.$$

En forma exponencial,

$$\frac{N}{M - N} = e^{MKt + MC} = e^{MKt}e^{MC}.$$

Reemplazando por A la constante positiva e^{MC} se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{N}{M - N} &= Ae^{MKt}, \\ N &= (M - N)Ae^{MKt}, \\ N &= MAe^{MKt} - NAe^{MKt}, \\ NAe^{MKt} + N &= MAe^{MKt}, \\ N(Ae^{MKt} + 1) &= MAe^{MKt}, \\ N &= \frac{MAe^{MKt}}{Ae^{MKt} + 1}. \end{aligned}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre Ae^{MKt}, se tiene

$$N = \frac{M}{1 + \dfrac{1}{Ae^{MKt}}} = \frac{M}{1 + \dfrac{1}{A}e^{-MKt}}.$$

Sustituyendo $1/A$ por b y MK por c da

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}. \tag{3}$$

A la Ecuación (3) se le denomina **función logística** o bien **función logística Verhulst-Pearl**. Su gráfica, que recibe el nombre de *curva logística*, tiene forma de

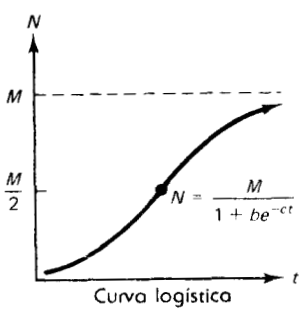


FIGURA 16.6

una S y se muestra en la Figura 16.6. Obsérvese en la gráfica que $N = M$ es una asíntota horizontal; es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{1 + be^{-ct}} = \frac{M}{1 + b(0)} = M.$$

Además, de la Ecuación (1) la tasa de crecimiento es

$$KN(M - N).$$

la cual puede considerarse como función de N. Para encontrar cuándo ocurre la tasa máxima de crecimiento, se despeja M en $\frac{d}{dN}$

$$\frac{d}{dN}[KN(M - N)] = \frac{d}{dN}[K(MN - N^2)]$$

$$= K[M - 2N] = 0.$$

Así, $N = M/2$. La tasa de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es $M/2$ y a partir de aquí disminuye. La tasa máxima de crecimiento aparece cuando $N = M/2$ y corresponde a un punto de inflexión en la gráfica de N. Para calcular el valor de t para lo cual ocurre esto, se sustituye N por $M/2$ en la Ecuación (3) y se despeja t.

$$\frac{M}{2} = \frac{M}{1 + be^{-ct}},$$

$$1 + be^{-ct} = 2,$$

$$e^{-ct} = \frac{1}{b},$$

$$e^{ct} = b,$$

$$ct = \ln b \text{ (forma logarítmica)},$$

$$t = \frac{\ln b}{c}.$$

En consecuencia, la tasa máxima de crecimiento se presenta en el punto $[\ln b]/c, M/2$.

Se debe señalar que en la Ecuación (3) puede reemplazarse e^c por C y entonces la función logística tiene la forma

$$N = \frac{M}{1 + bC^{-t}}.$$

EJEMPLO 1

Supóngase que el número máximo de miembros de un nuevo club campestre será de 800 *personas debido a limitaciones de las instalaciones. Hace un año el número de miembros era* 50 *y ahora existen* 200. *Suponiendo que las inscripciones siguen una función logística, ¿cuántos miembros habrá dentro de tres años?*

Sea N el número de miembros que se inscriben t años después de la formación del club. En este caso

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

Aquí, $M = 800$, y, cuando $t = 0$ se tiene $N = 50$.

$$50 = \frac{800}{1 + b},$$

$$1 + b = \frac{800}{50} = 16,$$

$$b = 15.$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{800}{1 + 15e^{-ct}}. \tag{4}$$

Cuando $t = 1$ entonces $N = 200$.

$$200 = \frac{800}{1 + 15e^{-c}},$$

$$1 + 15e^{-c} = \frac{800}{200} = 4,$$

$$e^{-c} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

De modo que, $c = -\ln \frac{1}{5} = \ln 5$. En vez de sustituir este valor de c en la Ecuación (4), es más conveniente sustituir el valor de e^{-c}.

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^t}.$$

Dentro de tres años $t = 4$. Consecuentemente,

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^4} \approx 781.$$

Ahora se considera un modelo simplificado de la forma en que se difunde un rumor en una población de tamaño M. Una situación semejante sería la difusión de una epidemia o una nueva moda.

Sea $N = N(t)$ el número de personas que están enteradas de un rumor en el tiempo t. Se supondrá que quienes saben el rumor lo difunden en forma aleatoria en la población y que las personas que lo escuchan se convierten en sus difusores. Además, se supondrá que cada persona que lo conoce refiere el rumor a k individuos por unidad de tiempo. (Es posible que algunas de estas k personas ya tengan noticias.) Se desea encontrar una expresión para la tasa de aumento del número de personas que están informadas del rumor. Por unidad de tiempo, cada una de aproximadamente N personas contará el rumor a k personas. Por ello, el número total de personas a las que se les comunica el rumor por unidad de tiempo es Nk (aproximadamente). Sin embargo, lo que interesa son sólo las personas *nuevas* que acaban de enterarse. La proporción de la población que lo desconoce es $(M - N)/M$. Así, el número total de personas nuevas que tienen noticias del rumor es

$$Nk\left(\frac{M - N}{M}\right).$$

que se puede escribir como $(k/M)N(M - N)$. Por lo tanto,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k}{M} N(M - N)$$

$$= KN(M - N), \text{ en donde } K = \frac{k}{M}.$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma de la Ecuación (1), de manera que la solución de la Ecuación (3), es una función logística:

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

EJEMPLO 2

En una universidad grande de 45,000 *estudiantes una persona que se está graduando en Sociología investiga la difusión de un nuevo rumor en las instalaciones universitarias. Cuando comienza con su investigación, determina que* 300 *estudiantes están enterados del rumor. Después de una semana descubre que son* 900 *las personas que lo saben. Estimar el número de personas que lo conocen después de cuatro semanas de haber comenzado la investigación, suponiendo un crecimiento logístico. Proporciónese la respuesta al millar más cercano.*

Sea N el número de estudiantes que tienen noticias del rumor después de t semanas, de haber comenzado la investigación. Entonces,

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

Aquí, M, el tamaño de la población es 45,000 y cuando $t = 0$, se tiene $N = 300$.

$$300 = \frac{45{,}000}{1 + b},$$

$$1 + b = \frac{45{,}000}{300} = 150,$$

$$b = 149.$$

Por ello,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-ct}}.$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 900$.

$$900 = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-c}},$$

$$1 + 149e^{-c} = \frac{45{,}000}{900} = 50.$$

Por lo tanto, $e^{-c} = \frac{49}{149}$, de modo que

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^t}.$$

Cuando $t = 4$,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^4} \approx 16{,}000.$$

Después de 4 semanas conocen el rumor 16,000 estudiantes aproximadamente.

Se concluye esta Sección con una interesante aplicación a una ecuación diferencial. Si se comete un homicidio la temperatura del cuerpo de la víctima disminuye en forma gradual desde 37 °C (la temperatura normal del cuerpo) hasta la temperatura del lugar (la del ambiente). En general, la temperatura de un cuerpo que se enfría cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Este planteamiento se conoce como la **ley de Newton del enfriamiento**. Así, $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a es la temperatura ambiente, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, la ecuación de enfriamiento de Newton es una ecuación diferencial. Se la puede aplicar para determinar el tiempo en que se cometió un homicidio, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Se encontró asesinado en su hogar a un rico industrial. La policía llegó al lugar del crimen a las 11:00 *P.M. En ese momento la temperatura del cuerpo era de* 31°C, *y una hora después era de* 30°C. *La temperatura del cuarto en el que se encontró el cuerpo era de* 22°C. *Determinar la hora en que ocurrió el asesinato.*

Sea t el número de horas después de las cuales se descubrió el cuerpo, y $T(t)$ la temperatura (en grados Celsius) del cuerpo en el tiempo t. Se desea calcular el valor de t para el cual $T = 37$ (la temperatura normal del cuerpo). Por supuesto, este valor de t será negativo. De acuerdo con la ley de Newton del enfriamiento,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

en donde k es una constante y a (la temperatura ambiente) es 22. En consecuencia

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22).$$

Separando variables, se tiene

$$\frac{dT}{T - 22} = k\,dt,$$

$$\int \frac{dT}{T - 22} = \int k\,dt,$$

$$\ln|T - 22| = kt + C.$$

Como $T - 22 > 0$,

$$\ln(T - 22) = kt + C.$$

Cuando $t = 0$, $T = 31$. Por lo tanto,

$$\ln(31 - 22) = k \cdot 0 + C,$$
$$C = \ln 9.$$

De donde

$$\ln(T - 22) = kt + \ln 9,$$
$$\ln(T - 22) - \ln 9 = kt,$$
$$\ln \frac{T - 22}{9} = kt.$$

Cuando $t = 1$, entonces $T = 30$, por lo que

$$\ln \frac{30 - 22}{9} = k \cdot 1,$$
$$k = \ln \frac{8}{9} \approx -0.11778.$$

Así,

$$\ln \frac{T - 22}{9} \approx -0.11778t.$$

Ahora, se evalúa t cuando $T = 37$:

$$\ln \frac{37 - 22}{9} \approx -0.11778t,$$
$$t \approx -\frac{\ln(15/9)}{0.11778} \approx -\frac{0.51083}{0.11778},$$
$$t \approx -4.34.$$

Por consiguiente, el homicidio ocurrió aproximadamente 4.34 horas *antes* de la hora en que se descubrió (11:00 P.M.). Puesto que 4.34 horas es (aproximadamente) 4 horas 20 minutos, el industrial fue asesinado aproximadamente a las 6:40 P.M.

EJERCICIOS 16.7

1. La población de una ciudad tiene un crecimiento logístico y está limitada a 40,000 personas. Si la población era de 20,000 en 1984 y de 25,000 en 1989, ¿cuál será la población en 1994? Proporcione la respuesta al centenar más cercano.

2. Una compañía considera que la fabricación de su producto en las instalaciones actuales seguirá un crecimiento logístico. En estos momentos se fabrican 200 unidades diarias y la producción aumentará a 300 unidades diarias en un año. Si la producción está limitada a 500 unidades al día, ¿cuál es la producción diaria que se anticipa para dentro de 2 años? Proporcione la respuesta a la unidad más cercana.

3. En un país con 3,000,000 de habitantes el primer ministro sufrió un ataque al corazón, que el gobierno no da a conocer en forma pública. Al principio 50 miembros del personal gubernamental saben del ataque y difunden esa información como rumor. Al final de una semana 5000 personas están enteradas del rumor. Suponiendo crecimiento logístico, determine el número de personas que tendrán noticias del rumor después de 2 semanas. Dé la respuesta al millar más cercano.

4. Una nueva moda se está difundiendo en gran medida en una universidad de 30,000 estudiantes. En una publicación que se hace en la institución se conside-

ra que sus lectores estarían interesados en una serie de artículos sobre esa moda. Se asigna un reportero a esta labor cuando el número de personas que han adoptado la moda es 400. Una semana después son 1200 las personas que la han adoptado. Suponiendo un crecimiento logístico, obtenga una fórmula para el número N de adoptantes de la moda t semanas después de la asignación del reportero.

5. En una ciudad con población de 100,000 personas se presenta un brote de influenza. Cuando el departamento sanitario de la ciudad comienza su registro de casos existen 500 personas afectadas. Una semana después, son 1000 las personas. Suponiendo crecimiento logístico, estime el número de personas con el padecimiento 2 semanas después de que se comenzó a llevar registro.

6. La curva logística para la población de Estados Unidos, de 1790 a 1910, se estima en*

$$N = \frac{197.30}{1 + 35.60e^{-0.031186t}},$$

en donde N es la población en millones y t está en años contados a partir de 1800. Si esta función logística fuera válida para los años posteriores a 1910, ¿en que año ocurriría el punto de inflexión? Proporcione la respuesta con una cifra decimal. Supóngase que $\ln 35.6 = 3.5723$.

7. En un experimento† se colocaron cinco *Paramecia* en un tubo de ensayo que contenía un medio nutritivo. El número N de individuos del género *Paramecia* que se encontraban en el tubo al final de t días está dado aproximadamente por

$$N = \frac{375}{1 + e^{5.2-2.3t}}.$$

(a) Demuestre que esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$N = \frac{375}{1 + 181.27e^{-2.3t}},$$

y por una función logística. (b) Determinar $\lim_{t\to\infty} N$.

8. En un estudio del crecimiento de una colonia de organismos unicelulares‡ se obtuvo la siguiente ecuación:

$$N = \frac{0.2524}{e^{-2.128x} + 0.005125}, \qquad 0 \le x \le 5,$$

en donde N es el área estimada del crecimiento en centímetros cuadrados y x es la edad de la colonia en días **después de la primera observación. (a) Exprese esta ecuación en la forma de una función logística. (b) Determine el área cuando la edad de la colonia es 0.**

9. Se cometió un asesinato en un muelle y la policía encontró el cuerpo de la víctima a las 3:15 A.M. En ese momento la temperatura del cuerpo era 32°C. Una hora después la temperatura del cuerpo era 30°C. Después de verificar con la oficina meteorológica se determinó que la temperatura en el muelle era de 10°C de las 10:00 P.M. a las 5:00 A.M. ¿Aproximadamente a qué hora ocurrió el asesinato?

10. Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para aumentar el ritmo de una reacción química que ocurre en células. En cierta reacción una enzima A se convierte en otra enzima B. La B actúa como catalizador para su propia formación. Sea p la cantidad de enzima B que existe en el tiempo t y sea I la cantidad total de ambas enzimas cuando $t = 0$. Supóngase que la tasa de formación de B es proporcional a $p(I - p)$. Sin utilizar Cálculo directamente determine el valor de p para el cual la tasa de formación será máxima.

11. Un pueblo pequeño decide llevar a cabo un movimiento para recolección de fondos destinados a adquirir una nueva bomba contra incendios cuyo costo es \$70,000. La cantidad inicial que se tiene en el fondo es \$10,000. Con base en experiencias pasadas, se determina que t meses después de comenzar la campaña la tasa dx/dt a la cual se contribuye a la formación del fondo es proporcional a la diferencia entre la meta deseada de \$70,000 y la cantidad total x que se tiene en el fondo en ese momento. Después de un mes se tiene un monto total de \$40,000. ¿Cuánto habrá en el fondo después de 3 meses?

12. En un análisis de las propiedades inesperadas de los modelos matemáticos sobre la población, Bailey* considera el caso en el cual la tasa de natali-

* N. Keyfitz, *Introduction to the Mathematics of Population* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968).

† G.F. Gause, *The Struggle for Existence* (Nueva York: Hafner Publishing Co., 1964).

‡ A.J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc. 1956).

* N.T.J. Bailey, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine* (Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).

dad *por individuo* es proporcional al tamaño de la población N en el tiempo t. Ya que la tasa de crecimiento por individuo es $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ esto significa que

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = kN$$

o bien $\frac{dN}{dt} = kN^2$ (sujeta a $N = N_0$ a $t = 0$), en donde $k > 0$. Demuestre que

$$N = \frac{N_0}{1 - kN_0t}.$$

Emplee este resultado para probar que

$$\text{lím } N = \infty \text{ como } t \to \left(\frac{1}{kN_0}\right)^-$$

Esto significa que sobre un intervalo finito de tiempo existe un crecimiento infinito. Este modelo podría ser útil sólo para un crecimiento rápido en un intervalo breve de tiempo.

13. Supóngase que la tasa de crecimiento de una población es proporcional a la diferencia entre algún tamaño máximo M y el número N de personas que tiene la población en el tiempo t. Supóngase que cuando $t = 0$ el tamaño de la población es N_0. Halle una fórmula para N.

16.8 Integrales impropias ‡

Supóngase que $f(x)$ es no negativa para $a \leq x < \infty$ (véase la Figura 16.7). Entonces, la integral $\int_a^r f(x)\,dx$ es el área entre la curva b el eje x, de $x = a$ a $x = r$. Cuando $r \to \infty$, se puede pensar que

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx$$

es el área de la región no acotada que aparece sombreada en la Figura 16.7. Este límite se abrevia mediante

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{1}$$

a la que se denomina **integral impropia**. Si existe este límite se dice que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es **convergente** o que *converge* a dicho límite. En este caso la región no acotada se considera como área finita y se representa por $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Si el límite no existe se dice que la integral es **divergente** y la región no tiene una área finita.

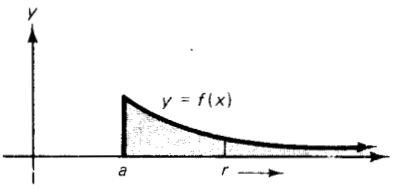


FIGURA 16.7

‡ Se puede omitir si no se ha estudiado algún material de *variables aleatorias continuas*.

Se puede eliminar la restricción de que $f(x) \geq 0$. En general, la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx.$$

Otros tipos de integrales impropias son

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{2}$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx. \tag{3}$$

En cada uno de los tres tipos de integrales impropias [(1), (2) y (3)], el intervalo sobre el cual se evalúa la integral es de longitud infinita. La integral impropia de (2) está definida por

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Si existe este límite se dice que $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ es convergente. Si no es así, será divergente.

Se definirá la integral impropia de (3) después del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. Si son convergentes, determinar el valor de la integral.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx.$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r x^{-3}\,dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}\Bigg|_1^r$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2}\right] = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Consecuentemente, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ converge a $\frac{1}{2}$.

b. $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx.$

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty}\int_r^0 e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} e^x\Big|_r^0$$

$$= \lim_{r\to-\infty}(1 - e^r) = 1 - 0 = 1.$$

(Aquí, se aplicó el hecho de que cuando $r \to \infty$, la gráfica de $y = e^r$ se aproxima al eje r, por lo que $e^r \to 0$). Por ello,

$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ converge a 1.

c. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r x^{-1/2}\,dx = \lim_{r\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^r$$
$$= \lim_{r\to\infty} 2(\sqrt{r} - 1) = \infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia es divergente.

La integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ se define en términos de integrales impropias de las formas (1) y (2):

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx. \tag{4}$$

Si las *dos* integrales del lado derecho de la Ecuación (4) son convergentes, se dice que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente; si no sucede así, entonces es divergente.

EJEMPLO 2

Indicar si $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx$ *es convergente o divergente.*

$$\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \int_0^\infty e^x\,dx.$$

Del Ejemplo 1(b), $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$. Por otro lado,

$$\int_0^\infty e^x\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^x\,dx = \lim_{r\to\infty} e^x\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty}(e^r - 1) = \infty.$$

Debido a que $\displaystyle\int_0^\infty e^x\,dx$ es divergente, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx$ también lo es.

EJEMPLO 3

En Estadística, a una función f se le denomina función densidad si $f(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 1.$$

Supóngase que

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}, \text{ para } x \geq 0, \\ 0, \text{ en los demás casos} \end{cases}$$

es una función densidad. Evaluar k.

Se escribe la ecuación $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ de la siguiente manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Como $f(x) = 0$ para $x < 0$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$. Así,

$$\int_0^{\infty} ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} -ke^{-x}\Big|_0^r = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} (-ke^{-r} + k) = 1,$$

$$0 + k = 1,$$

$$k = 1.$$

EJERCICIOS 16.8

En los Problemas **1-12**, *determine las integrales, si existen. Señale cuáles son divergentes.*

1. $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx.$

3. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx.$

4. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

5. $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx.$

6. $\int_0^{\infty} (5 + e^{-x})\,dx.$

7. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

8. $\int_4^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx.$

10. $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{7-x}}\,dx.$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx.$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} (5 - 3x)\,dx.$

13. La función densidad para la vida en horas x de un componente electrónico de una calculadora está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2}, & \text{para } x \geq 800, \\ 0, & \text{para } x < 800. \end{cases}$$

(a) Si k satisface la condición de que $\int_{800}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, halle el valor de k. (b) La probabilidad de que el componente dure cuando menos 1200 horas está dada por $\int_{1200}^{\infty} f(x)\,dx$. Evalúe esta integral.

14. Dada la función densidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-4x}, & \text{para } x \geq 0, \\ 0, & \text{en los demás casos,} \end{cases}$$

obtenga k.

15. En una empresa el valor actual de todas las utilidades futuras, a una tasa anual de interés r capitalizada continuamente, está dada por

$$\int_0^{\infty} p(t)e^{-rt}\,dt,$$

en donde $p(t)$ es la utilidad por año en dólares en el tiempo t. Si $p(t) = 240{,}000$ y $r = 0.06$, evalúe la integral anterior.

16. En un modelo psicológico para la detección de señales,* la probabilidad α (la letra griega alfa) de reportar una señal cuando no hay ninguna señal presente está dada por

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} e^{-x}\,dx, \qquad x \geq 0.$$

La probabilidad β (la letra griega "beta") de determinar una señal cuando está la misma presente es

$$\beta = \int_{x_c}^{\infty} ke^{-kx}\,dx, \qquad x \geq 0.$$

En ambas integrales x_c es un valor de criterio fijo. Evalúe α y β si $k = \frac{1}{8}$.

17. Calcule el área de la región que se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por la curva $y = e^{-2x}$ y el eje x.

18. Al analizar el ingreso de una empresa en una industria, Stigler† utiliza la ecuación

$$V = \pi_0 \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-\rho t}\,dt,$$

en donde π_0, θ (la letra griega teta), y ρ (la letra griega ro) son constantes. Demuestre que $V = \pi_0/(\rho - \theta)$ si $\theta < \rho$.

19. La tasa de crecimiento pronosticada por año de la población de cierta ciudad pequeña está dada por $10{,}000/(t + 2)^2$, en donde t es el número de años a partir de ahora. A largo plazo (es decir, cuando $t \to \infty$) ¿cuál es el cambio esperado en la población con respecto al nivel actual?

16.9 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 16.1 integración por partes

Sección 16.2 función racional propia fracciones parciales

Sección 16.3 valor actual de una anualidad continua monto acumulado de una anualidad continua

Sección 16.4 valor promedio de una función

Sección 16.5 regla trapecial regla de Simpson

Sección 16.6 ecuación diferencial de primer orden separación de variables crecimiento exponencial decrecimiento exponencial constante de decrecimiento semivida ("vida media")

Sección 16.7 función logística ley de Newton del enfriamiento

Sección 16.8 integral impropia, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

RESUMEN

En ocasiones puede determinarse fácilmente una integral cuya forma es $\int u\,dv$, en donde u y v son funciones, aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

A menudo también se puede integrar una función racional propia aplicando la técnica de las fracciones parciales. En este caso se expresa la función racional como una suma de fracciones, cada una de las cuales es fácil de integrar.

* D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

† G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: Macmillan Publishing Company, 1966), p. 344.

Para determinar una integral que no tiene una forma bien conocida, podría ser posible asociarla con una fórmula de alguna tabla de integrales. Sin embargo, también puede resultar necesario transformar la integral dada a otra forma equivalente antes de poder efectuar la asociación.

Una anualidad es una serie de pagos hechos en un determinado lapso de tiempo. Supóngase que los pagos se hacen en forma continua durante T años de manera que un pago en el tiempo T se da a una tasa de $f(t)$ por año. Si la tasa de interés es r capitalizable continuamente, entonces el valor actual A de la anualidad continua lo proporciona

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt,$$

y el monto acumulado S resulta ser

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt.$$

El valor promedio $\bar{f}$ de una función f sobre el intervalo $[a, b]$ está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Existen fórmulas que permiten aproximar el valor de una integral definida. Una de ellas es la regla trapecial

Regla trapecial

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f[a+(n-1)h] + f(b)\}$, en donde $h = (b-a)/n$.

Otra fórmula es la regla de Simpson:

Regla de Simpson

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f[a+(n-1)h] + f(b)\}$, en donde $h = (b-a)/n$ y n es par.

Una ecuación que implica la derivada de una función desconocida se denomina ecuación diferencial. Si el orden más elevado de la derivada que se presenta es el primero, a la ecuación se le llama ecuación diferencial de primer orden. Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden resolver mediante el método de separación de variables. Por tal método, al considerar que la derivada es un cociente de diferenciales, se reescribe la ecuación de manera que cada lado contenga sólo una variable y no se encuentre ninguna diferencial en algún denominador. Integrando ambos lados de la ecuación resultante se obtiene la solución. Esta solución implica una constante de integración y se conoce con el nombre de solución general de la ecuación diferencial. Si la función desconocida debe satisfacer la condición de tener un valor específico para un valor dado de la variable independiente, entonces se puede hallar una solución específica.

Se presentan ecuaciones diferenciales cuando se conoce una relación que implica la tasa de cambio de una función. Por ejemplo, si una cantidad N en el tiempo t tiene la característica de que varía según una tasa proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dN}{dt} = kN, \qquad \text{en donde } k \text{ es una constante.}$$

La solución de esta ecuación diferencial es $N = N_0e^{kt}$.

en donde N_0 es la cantidad presente en $t = 0$. El valor de k puede determinarse cuando se conoce el valor de N para un valor dado de t (diferente de $t = 0$). Si k es positiva, entonces N sigue una ley exponencial de crecimiento; si k es negativa, N sigue una ley exponencial de decrecimiento. Cuando N representa una cierta cantidad de un elemento radioactivo, entonces

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad \text{en donde } \lambda \text{ es una constante positiva.}$$

En consecuencia, N sigue una ley exponencial de decrecimiento y, por lo tanto

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

La constante λ recibe el nombre de constante de decrecimiento. El tiempo necesario para que disminuya a la mitad la cantidad original del elemento es su semivida (o periodo medial) y

$$\text{semivida} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}.$$

Una cantidad N puede tener una tasa de crecimiento dada por

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N), \qquad \text{en donde } K \text{ y } M \text{ son constantes.}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene una función de la forma

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}, \qquad \text{en donde } b \text{ y } c \text{ son constantes,}$$

a la que se denomina función logística. Pueden describirse poblaciones de muchos tamaños por medio de la función logística. En este caso M representa el límite del tamaño de la población. Se utiliza también una función logística cuando se analiza la propagación de un rumor.

La ley del enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo que se enfría en el tiempo t varía según una tasa proporcional a la diferencia $T - a$, en donde a es la temperatura ambiente. Por consiguiente,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a), \qquad \text{en donde } k \text{ es una constante.}$$

Es posible emplear la solución de esta ecuación diferencial para calcular, por ejemplo, la hora en la que se cometió un homicidio.

Una integral de la forma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \textit{o bien} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

se llama integral impropia. Las primeras dos integrales se definen de la siguiente manera:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx$$

y

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ $\left(\text{o bien } \int_{-\infty}^b f(x)\,dx\right)$ es un número finito, se dice que la integral es convergente; de lo contrario, es divergente. La integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Si ambas integrales del lado derecho de la ecuación son convergentes, se dice entonces que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente; en caso contrario será divergente.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-18**, *determine las integrales.*

1. $\int x \ln x\,dx.$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx.$

3. $\int_0^2 \sqrt{4x^2+9}\,dx.$

4. $\int \frac{2x}{3-4x}\,dx.$

5. $\int \frac{x\,dx}{(2+3x)(3+x)}.$

6. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx.$

7. $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}.$

8. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}.$

10. $\int x^2 \ln(4x)\,dx.$

11. $\int \frac{9\,dx}{x^2-9}.$

12. $\int \frac{3x}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$

13. $\int xe^{7x}\,dx.$

14. $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}.$

15. $\int \frac{dx}{2x \ln 2x}.$

16. $\int \frac{dx}{x(2+x)}.$

17. $\int \frac{2x}{3+2x}\,dx.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}.$

19. Obtenga el valor promedio de $f(x) = 3x^2 + 2x$ sobre el intervalo [2, 4].

20. Halle el valor promedio de $f(t) = te^{t^2}$ en el intervalo [2, 5].

En los Problemas **21** *y* **22**, *aplique (a) la regla trapecial y (b) la regla de Simpson para evaluar la integral. Utilizar el valor dado de n y proporcione la respuesta con tres cifras decimales.*

21. $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx, \quad n = 6.$

22. $\int_0^1 \frac{1}{2-x^3}\,dx, \quad n = 4.$

En los Problemas **23** *y* **24**, *resuelva las ecuaciones diferenciales.*

23. $y' = 3x^2y + 2xy, \quad y > 0.$

24. $y' - 2xe^{x^2-y+3} = 0, \quad y(0) = 3.$

En los Problemas **25-28**, *determine las integrales impropias, si existen.* Señale cuáles son divergentes.*

25. $\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,dx.$

26. $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx.$

27. $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx.$

28. $\int_{-\infty}^\infty xe^{1-x^2}\,dx.$

29. En 1965 la población de una ciudad era de 100,000, y en 1980, de 120,000. Suponiendo crecimiento exponencial, proyecte la población a 1995.

30. La población de una ciudad se duplica cada 10 años debido a un crecimiento exponencial. En cierto momento la población es de 10,000. Obtenga una expresión para el número de personas N, en el tiempo t años después. Supóngase ln 2 = 0.69.

31. Si después de 100 años queda el 95% de una sustancia radioactiva, calcule la constante de decrecimiento y, al porcentaje más cercano, exprese el porcentaje de la cantidad original presente después de 200 años.

32. Supóngase que q es la cantidad de penicilina que se encuentra en el cuerpo en el tiempo t y sea q_0 la cantidad $q/t = 0$. Supóngase que la tasa de variación de q con respecto a t es proporcional a q y que q disminuye cuando t aumenta. Entonces se tiene, $dq/dt = -kq$, en donde $k > 0$. Despeje q ¿qué porcentaje de la cantidad original que estaba presente se conserva cuando $t = 2/k$?

* Refiérase a la Sección 16.8.

33. Inicialmente se colocan dos organismos en un medio y se comienzan a multiplicar. El número N de ellos que se encuentran presentes después de t días se registra en una gráfica, en la que al eje horizontal se le identifica con t y al vertical con N. Se observa que los puntos se ajustan a una curva logística. El número de organismos que están presentes después de 6 días es 300 y después de 10 días el número tiende a un límite de 450. Obtenga la ecuación logística.

34. En una universidad se considera que las inscripciones tienen un crecimiento logístico. El año pasado las inscripciones fueron 1000 y este año 1100. Si lo máximo que puede recibir la universidad son 2000 estudiantes, ¿cuál es la inscripción que se anticiparía para el siguiente año? Proporcione la respuesta al centenar más cercano.

35. Se le asigna a un oficial de policía un caso de homicidio. Llega a las 6:00 P.M. y descubre que la temperatura de la víctima es 35°C. Una hora después la temperatura del cuerpo es 34°C. La temperatura del cuarto es 25°C. ¿Aproximadamente a qué hora se cometió el crimen? (Supóngase que la temperatura normal del cuerpo es 37°C.)

36. Calcule el valor actual, redondeando a unidades, de una anualidad continua a una tasa anual del 5% durante 10 años, si el pago en el tiempo t es a la tasa anual de $f(t) = 40t$.

37. Para un grupo de personas hospitalizadas, supóngase que la proporción de las que han sido dadas de alta al final de t días está dada por

$$\int_0^t f(x)\,dx,$$

en donde $f(x) = 0.008e^{-0.01x} + 0.00004e^{-0.0002x}$,

Evalúe $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

***38.** Supóngase que $A(t)$ es la cantidad de un producto que se consume en el tiempo t y que A sigue la ley exponencial de crecimiento. Si $t_1 < t_2$ y en el tiempo t_2 la cantidad consumida, $A(t_2)$, es el doble de la cantidad consumida en el tiempo t_1, o sea $A(t_1)$, entonces a $t_2 - t_1$ se le denomina periodo de duplicación. En un análisis sobre crecimiento exponencial Shonle† establece que con un crecimiento de esta clase, ". . . la cantidad de un producto que se consume durante un periodo de duplicación es igual al total utilizado durante todo el tiempo hasta el comienzo del periodo de duplicación de que se trate". Para justificar su afirmación enseguida se reproduce su argumento. La cantidad del producto que se utiliza hasta el tiempo t_1 está dada por

$$\int_{-\infty}^{t_1} A_0 e^{kt}\,dt, \qquad k > 0,$$

en donde A_0 es la cantidad cuando $t = 0$. Demuestre que esto es igual a $(A_0/k)e^{kt_1}$. Enseguida, la cantidad utilizada durante el intervalo que va de t_1 a t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} A_0 e^{kt}\,dt.$$

Demuestre que esto es igual a

$$\frac{A_0}{k} e^{kt_1}[e^{k(t_2 - t_1)} - 1]. \tag{1}$$

Si el intervalo $[t_1, t_2]$ es un periodo de duplicación, entonces

$$A_0 e^{kt_2} = 2A_0 e^{kt_1}.$$

Pruebe que esto implica que $e^{k(t_2 - t_1)} = 2$. Sustituya lo anterior en (1); su resultado debe ser igual al total utilizado durante todo el tiempo hasta t_1, es decir, $(A_0/k)e^{kt_1}$.

† J.I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

APLICACIÓN PRÁCTICA

El régimen dietario

Existe en la actualidad una gran preocupación por las dietas y la disminución de peso. Algunas personas desean perder peso para "verse bien". Otras lo rebajan para estar bien físicamente o por razones de salud. De hecho, algunas personas reducen su peso por presiones de sus amistades. Con frecuencia aparecen anuncios de programas de control de peso en la televisión y en periódicos y revistas. En muchas librerías se dedican secciones enteras al régimen de dietas y al control de peso.

Supóngase que se desea determinar un modelo matemático para el peso de una persona que se encuentra bajo una dieta de contenido calórico restringido*. El peso de una persona depende tanto de la tasa diaria de ingestión energética, digamos C calorías dietéticas (Cal) por día, como de la tasa diaria de consumo de energía, que se encuentra típicamente entre 15 y 20 Cal por día por cada libra de peso. El consumo depende de la edad, el sexo, la tasa de metabolismo, etc. Para un valor de 17.5 Cal por libra y por día, una persona que pesa w libras gasta $17.5w$ Cal por día. Si $C = 17.5w$, entonces su peso permanece constante; por otro lado, se presenta una ganancia o pérdida de peso según C sea mayor o menor que 17.5^w (Se tiene que una lb = 0.454 kg).

¿Con qué rapidez se presenta la ganancia o pérdida de peso? La suposición fisiológica más probable es que dw/dt es proporcional al exceso (o deficiencia) neto $C - 17.5w$ en el número de calorías por día. Es decir,

$$\frac{dw}{dt} = K(C - 17.5w),$$

en donde K es una constante. El lado izquierdo de la ecuación tiene como unidad la libra por día, y $C - 17.5w$ tiene como unidad la caloría por día. Por ello, K está en libras por caloría. Por lo tanto, se necesita saber cuántas libras pone o quita cada exceso o deficiencia de una caloría. El factor de conversión dietética que comúnmente se utiliza es que 3500 Cal son equivalentes a una libra. Por tanto, $K = 1/3500$ libras por caloría.

* Adaptado de A.C. Segal, "A Linear Diet Model," *The College Mathematics Journal*, 18, No. 1 (1987). Con autorización de la Mathematical Association of America.

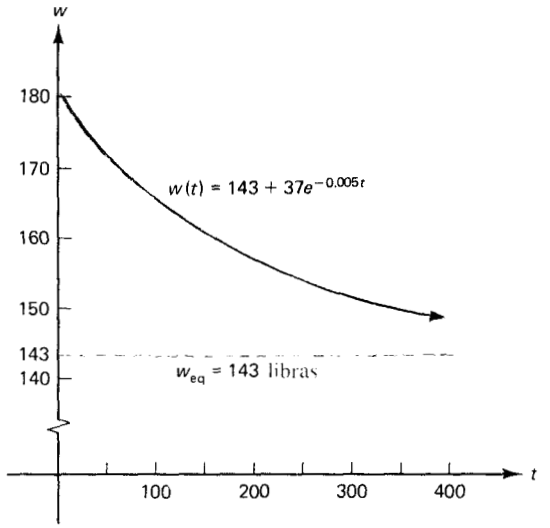


FIGURA 16.8

Ahora, la ecuación diferencial que modela la ganancia o pérdida de peso es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{3500}(C - 17.5w). \tag{1}$$

si C es constante, la ecuación es separable y su solución es

$$w(t) = \frac{C}{17.5} + \left(w_0 - \frac{C}{17.5}\right)e^{-0.005t}, \tag{2}$$

en donde w_0 es el peso inicial y t está en días. Obsérvese que, a largo plazo, el peso de equilibrio (es decir, el peso cuando $t \to \infty$ es $w_{eq} = C/17.5$.

Por ejemplo, si alguien que pesea inicialmente 180 lb adopta una dieta de 2500 Cal por día, entonces $w_{eq} = 2500/17.5 \approx 143$ lb y la función de peso es

$$w(t) \approx 143 + (180 - 143)e^{-0.005t} = 143 + 37e^{-0.005t}$$

En la Figura 16.8 se muestra la gráfica $w(t)$. Obsérvese cuánto tiempo se requiere para apenas acercarse al peso de equilibrio de 143 lb. La semivida del proceso es $(\ln 2)/0.005 \approx 138.6$ días o, aproximadamente 20 semanas. (Se requeriría aproximadamente 584 días, u 83 semanas, para llegar a 145 libras.) Es quizá por esto que muchas personas que se someten a dietas las abandonan frustrados.

EJERCICIOS

1. Si una persona que pesa 200 lb adopta una dieta de 2000 Cal por día, determine —redondeando a enteros—, el peso de equilibrio w_{eq}. Redondeando a días, ¿después de cuántos días alcanzará esta persona un peso de 175 lb?

2. Demuestre que la solución de la Ec. (1) está dada por la Ec. (2)

3. El peso de una persona sometida a una dieta de contenido calórico restringido está dado, al tiempo t, por $w(t)$ [véase la Ec. (2)]. La diferencia entre este peso y el peso de equilibrio w_{eq} es $w(t) - w_{eq}$. Supóngase que se requieren d días para que la persona pierda la mitad de esta diferencia de peso. Entonces

$$w(t + d) = w(t) - \tfrac{1}{2}[w(t) - w_{eq}].$$

Despejando d en esta ecuación, demuestre que

$$d = \frac{\ln 2}{0.005}.$$

CAPÍTULO **17**

Cálculo en varias variables

17.1 Funciones de varias variables

Supóngase que un fabricante produce dos artículos, X y Y. En este caso, el costo total depende de los niveles de producción *tanto* de X *como* de Y. La Tabla 17.1 señala cuál es el costo total a diversos niveles. Por ejemplo, cuando se fabrican 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total c es 17. En esta situación parece natural asociar el número 17 al *par ordenado* (5, 6):

$$(5, 6) \rightarrow 17.$$

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X que se producen, en tanto que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades de Y que se fabrican. Correspondiendo a las otras situaciones de producción, se tiene

$$(5, 7) \rightarrow 19,$$

$$(6, 6) \rightarrow 18,$$

y $$(6, 7) \rightarrow 20.$$

Puede considerarse que esta correspondencia es una relación de entrada-salida, en donde las entradas son pares ordenados. A cada entrada se asocia exactamente una salida. Por ello la correspondencia define una función f en la que

el dominio está formado por (5, 6), (5, 7), (6, 6), (6, 7),

y el contradominio o ámbito consiste en 17, 19, 18, 20.

TABLA 17.1

Cant. de unids. de X fabricadas, x	Cant. de unids. de Y fabricadas, y	Costo total de producción, c
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

En notación funcional,

$$f(5, 6) = 17, \quad f(5, 7) = 19,$$

$$f(6, 6) = 18, \quad f(6, 7) = 20.$$

Se dice que el programa de costos totales puede describirse mediante $c = f(x, y)$, que es una función de las dos variables independientes x y y. La letra c es la variable dependiente.

Pasando a otra función de dos variables, se observa que la ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a z como función de x y y:

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

El dominio de f es todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación tiene significado cuando se sustituyen el primero y el segundo elementos de (x, y) en lugar de x y y, respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de f es todos los pares ordenados excepto (0, 0). Para hallar $f(2, 3)$, por ejemplo, se sustituye $x = 2$ y $y = 3$ en $2/(x^2 + y^2)$. De aquí que $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$.

EJEMPLO 1

a. $f(x, y) = \dfrac{x + 3}{y - 2}$ es una función de dos variables. Como el denominador es 0 cuando $y = 2$, el dominio de f es todos los (x, y) tales que $y \neq 2$. Algunos valores de la función son

$$f(0, 3) = \frac{0 + 3}{3 - 2} = 3,$$

$$f(3, 0) = \frac{3 + 3}{0 - 2} = -3.$$

Obsérvese que $f(0, 3) \neq f(3, 0)$.

b. $h(x, y) = 4x$ define a h como función de x y y. El dominio es todos los pares ordenados de números reales. Algunos valores de función son

$$h(2, 5) = 4(2) = 8,$$

$$h(2, 6) = 4(2) = 8.$$

Obsérvese que los valores de la función son independientes de la y que se elige.

c. Si $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 3$ y $y = 4$ entonces $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, $z = \pm 5$. Por lo tanto, *no es posible* asociar al par ordenado (3, 4) exactamente un número de salida. Por consiguiente, z *no* es una función de x y y.

EJEMPLO 2

En los días húmedos y calientes muchas personas tienden a sentirse incómodas. El grado de incomodidad está numéricamente dado por el índice de temperatura y humedad, ITH, *que es función de dos variables,* t_d *y* t_w:

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w).$$

en donde t_d es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit) y t_w es la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evaluar el ITH *cuando* $t_d = 90$ *y* $t_w = 80$.

Se desea encontrar $f(90, 80)$.

$$f(90, 80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83.$$

Cuando el ITH es mayor que 75 la mayor parte de las personas se sienten incómodas. De hecho alguna vez se denominó al ITH "índice de incomodidad". Muchas compañías siguen de cerca este índice para que les permita anticipar la demanda de aire acondicionado sobre sus sistemas.

Si $y = f(x)$ es función de una variable, el dominio de f se puede representar geométricamente mediante puntos en la recta de los números reales. La función misma puede representarse mediante su gráfica en un plano coordenado, al que en ocasiones se denomina sistema coordenado bidimensional. Sin embargo, para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, su dominio (que consiste en pares ordenados de números reales) se puede representar en forma geométrica mediante una *región* del plano. La función misma puede representarse geométricamente en un **sistema coordenado tridimensional**. Un sistema como éste se forma con tres rectas de números reales perpendiculares entre sí en el espacio que se intersecan en el origen de cada recta, como se muestra en la Figura 17.1. A las tres rectas se les denomina ejes x, y, z, y su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema.

A cada punto P del espacio se le puede asignar una tríada ordenada y única de números que se conocen como *coordenadas* de P. Para hacer esto [véase la Figura 17.2(a)], a partir de P se traza una recta perpendicular al plano x, y, es decir, al plano determinado por los ejes x y y. Aquí, Q es el punto en donde la recta corta este plano. A partir de Q se trazan rectas perpendiculares a los ejes x y y. Estas rectas intersecan a los ejes x y y en x_0 y y_0, respectivamente. A partir de P se lleva una perpendicular al eje z que la corta en z_0. Consecuentemente a P se le asigna la tríada ordenada (x_0, y_0, z_0). Debe resultar evidente que a cada tríada ordenada de números se le puede asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia de uno a uno entre los puntos del espacio y las tríadas ordenadas, a una tríada ordenada puede denominár-

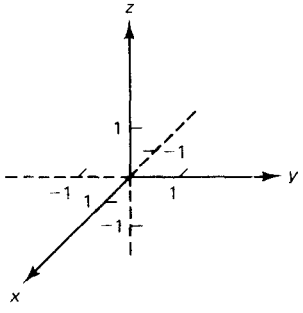
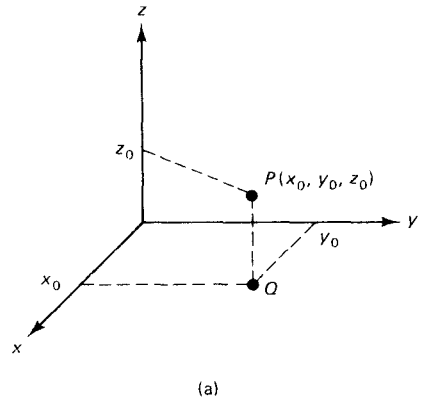
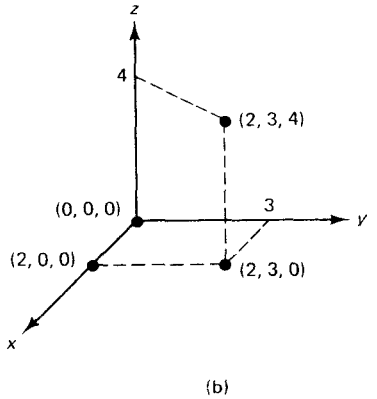


FIGURA 17.1



(a)



(b)

FIGURA 17.2

sele punto. En la Figura 17.2(b) se muestran los puntos (2, 0, 0), (2, 3, 0) y (2, 3, 4). Adviértase que el origen corresponde a (0, 0, 0).

Es posible representar geométricamente una función de dos variables, $z = f(x, y)$. A cada par ordenado (x, y) del dominio f se le asigna el punto $(x, y, f(x, y))$. El conjunto de todos estos puntos recibe el nombre de *gráfica* de f. Una gráfica como ésta aparece en la Figura 17.3. Puede considerarse que $z = f(x, y)$ representa una superficie en el espacio.*

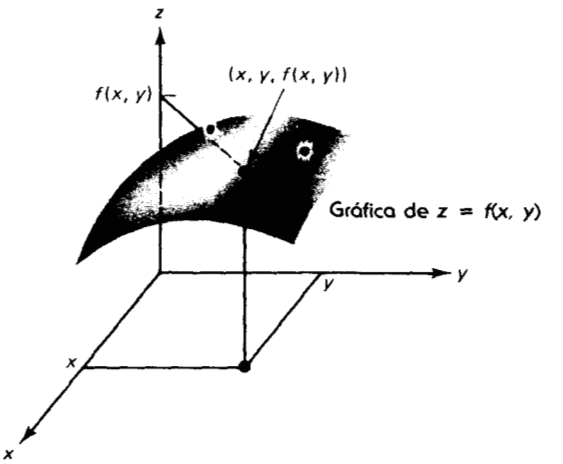


FIGURA 17.3

En el Capítulo 10 se analizó la continuidad de una función de una variable. Si $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces los valores de función de los puntos que están cerca de x_0 estarán cercanos a $f(x_0)$. Ampliando este concepto a una función con dos variables, se dice que la función $z = f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) cuando los valores de función de los puntos cercanos a (x_0, y_0) están cercanos a $f(x_0, y_0)$. Interpretando esto libremente y sin profundizar mucho en el concepto, se puede decir que una función con dos variables es continua en su dominio (es decir, continua en todos los puntos de su dominio) si su gráfica es una "superficie ininterrumpida".

Hasta ahora se han considerado funciones de una o dos variables. En general, una **función de *n* variables** es aquélla cuyo dominio está formado por n-adas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ es una función de tres variables y su dominio está formado por tríadas ordenadas. La función $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$ es una función de cuatro variables y su dominio está formado por tétradas ordenadas. Aunque las funciones de varias variables son muy importantes y útiles, no es posible representar geométricamente funciones con más de dos variables.

Enseguida se presenta un breve análisis de la graficación de superficies en el espacio. Se comienza con planos que son paralelos a un plano coordenado. Por "plano coordenado" se quiere señalar un plano que tiene dos ejes coordenados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes x y y es el **plano *x*, *y***. De manera similar se habla del **plano *x*, *z*** y el **plano *y*, *z***. Los planos coordenados dividen el espacio en ocho partes, denominadas *octantes*. En particular, la parte que contiene a todos los puntos (x, y, z) en donde x, y y z son positivas, se llama **primer octante**.

* Se hará uso en forma libre del término "superficie" en el sentido intuitivo.

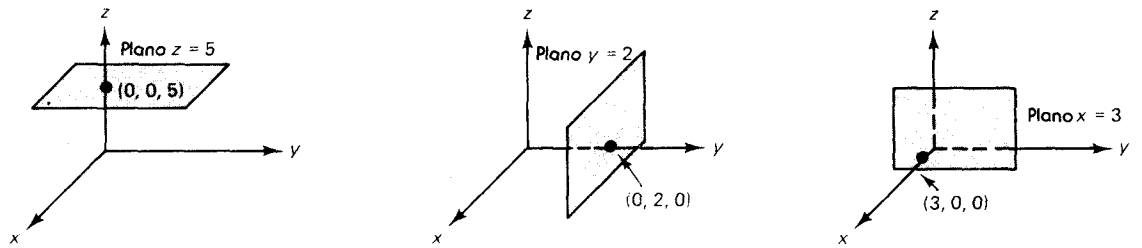


FIGURA 17.4

Supóngase que S es un plano paralelo al plano x, y y que pasa por el punto (0, 0, 5) [véase la Figura 17.4(a)]. En este caso, el punto (x, y, z) queda en S si y sólo si $z = 5$; es decir, x y y pueden ser cualesquiera números reales, pero z debe ser igual a 5. Por esta razón, se dice que $z = 5$ es una ecuación de S. De modo semejante, una ecuación del plano paralelo al plano x,z y que pasa por el punto (0, 2, 0) es $y = 2$ [Figura 17.4(b)]. La ecuación $x = 3$ es una ecuación del plano que pasa por (3, 0, 0) y es paralelo al plano y, z [Figura 17.4(c)]. Ahora, se considerarán los planos en general.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

en donde D es una constante y A, B y C son constantes todas ellas diferentes de cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos los cuales quedan en la misma recta) determinan un plano, una forma conveniente de trazar un plano consiste primero en encontrar los puntos, si es que existen, en donde ese plano corta a los ejes x, y o z. A estos puntos se les conoce como *intersecciones con los ejes*.

EJEMPLO 3

Trazar el plano $2x + 3y + z = 6$.

El plano corta el eje x cuando $y = 0$ y $z = 0$. Por ello, $2x = 6$, que da $x = 3$. Análogamente, si $x = z = 0$, entonces $y = 2$; si $x = y = 0$, entonces $z = 6$. Así, las intercepcio-

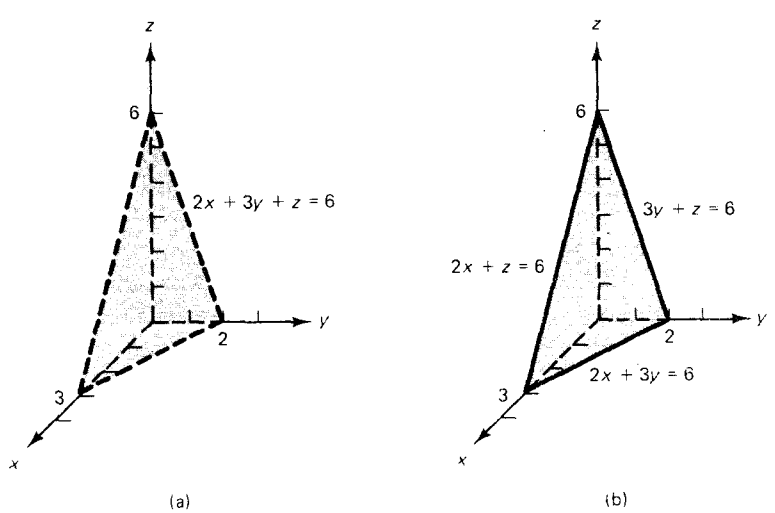


FIGURA 17.5

nes son (3, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 6). Después de trazar estos puntos, se pasa un plano a través de ellos. La porción del plano del primer octante está en la Figura 17.5(a); sin embargo, es importante darse cuenta de que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

Se puede esquematizar una superficie con auxilio de sus **trazas**. Éstas son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. Para el plano $2x + 3y + z = 6$ del Ejemplo 3, la traza en el plano x, y se obtiene haciendo $z = 0$. Esto da $2x + 3y = 6$, que es una ecuación de una *recta* del plano x, y. De manera similar, tomando $x = 0$ se obtiene la traza en el plano y, z: la recta $3y + z = 6$. La traza en x, z es la recta $2x + z = 6$ [véase la Figura 17.5(b)].

EJEMPLO 4

Trazar la superficie $2x + z = 4$.

Esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones con los ejes x y z son (2, 0, 0) y (0, 0, 4), y no existe intersección con y puesto que x y z no pueden ser ambas 0. Tomando $y = 0$ se obtiene la traza en x, z, $2x + z = 4$, que es una recta del plano x, z. De hecho, la intersección de la superficie con *cualquier* plano $y = k$ es también $2x + z = 4$. En consecuencia, el plano es como el que aparece en la Figura 17.6.

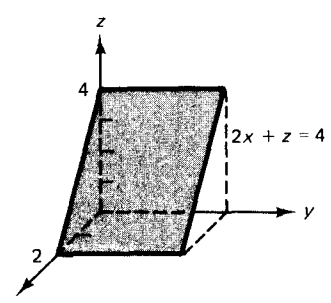


FIGURA 17.6

Los ejemplos finales se refieren a superficies que no son planos pero cuyas gráficas se pueden obtener con facilidad.

EJEMPLO 5

Trazar la superficie $z = x^2$.

La traza en x, z es la curva $z = x^2$, que es una parábola. De hecho, para *cualquier* valor fijo de y se obtiene $z = x^2$. Por ello, la gráfica es como la que aparece en la Figura 17.7.

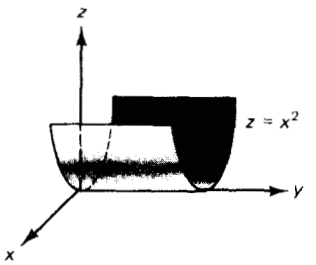


FIGURA 17.7

EJEMPLO 6

Trazar la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Haciendo $z = 0$ resulta la traza en x, y, $x^2 + y^2 = 25$, que es una circunferencia de radio 5. De manera similar, las trazas en y, z y en x, z son las circunferencias $y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$, respectivamente. Se debe observar también que como $x^2 + y^2 = 25 - z^2$, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, en donde $-5 \leq k \leq 5$, es una circunferencia. Por ejemplo, si $z = 3$, la intersección es la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Si $z = 4$, la intersección es $x^2 + y^2 = 9$. Es decir, las secciones de la superficie que son paralelas al plano x, y son circunferencias. En la Figura 17.8 aparece una porción de la superficie. La superficie completa es una esfera.

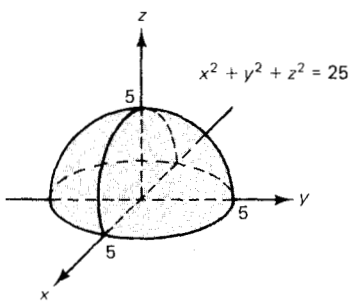


FIGURA 17.8

EJERCICIOS 17.1

En los Problemas **1-12**, *establezca los valores funcionales que se indican para las funciones dadas.*

1. $f(x, y) = 4x - y^2 + 3$; $f(2, 1)$.

2. $f(x, y) = 3xy^2 - 4y$; $f(1, -2)$.

3. $g(x, y, z) = e^x(2y + 3z)$; $g(0, -1, 2)$.

4. $g(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2$; $g(1, -3, 2)$.

5. $h(r, s, t, u) = \dfrac{rs}{t^2 - u^2}$; $h(-3, 3, 5, 4)$.

6. $h(r, s, t, u) = \ln(ru)$; $h(1, 5, 3, 1)$.

7. $g(p_A, p_B) = 2p_A(p_A^2 - 5)$; $g(4, 8)$.

8. $g(p_A, p_B) = p_A\sqrt{p_B} + 10$; $g(8, 4)$.

9. $F(x, y, z) = 3$; $F(2, 0, -1)$.

10. $F(x, y, z) = \dfrac{x}{yz}$; $F(0, 0, 3)$.

11. $f(x, y) = 2x - 5y + 4$; $f(x_0 + h, y_0)$.

12. $f(x, y) = x^2y - 3y^3$; $f(r + t, r)$.

13. Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones animales en una área dada implica en primer lugar marcar a todos los animales obtenidos en una muestra de R animales del área, y después liberarlos para que se puedan mezclar con los animales no marcados. En una fecha posterior se obtiene una muestra de M animales y se anota el número de éstos que están marcados con S. Con base en R, M y S, una estimación de la población total de animales, N, en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}.$$

Hallar $f(400, 400, 80)$. Este método recibe el nombre de *procedimiento de marca y recaptura.**

14. En ciertas condiciones, si dos padres con ojos castaños tienen exactamente k niños, la probabilidad $P = P(r, k)$ de que haya exactamente r niños con ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k!(\frac{1}{4})^r(\frac{3}{4})^{k-r}}{r!(k - r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Evaluar la probabilidad de que de un total de cuatro niños haya exactamente tres con ojos azules.

En los Problemas **15-18,** *halle ecuaciones de los planos que satisfagan las condiciones dadas.*

15. Paralelo al plano x, z y pasa por el punto $(0, -4, 0)$.

16. Paralelo al plano y, z y pasa por el punto $(8, 0, 0)$.

17. Paralelo al plano x, y y pasa por el punto $(2, 7, 6)$.

18. Paralelo al plano y, z y pasa por el punto $(-4, -2, 7)$.

En los Problemas **19-28,** *trace las superficies dadas.*

19. $x + y + z = 1$.

20. $2x + y + 2z = 6$.

21. $3x + 6y + 2z = 12$.

22. $x + 2y + 3z = 4$.

23. $x + 2y = 2$.

24. $y + z = 1$.

25. $z = 4 - x^2$.

26. $y = x^2$.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

28. $x^2 + y^2 = 1$.

17.2 Derivadas parciales

En la Figura 17.9 se muestra la superficie $z = f(x, y)$ y un plano que es paralelo al plano x, z y que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la superficie. Una ecuación de este plano es $y = y_0$. Consecuentemente, cualquier punto de la curva que es intersección de la superficie con el plano debe tener la forma $(x, y_0, f(x, y_0))$. Por consiguiente, la curva puede describirse mediante $z = f(x, y_0)$. Ya que y_0 es una constante, se puede considerar que $z = f(x, y_0)$ es una función de una variable x. Cuando se evalúa la derivada de esta función en x_0, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (véase la Figura 17.9). A esta pendiente se le da el nombre de *derivada parcial de f con respecto a x* en (x_0, y_0) y se le denota por $f_x(x_0, y_0)$. En términos de límites,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{1}$$

* E.P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1966).

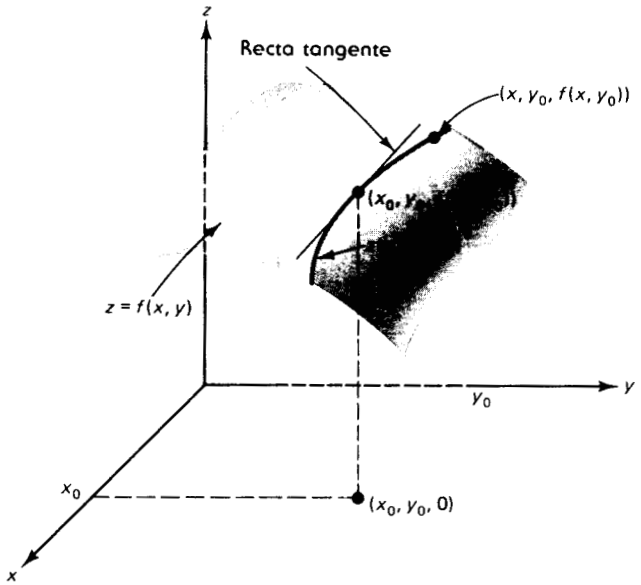


FIGURA 17.9

Por otro lado, en la Figura 17.10 el plano $x = x_0$ es paralelo al plano y, z y corta la superficie $z = f(x, y)$ de una curva dada por $z = f(x_0, y)$, que es función de y. Cuando se evalúa la derivada de esta función en y_0, se origina la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A esta pendiente se le llama *la*

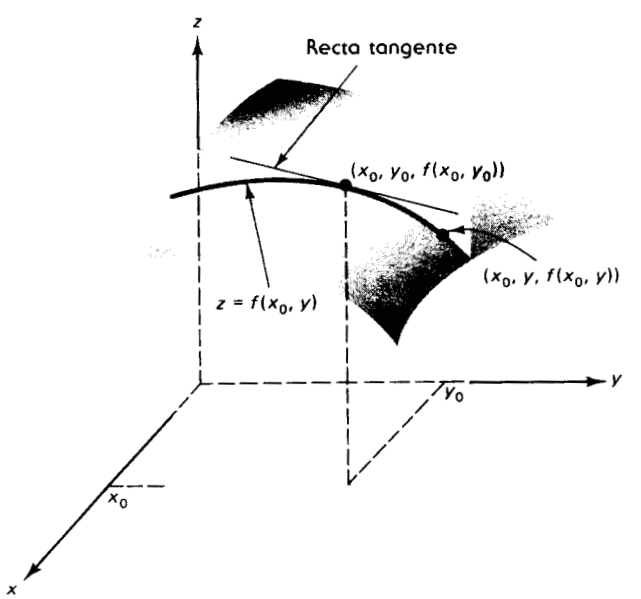


FIGURA 17.10

derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0) y se le denota por $f_y(x_0, y_0)$. En términos de límites,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{2}$$

En ocasiones se dice que $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *en la dirección de x*; de igual modo $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente *en la dirección de y*.

Para generalizar, reemplazando x_0 y y_0 en las Ecuaciones (1) y (2) por x y y, respectivamente, se obtiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Si $z = f(x, y)$ la ***derivada parcial de f con respecto a x, denotada por*** f_x, *es la función dada por*

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

suponiendo que existe este límite.
La derivada parcial de f con respecto a y, que se denota por f_y *es la función dada por*

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h},$$

suponiendo que existe este límite.

A partir de la definición se advierte que para encontrar f_x se considera a y como constante y se diferencia f con respecto a x en la forma usual. Análogamente, para hallar f_y, se considera a x como una constante y se diferencia f con respecto a y.

EJEMPLO 1

Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, *obtener* $f_x(x, y)$ *y* $f_y(x, y)$. *Determinar también* $f_x(3, 4)$ *y* $f_y(3, 4)$.

Para calcular $f_x(x, y)$, se considera a y como constante y se diferencia f con respecto a x:

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy.$$

Para evaluar $f_y(x, y)$, se toma a x como constante y se diferencia x con respecto a y.

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2.$$

Nótese que tanto $f_x(x, y)$ como $f_y(x, y)$ son funciones de dos variables, x y y. Para encontrar $f_x(3, 4)$, se evalúa $f_x(x, y)$ cuando $x = 3$ y $y = 4$.

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40.$$

De la misma manera,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33.$$

TABLA 17.2

Derivada parcial de f, (o bien z) respecto a x	Derivada parcial de f, (o bien z) respecto a y
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]$	$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$

En la Tabla 17.2 se muestran diferentes notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. En la Tabla 17.3 se incluyen notaciones para las derivadas parciales evaluadas en (x_0, y_0).

TABLA 17.3

Derivada parcial de f (o bien z) respecto a x evaluada en (x_0, y_0)	Derivada parcial de f o bien (z) respecto a y evaluada en (x_0, y_0)
$f_x(x_0, y_0)$	$f_y(x_0, y_0)$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(x_0, y_0)}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(x_0, y_0)}$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$

EJEMPLO 2

a. *Si* $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$, *hallar* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ y $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$

Para obtener $\partial z/\partial x$ se diferencia z con respecto a x al tiempo que se considera a y como constante:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(3x^2)y^3 - 9(2x)y + (1)y^2 + 0$$

$$= 9x^2y^3 - 18xy + y^2.$$

Evaluando en (1, 0), se genera

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 9(1)^2(0)^3 - 18(1)(0) + 0^2 = 0.$$

Para determinar $\partial z/\partial y$ se diferencia z con respecto a y al tiempo que se toma a x como constante:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4(1)$$

$$= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4.$$

De donde

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 9(1)^3(0)^2 - 9(1)^2 + 2(1)(0) + 4 = -5.$$

b. *Si* $w = x^2e^{2x+3y}$, *calcular* $\partial w/\partial x$ *y* $\partial w/\partial y$.

Para evaluar $\partial w/\partial x$, se considera y como constante y se diferencia con respecto a x. Dado que x^2e^{2x+3y} es un producto de dos funciones, cada una de las cuales implica a x, se usa la regla del producto.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2(2e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}(2x)\\ &= 2x(x+1)e^{2x+3y}.\end{aligned}$$

Para encontrar $\partial w/\partial y$, se toma a x como constante y se diferencia con respecto a y.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) = 3x^2e^{2x+3y}.$$

Se ha visto que para una función de dos variables pueden considerarse dos derivadas parciales. En realidad el concepto de derivadas parciales puede extenderse a funciones con más de dos variables. Por ejemplo, con $w = f(x, y, z)$, se tienen tres derivadas parciales:

la parcial con respecto a x, que se denota por $f_x(x, y, z)$, $\partial w/\partial x$, etc.;

la parcial con respecto a y, que se denota por $f_y(x, y, z)$, $\partial w/\partial y$, etc.;

y la parcial con respecto a z, que se denota por $f_z(x, y, z)$, $\partial w/\partial z$, etc.

Para determinar $\partial w/\partial x$, se toman a y y z como constantes y se diferencia w con respecto a x. Para $\partial w/\partial y$, se consideran a x y z como constantes y se diferencia con respecto a y. Para $\partial w/\partial z$, se considera a x y y como constantes y se diferencia con respecto a z. Con una función de n variables se tienen n derivadas parciales, que se establecen en una forma que debe resultar evidente.

EJEMPLO 3

a. *Si* $f(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$, *hallar* $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ *y* $f_z(x, y, z)$.

Para obtener $f_x(x, y, z)$, se toman a y y z como constantes y se diferencia f con respecto a x.

$$f_x(x, y, z) = 2x.$$

Considerando a x y z como constantes y diferenciando con respecto a y, resulta

$$f_y(x, y, z) = 2yz.$$

Considerando a x y y como constantes y diferenciando con respecto a z, se tiene

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 3z^2.$$

b. *Si* $p = g(r, s, t, u) = \dfrac{rsu}{rt^2 + s^2t}$, *calcular* $\dfrac{\partial p}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ *y* $\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)}$.

Para evaluar $\partial p/\partial s$, en primer lugar se observa que p es el cociente de dos funciones, cada una de las cuales implica a la variable s. Por ello, se aplica la regla del cociente y se toman a r, t y u como constantes.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{(rt^2 + s^2t)\dfrac{\partial}{\partial s}(rsu) - rsu\dfrac{\partial}{\partial s}(rt^2 + s^2t)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

$$= \frac{(rt^2 + s^2t)(ru) - (rsu)(2st)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Simplificando,

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ru(rt - s^2)}{t(rt + s^2)^2}.$$

Para encontrar $\partial p/\partial t$, es posible primero escribir p de la siguiente forma

$$p = rsu(rt^2 + s^2t)^{-1}.$$

Enseguida se emplea la regla de la potencia y se consideran a r, s y u como constantes.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rsu(-1)(rt^2 + s^2t)^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(rt^2 + s^2t)$$

$$= -rsu(rt^2 + s^2t)^{-2}(2rt + s^2).$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{rsu(2rt + s^2)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Tomando $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ y $u = 1$, se tiene que

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)} = -\frac{0(1)(1)[2(0)(1) + (1)^2]}{[0(1)^2 + (1)^2(1)]^2} = 0.$$

EJERCICIOS 17.2

En cada uno de los Problemas **1-26**, *se da una función de dos o más variables. Encontrar la derivada parcial con respecto a cada una de las variables.*

1. $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 6$.

2. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$

3. $f(x, y) = 2y + 1$

4. $f(x, y) = e$.

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 3xy + 4y$.

6. $g(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^3 + 5xy^3 - 2$.

7. $g(p, q) = \sqrt{pq}$.

8. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}$.

9. $h(s, t) = \dfrac{s^2 + 4}{t - 3}$.

10. $h(u, v) = \dfrac{4uv^2}{u^2 + v^2}$.

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2$.

12. $Q(l, k) = 3l^{0.41}k^{0.59}$.

13. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

14. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 4}}{x^2y + y^2x}$.

15. $z = e^{5xy}$.

16. $z = (x^2 + y)e^{3x + 4y}$.

17. $z = 5x \ln(x^2 + y)$.

18. $z = \ln(3x^2 + 4y^4)$.

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}(r^3 - 2rs + s^2)$.

20. $f(r, s) = \sqrt{rs}\, e^{2+r}$.

21. $f(r, s) = e^{3-r} \ln(7 - s)$.

22. $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s)$.

23. $g(x, y, z) = 3x^2y + 2xy^2z + 3z^3$.

24. $g(x, y, z) = x^2y^3z^5 - 3x^2y^4z^3 + 5xz$.

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$.

26. $g(r, s, t, u) = rs \ln(2t + 5u)$.

En los Problemas **27-32,** *evalúe las derivadas parciales dadas.*

27. $f(x, y) = x^3y + 7x^2y^2$; $f_x(1, -2)$.

28. $z = \sqrt{5x^2 + 3xy + 2y}$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0,\\ y=2}}$.

29. $g(x, y, z) = e^x\sqrt{y + 2z}$; $g_z(0, 1, 4)$.

30. $g(x, y, z) = \dfrac{3x^2 + 2y}{xy + xz}$; $g_y(1, 1, 1)$.

31. $h(r, s, t, u) = (s^2 + tu) \ln(2r + 7st)$; $h_s(1, 0, 0, 1)$.

32. $h(r, s, t, u) = \dfrac{7r + 3s^2u^2}{s}$; $h_t(4, 3, 2, 1)$.

33. En un análisis de la teoría de inventario de la demanda de dinero, Swanson* considera la función

$$F(b, C, T, i) = \frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que $\dfrac{\partial F}{\partial C} = -\dfrac{bT}{C^2} + \dfrac{i}{2}$. Verifique esta derivada parcial.

34. En un análisis de los precios de acciones de un ciclo de dividendos, Palmon y Yaari† consideran la función f dada por

$$u = f(t, r, z) = \frac{(1 + r)^{1-z} \ln(1 + r)}{(1 + r)^{1-z} - t},$$

en donde u es la tasa instantánea de aumento en el precio de venta, r es una tasa de rendimiento anual de oportunidad, z es la fracción de un ciclo de dividendos durante la cual un vendedor a medio ciclo conserva una acción de capital y t es la tasa efectiva de impuesto sobre ganancias del capital. Afirman que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{t(1 + r)^{1-z} \ln^2(1 + r)}{[(1 + r)^{1-z} - t]^2}.$$

Verifique esto.

35. En un análisis de la publicidad y de la redituabilidad, Swales‡ considera la función f dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a\dfrac{n - 1}{2}},$$

en donde R es la tasa de utilidades ajustada, r es la tasa de utilidades contable, a es una medida de los gastos de publicidad y n es el número de años en los que se deprecia totalmente la publicidad. En el análisis Swales determina $\partial R/\partial n$. Halle esta derivada parcial.

36. En un artículo sobre la disminución de la reglamentación sobre tasas de interés, Christofi y Agapos§ llegan a la ecuación

$$r_L = r + D\frac{\partial r}{\partial D} + \frac{dC}{dD}, \tag{3}$$

en donde r es el tipo de interés que pagan los bancos comerciales sobre los depósitos que reciben, r_L es la tasa que ganan los bancos comerciales, C es el costo administrativo en el que se incurre al transformar de-

* P.E. Swanson, "Integer Constaints on the Inventory Theory of Money Demand", *Quarterly Journal of Business and Economics*, 23, núm. 1 (1984), 32-37.

† D. Palmon y U. Yaari, "Taxation of Capital Gains and the Behavior of Stock Prices over the Dividend Cycle", *The American Economist*, XXVII, núm. 1 (1983), 13-22.

‡ J.K. Swales, "Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub", *Applied Economics*, 17, núm. 4 (1985), 603-17.

§ A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research*, XX (1984), 39-49.

pósitos en activos que rinden intereses y D es el nivel de los depósitos de ahorro.
Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r\left[\frac{1+\eta}{\eta}\right] + \frac{dC}{dD}, \qquad (4)$$

en donde η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de interés y está dada por $\eta = \frac{r/D}{\partial r/\partial D}$. Exprese la Ecuación (3) en términos de η para verificar la Ecuación (4).

17.3 Aplicaciones de las derivadas parciales

Supóngase que un fabricante elabora x unidades del producto X y y unidades del producto Y. En este caso, el costo total c de estas unidades es función de x y y y se le conoce como **función de costos conjuntos**. Si esa función es $c = f(x, y)$, entonces $\partial c/\partial x$ recibe el nombre de **costo marginal (parcial) con respecto a x**. Es la tasa de variación de c con respecto a x, cuando se mantiene a y fija. De manera similar, $\partial c/\partial y$ es el **costo marginal (parcial) con respecto a y**. Es la tasa de variación de c con respecto a y cuando se mantiene a x fija.

Por ejemplo, si c se expresa en dólares y $\partial c/\partial y = 2$, entonces el costo de fabricar una unidad extra de Y cuando el nivel de producción de X es fijo es de aproximadamente de dos dólares.

Si un fabricante elabora n productos, la función de costos conjuntos es una función de n variables y existen n funciones de costos marginales (parciales).

EJEMPLO 1

Una compañía fabrica dos tipos de esquíes, los modelos Relámpago y Alpino. Supóngase que la función de costos conjuntos de fabricar x pares del modelo Relámpago y y pares del modelo Alpino a la semana es

$$c = f(x, y) = 0.06x^2 + 65x + 75y + 1000$$

en donde c se expresa en dólares. Calcular los costos marginales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ cuando $x = 100$ y $y = 50$ e interpretar los resultados.

Los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.12x + 65 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial c}{\partial y} = 75.$$

Así,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100,50)} = 0.12(100) + 65 = 77 \qquad (1)$$

y

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100,50)} = 75. \qquad (2)$$

La Ecuación (1) significa que aumentando la producción del modelo Relámpago de 100 a 101 al tiempo que se mantiene en 50 la producción del modelo Alpino, produce un aumento en costos de aproximadamente \$77. La Ecuación (2) significa que aumentar

la producción del modelo Alpino de 50 a 51 y manteniendo en 100 la producción del modelo Relámpago produce un aumento de costos de aproximadamente \$75. De hecho, dado que $\partial c/\partial y$ es una función constante, el costo marginal con respecto a y es \$75 a cualquier nivel de producción.

EJEMPLO 2

En un día gélido, una persona puede sentir más frío cuando hay viento que cuando no lo hay, porque la tasa de pérdida de calor es función tanto de la temperatura como de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

*señala la tasa de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado y por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados Celsius) y la velocidad del aire es w (en metros por segundo). Para H = 2000, la carne al descubierto se congelaría en un minuto.**

a. *Evaluar H cuando $t = 4$ y $w = 4$.*

b. *Evaluar $\partial H/\partial w$ y $\partial H/\partial t$ cuando $t = 0$ y $w = 4$, e interpretar los resultados.*

c. *Cuando $t = 0$ y $w = 4$, ¿qué ocasiona un mayor efecto sobre H: un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s, o un cambio en la temperatura de 1°C?*

a. Cuando $t = 0$ y $w = 4$, entonces

$$H = (10.45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 872.85.$$

b. $\dfrac{\partial H}{\partial w} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t), \qquad \left.\dfrac{\partial H}{\partial w}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = 49.5;$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(-1), \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = -26.45.$$

Esto significa que cuando $t = 0$ y $w = 4$, entonces aumentar w en una cantidad pequeña, al tiempo que se mantiene t fija, hace que H crezca en aproximadamente 49.5 veces la magnitud en el aumento de w. Incrementando t en una cantidad pequeña, al tiempo que se mantiene w fija, hace que H *disminuya* aproximadamente en 26.45 veces el incremento en t.

c. Como la derivada parcial de H con respecto a w es de mayor magnitud que la derivada parcial con respecto a t cuando $t = 0$ y $w = 4$, un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s tiene un mayor efecto sobre H.

La elaboración de un artículo depende de muchos factores de producción. Entre éstos se encuentra mano de obra, capital, terreno, maquinaria, etcétera. Supóngase, por sencillez, que la producción depende sólo de la mano de obra y del capital. Si la función $P = f(l, k)$ da la producción P cuando el fabricante utiliza l unidades de mano de obra y k unidades de capital, entonces a esta función se le denomina **función de pro-**

* G.E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, 2a ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974).

ducción. Se define la **productividad marginal con respecto a** l como $\partial P/\partial l$. Ésta es la tasa de variación de P con respecto a l cuando se conserva k fija. De la misma manera, la **productividad marginal con respecto a** k es $\partial P/\partial k$. Ésta es la tasa de variación de P con respecto a k cuando l se mantiene fija.

EJEMPLO 3

El fabricante de un juguete popular ha establecido que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$ *, en donde* l *es el número de horas de mano de obra a la semana y* k *es el capital (expresado en centenares de dólares a la semana) que se requieren para la producción semanal de* P *gruesas del juguete (una gruesa son 144 unidades). Hallar las funciones de productividad marginal y evaluarlas cuando* $l = 400$ *y* $k = 16$. *Interpretar los resultados.*

Ya que $P = (lk)^{1/2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}k = \frac{k}{2\sqrt{lk}}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}l = \frac{l}{2\sqrt{lk}}.$$

Evaluando cuando $l = 400$ y $k = 16$, se obtiene

$$\left.\frac{\partial P}{\partial l}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{16}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{1}{10}$$

y

$$\left.\frac{\partial P}{\partial k}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{400}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{5}{2}.$$

En consecuencia, si $l = 400$ y $k = 16$, aumentar l a 401 y mantener k en 16 origina un aumento en la producción de alrededor $\frac{1}{10}$ de gruesa. Pero si k se aumenta a 17, al tiempo que se mantiene l en 400, la producción aumenta en aproximadamente $\frac{5}{2}$ de gruesa.

En ocasiones puede existir una relación entre dos productos de manera que los cambios en el precio de uno de ellos afecten la demanda del otro. Un ejemplo típico es el de la margarina y la mantequilla. Si existe una relación como éstas entre los productos A y B, entonces la demanda de cada producto depende de los precios de ambos. Supóngase que q_A y q_B son las cantidades de demanda para A y B, y que p_A y p_B son sus precios respectivos. Entonces, tanto q_A como q_B son funciones de p_A y p_B:

$$q_A = f(p_A, p_B), \quad \text{función de demanda para A}$$

$$q_B = g(p_A, p_B), \quad \text{función de demanda para B.}$$

Es posible encontrar cuatro derivadas parciales:

$\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A}$, *la demanda marginal de* A *con respecto a* p_A;

$\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}$, *la demanda marginal de* A *con respecto a* p_B;

$\dfrac{\partial q_B}{\partial p_A}$, *la demanda marginal para* B *con respecto a* p_A;

$\dfrac{\partial q_B}{\partial p_B}$, *la demanda marginal para* B *con respecto a* p_B.

En condiciones típicas, si el precio de B es fijo y el precio de A aumenta, entonces disminuye la cantidad de A que se demanda. Por lo tanto, $\partial q_A/\partial p_A < 0$. De igual modo, $\partial q_B/\partial p_B < 0$. Sin embargo, $\partial q_A/\partial p_B$ y $\partial q_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas. Si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0,$$

entonces se dice que A y B son **productos competitivos** o **sustitutos**. En esta situación, un aumento en el precio de B ocasiona un aumento en la demanda de A, si se supone que el precio de A no cambia. De la misma manera, un aumento en el precio de A ocasiona un aumento en la demanda de B cuando el precio de B se mantiene fijo. La margarina y la mantequilla son ejemplos de sustitutos.

Siguiendo con una situación diferente, se dice que si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0,$$

entonces A y B son **productos complementarios**. En este caso un aumento en el precio de B ocasiona una disminución en la demanda de A, si el precio de A no cambia. Análogamente, un aumento en el precio de A ocasiona una disminución en la demanda de B, cuando se mantiene fijo el precio de B. Por ejemplo, las cámaras y la película fotográfica son productos complementarios. Un aumento en el precio de la película hace que resulte más costoso tomar fotografías. Por consiguiente, disminuye la demanda de cámaras.

EJEMPLO 4

Las funciones de demanda de los productos A *y* B *dependen de sus precios y están dadas por*

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}},$$

respectivamente. Hallar las cuatro funciones de demanda marginal y determinar también si A *y* B *son productos competitivos, complementarios, o no tienen ninguna de esas relaciones.*

Expresando $q_A = 50p_A^{-1/2}p_B^{1/3}$ y $q_B = 75p_Ap_B^{-2/3}$, se tiene

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = 50\left(-\frac{1}{2}\right)p_A^{-3/2}p_B^{1/3} = -25p_A^{-3/2}p_B^{1/3},$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 50p_A^{-1/2}\left(\frac{1}{3}\right)p_B^{-2/3} = \frac{50}{3}p_A^{-1/2}p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 75(1)p_B^{-2/3} = 75p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = 75p_A\left(-\frac{2}{3}\right)p_B^{-5/3} = -50p_A p_B^{-5/3}.$$

Puesto que p_A y p_B representan precios, ambos son positivos. Consecuentemente, $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$. Se concluye que A y B son productos competitivos.

EJERCICIOS 17.3

Para las funciones de costos conjuntos en los Problemas **1-3**, *obtenga el costo marginal que se señala al nivel de producción dado.*

1. $c = 4x + 0.3y^2 + 2y + 500$; $\dfrac{\partial c}{\partial y}$, $x = 20$, $y = 30$.

2. $c = x\sqrt{x + y} + 1000$; $\dfrac{\partial c}{\partial x}$, $x = 40$, $y = 60$.

3. $c = 0.03(x + y)^3 - 0.6(x + y)^2 + 4.5(x + y) + 7700$; $\dfrac{\partial c}{\partial x}$, $x = 50$, $y = 50$.

Para las funciones de producción de los Problemas **4** *y* **5**, *determine las funciones de producción marginal* $\partial P/\partial k$ *y* $\partial P/\partial l$.

4. $P = 20lk - 2l^2 - 4k^2 + 800$.

5. $P = 1.582l^{0.192}k^{0.764}$.

6. Una función de producción Cobb-Douglas es una de la forma $P = Al^{\alpha}k^{\beta}$, en donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para una función como ésta, demuestre que

a. $\partial P/\partial l = \alpha P/l$.

b. $\partial P/\partial k = \beta P/k$.

c. $l\dfrac{\partial P}{\partial l} + k\dfrac{\partial P}{\partial k} = P$. Esto significa que sumar los productos de la productividad marginal de cada factor y la cantidad de ese factor da como resultado el producto total P.

En los Problemas **7-9**, q_A *y* q_B *son funciones de demanda para los productos* A *y* B, *respectivamente. En cada caso determine* $\partial q_A/\partial p_A$, $\partial q_A/\partial p_B$, $\partial q_B/\partial p_A$, $\partial q_B/\partial p_B$ *y si* A *y* B *son competitivos, complementarios, o de ninguna de las dos clases.*

7. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$.

8. $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$.

9. $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$.

10. La función de producción para las industrias canadienses de manufactura en 1927 se estimó en* $P = 33.0l^{0.46}k^{0.52}$, en donde P es producto, l es mano de obra y k es capital. Calcule las productividades marginales para la mano de obra y el capital y evalúelas cuando $l = 1$ y $k = 1$.

11. Una estimación de la función de producción para los productos lácteos en Iowa (1939) está dada por†

$$P = A^{0.27}B^{0.01}C^{-0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27},$$

en donde P es producto, A es terreno, B es mano de obra, C es mejoramientos, D es activos líquidos, E es activos de trabajo y F es gastos de operación en efectivo. Halle las productividades marginales para la mano de obra y los mejoramientos.

* P. Daly y P. Douglas. "The Production Function for Canadian Manufactures", *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943), 178-86.

† G. Tintner y O.H. Brownlee. "Production Functions Derived from Farm Records", *American Journal of Agricultural Economics*, 26 (1944), 566-71.

12. Se considera que el *status* general de una persona, S_g es función del *status* atribuible a la educación, S_e y del *status* atribuible al ingreso, S_i, en donde S_g, S_e y S_i se representan numéricamente. Si $S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i}$, determine $\partial S_g/\partial S_e$ y $\partial S_g/\partial S_i$ cuando $S_e = 125$ y $S_i = 100$, e interprete los resultados.‡

13. En un estudio del éxito de los graduados en la maestría en administración de empresas (M.B.A.), se estimó que para el personal de nivel medio (que incluye contadores, analistas, etc.) la compensación actual anual en dólares, z, estaba dada por

$$z = 10{,}990 + 1120x + 873y,$$

en donde x y y son el número de años de experiencia de trabajo antes y después de recibir el grado de maestría, respectivamente.§ Obtenga $\partial z/\partial x$ e interprete los resultados.

14. El estudio de la frecuencia de las vibraciones de una cuerda tirante es útil al considerar cosas como la voz de una persona. Supóngase que

$$\omega = \frac{1}{bL}\sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}},$$

en donde ω (la letra griega "omega") es la frecuencia, b es el diámetro, L es la longitud, ρ (la letra griega "ro") es densidad y τ (la letra griega "tau") es tensión.* Halle $\partial\omega/\partial b$, $\partial\omega/\partial L$, $\partial\omega/\partial\rho$ y $\partial\omega/\partial\tau$.

15. En ocasiones se desea evaluar el grado de legibilidad de algún escrito. Rudolf Flesch† desarrolló una función de dos variables para esto:

$$R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s),$$

en donde a R se le denomina *calificación de facilidad de lectura*, w es el número de promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras y s es el número promedio de sílabas en esas muestras. Flesch dice que un artículo para el cual $R = 0$ es "prácticamente ilegible", pero uno con $R = 100$ es "fácil para cualquier persona que sepa leer". (a) Determine $\partial R/\partial w$ y $\partial R/\partial s$. (b) ¿Qué es más "fácil" de leer: un artículo para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$ o uno para el cual $w = w_0 + 1$ y $s = s_0$?

16. Considérese la siguiente situación de circulación de vehículos. En una carretera en la que existen dos carriles en el mismo sentido, hay un vehículo de mantenimiento que bloquea el carril del lado izquierdo (véase la Figura 17.11). En el carril del lado derecho hay dos vehículos (el *delantero* y el *trasero*), separados una cierta distancia. El vehículo *sujeto* puede decidir pasarse o no pasarse a ese espacio. Tal decisión se puede basar no sólo en la distancia x que se muestra en el diagrama, sino también en otros factores (como la velocidad del vehículo *trasero*). Para analizar este tipo de decisiones se ha utilizado un *índice de espacio* g.‖‡ Conforme mayor es el valor de g, mayor es la propensión para que el vehículo *sujeto* ocupe el espacio. Supóngase

$$g = \frac{x}{V_F} - \left(0.75 + \frac{V_F - V_S}{19.2}\right),$$

en donde x (en pies) es la distancia indicada, V_F es la velocidad del vehículo *trasero* (en pies por segundo) y V_S es la velocidad del vehículo *sujeto* (en pies por segundo). En el diagrama parecería razonable que si tanto V_F como V_S son fijas y x aumenta, entonces debería aumentar g. Probar que esto es cierto aplicando el Cálculo a la función g dada antes. Supóngase que x, V_F, y V_S son positivas.

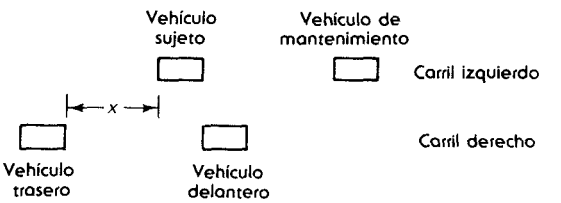


FIGURA 17.11

17. Para las elecciones del Congreso en 1974 el porcentaje republicano, R de los votos republicanos y

‡ Adaptado de R.K. Leik y B.F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975).

§ A.G. Weinstein y V. Srinivasen. "Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates", *Journal of Applied Psychology*, 59, núm. 2 (1974), 207-12.

* R.M. Thrall, J.A. Mortimer, K.R. Rebman, y R.F. Baum, eds., *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev., Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la University of Michigan, 1967.

† R. Flesch, *The Art of Readable Writing* (Nueva York: Harper & Row Publishers, Inc., 1949).

‖ P.M. Hurst, K. Perchonok y E.L. Seguin, "Vehicle Kinematics and Gap Acceptance", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 4 (1968), 321-24.

‡ K. Perchonok y P.M. Hurst, "Effect of Lane-Closure Signals upon Driver Decision Making and Traffic Flow", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 5 (1968), 410-13.

demócratas en un distrito está dado (aproximadamente) por§

$$R = f(E_r, E_d, I_r, I_d, N)$$
$$= 15.4725 + 2.5945E_r - 0.0804E_r^2 - 2.3648E_d + 0.0687E_d^2 + 2.1914I_r - 0.0912I_r^2 - 0.8096I_d + 0.0081I_d^2 - 0.0277E_rI_r + 0.0493E_dI_d + 0.8579N - 0.0061N^2.$$

Aquí, E_r y E_d son los gastos de campaña, (en unidades de \$10,000) realizados por los republicanos y los demócratas, respectivamente; I_r y I_d son el número de periodos en los que se ha estado en el Congreso *más* uno, para los candidatos republicanos y demócratas, respectivamente; y N es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon recibió en el distrito en 1968. La variable N da una medida de la fortaleza de los republicanos en el distrito.

a. En la Ley de las Campañas para Elecciones Federales de 1974, el Congreso fijó un límite de \$188,000 para los gastos de campaña. Analizando $\partial R/\partial E_r$, ¿le hubiera usted aconsejado a un candidato republicano que había ocupado un escaño en el Congreso durante nueve periodos que gastara \$188,000 en su campaña?

b. Calcule el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon hubiera tenido un efecto negativo en R; es decir, determine el punto en el que $\partial R/\partial N < 0$. Proporcione la respuesta al porcentaje más cercano.

Sea f una función de demanda para un producto A y $q_A = f(p_A, p_B)$, en donde q_A es la cantidad de A que se demanda cuando el precio por unidad de A es p_A y el precio por unidad del producto B es p_B. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_A que se denota por η_{p_A}, se define como $\eta_{p_A} = (p_A/q_A)(\partial q_A/\partial p_A)$. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_B, denotada por η_{p_B}, se define como $(p_B/q_A)(\partial q_A/\partial p_B)$. Hablando en términos no muy estrictos, η_{p_A} es la razón de un cambio porcentual en la cantidad de A demandada con respecto a un cambio porcentual en el precio de A, cuando el precio de B es fijo. Del mismo modo, se puede interpretar η_{p_B} de manera no muy estricta como la razón de un cambio porcentual en la cantidad de A demandada con respecto a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A es fijo. En los Problemas **18-20**, *evalúe η_{p_A} y η_{p_B} para los valores dados de p_A y p_B.*

18. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $p_A = 2$, $p_B = 10$.

19. $q_A = 100/(p_A\sqrt{p_B})$; $p_A = 1$, $p_B = 4$.

20. $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $p_A = 2$, $p_B = 2$.

17.4 Diferenciación parcial implícita*

Para la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \tag{1}$$

si $x = 1$ y $y = 1$, entonces $z^2 - 1 - 1 = 0$, por lo que $z = \pm\sqrt{2}$. Por ello, la Ecuación (1) no define a z como función de x y y. Sin embargo, despejando z en la Ecuación (1), se obtiene

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o bien} \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2},$$

cada una de las cuales define a z como función de x y y. Aunque la Ecuación (1) no expresa a z explícitamente como función de x y y, se puede considerar que expresa a z *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de x y y. Obsérvese que la ecua-

§ J. Silberman y G. Yochum. "The Role of Money in Determining Election Outcomes", *Social Science Quarterly*, 58, núm. 4 (1978), 671-82.

* Se puede omitir sin perder continuidad.

ción $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ es de la forma $F(x, y, z) = 0$, en donde F es una función de tres variables. Puede pensarse que cualquier ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ expresa a z implícitamente como un conjunto de funciones posibles de x y y.

Para hallar $\partial z/\partial x$, en donde

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \tag{2}$$

en primer lugar se diferencian ambos lados de la Ecuación (2) con respecto a x, al tiempo que se considera a z como función de x y y; tratando a y como si fuera constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0,$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0.$$

Despejando $\partial z/\partial x$,

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}.$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$, se diferencian ambos lados de la Ecuación (2) con respecto a y, al tiempo que se considera a z como función de x y y, y se trata a x como constante.

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0,$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}.$$

Al método que se utilizó para obtener $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se le da el nombre de *diferenciación (parcial) implícita*.

EJEMPLO 1

a. *Si* $\dfrac{xz^2}{x + y} + y^2 = 0$, *evaluar* $\partial z/\partial x$ *cuando* $x = -1$, $y = 2$ *y* $z = 2$.

Se considera a z como función de x y y y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x + y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0).$$

Usando la regla del cociente para el primer término del lado izquierdo, se tiene

$$\frac{(x + y)\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2) - xz^2\dfrac{\partial}{\partial x}(x + y)}{(x + y)^2} + 0 = 0$$

Empleando la regla del producto para $\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2)$ se tiene

$$\frac{(x + y)\left[x\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + z^2(1)\right] - xz^2(1)}{(x + y)^2} = 0.$$

Despejando $\partial z/\partial x$,

$$2xz(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2(x + y) - xz^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz^2 - z^2(x + y)}{2xz(x + y)} = -\frac{yz}{2x(x + y)}, \qquad z \neq 0.$$

En consecuencia,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)} = 2.$$

EJEMPLO 2

Si $se^{r^2+u^2} = u \ln(t^2 + 1)$, *determinar* $\partial t/\partial u$.

Se considera a t como función de r, s y u. Diferenciando ambos lados con respecto a u, al tiempo que se tratan a r y s como constantes, resulta

$$\frac{\partial}{\partial u}(se^{r^2+u^2}) = \frac{\partial}{\partial u}[u \ln(t^2 + 1)],$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{\partial}{\partial u}[\ln(t^2 + 1)] + \ln(t^2 + 1)\frac{\partial}{\partial u}(u) \qquad \text{(regla del producto)},$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{2t}{t^2 + 1}\frac{\partial t}{\partial u} + \ln(t^2 + 1).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2 + 1)[2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2 + 1)]}{2ut}.$$

EJERCICIOS 17.4

En los Problemas **1-11**, *obtenga mediante el método de diferenciación parcial implícita las derivadas parciales que se señalan.*

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\partial z/\partial x$.

2. $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$; $\partial z/\partial x$.

3. $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0$; $\partial z/\partial y$.

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9$; $\partial z/\partial y$.

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$.

6. $z^3 - xz - y = 0$; $\partial z/\partial x$.

7. $e^x + e^y + e^z = 10$; $\partial z/\partial y$.

8. $xyz + 2y^2x - z^3 = 0$; $\partial z/\partial x$.

9. $\ln(z) + z - xy = 1$; $\partial z/\partial x$.

10. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$; $\partial z/\partial x$.

11. $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3 + 5} = 2$; $\partial z/\partial y$.

En los Problemas **12-18**, *evalúe para los valores dados de las variables las derivadas parciales que se indican.*

12. $xz + xyz - 5 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 1, y = 4, z = 1$.

13. $xz^2 + yz - 12 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 2, y = -2, z = 3$.

14. $e^{zx} = xyz$; $\partial z/\partial y$, $x = 1, y = -e^{-1}, z = -1$.

15. $\ln z = x + y$; $\partial z/\partial x$, $x = 5, y = -5, z = 1$.

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0$; $\partial z/\partial y$, $x = 2, y = 2, z = 6$.

17. $\dfrac{s^2 + t^2}{rs} = 10$; $\partial t/\partial r$, $r = 1, s = 2, t = 4$.

18. $\dfrac{rs}{s^2 + t^2} = t$; $\partial r/\partial t$, $r = 0, s = 1, t = 0$.

17.5 Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x, y)$, entonces z es no sólo función de x y y, sino que también f_x y f_y son cada una funciones de x y y. Por consiguiente, pueden diferenciarse f_x y f_y para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de f. Simbólicamente,

$$f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x, \qquad f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y,$$
$$f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x, \qquad f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y.$$

En términos de la notación con ∂,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right], \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right], \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Debe advertirse que para determinar f_{xy} en primer lugar se diferencia f con respecto a x. Para $\partial^2 z/\partial x \partial y$, se diferencia primero con respecto a y.

Puede ampliarse la notación para abarcar los casos de derivadas parciales de orden superior al segundo. Por ejemplo, f_{xyx} (o bien $\partial^3 z/\partial x \partial y \partial x$) es una derivada parcial de tercer orden de f. Es la derivada parcial de f_{xy} (o bien $\partial^2 z/\partial y \partial x$) con respecto a x. En este punto debe ser evidente una generalización referente a derivadas parciales de orden superior en relación con funciones de más de dos variables.

EJEMPLO 1

Hallar las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^2y + x^2y^2$.

Como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2,$$

se tiene que

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy.$$

Dado que

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2y,$$

entonces

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2y) = 2x + 4xy.$$

A las derivadas f_{xy} y f_{yx} se les conoce como **derivadas parciales mixtas**. Nótese en el Ejemplo 1 que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. En condiciones apropiadas las derivadas parciales mixtas de una función son iguales; es decir, no importa el orden de la diferenciación. Puede suponerse que éste es el caso para todas las funciones que se consideran.

EJEMPLO 2

Calcular el valor de $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{(1,2,3)}$ *si* $w = (2x + 3y + 4z)^3$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3(2x + 3y + 4z)^2 \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z)$$

$$= 6(2x + 3y + 4z)^2.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\delta y \partial x} = 6 \cdot 2(2x + 3y + 4z) \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z)$$

$$= 36(2x + 3y + 4z).$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = 36 \cdot 4 = 144.$$

Consecuentemente,

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{(1,2,3)} = 144.$$

EJEMPLO 3*

Determinar $\partial^2 z/\partial x^2$ *si* $z^2 = xy$.

Mediante diferenciación implícita se determina primero $\partial z/\partial x$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(xy),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z}, \qquad z \neq 0.$$

Diferenciando ambos lados con respecto a x,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}yz^{-1}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Sustituyendo $\partial z/\partial x$ por $y/(2z)$, se tiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\left(\frac{y}{2z}\right) = -\frac{y^2}{4z^3}, \qquad z \neq 0.$$

EJERCICIOS 17.5

En los Problemas **1-10**, *determine las derivadas parciales que se indican.*

1. $f(x, y) = 4x^2y$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

2. $f(x, y) = 4x^3 + 5x^2y^3 - 3y$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, $f_{yyy}(x, y)$.

4. $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

5. $f(x, y) = 4e^{2xy}$; $f_y(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yxy}(x, y)$.

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$.

7. $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$; $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

8. $f(x, y, z) = xy^2z^3$; $f_x(x, y, z)$, $f_{xz}(x, y, z)$, $f_{xy}(x, y, z)$.

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

10. $z = \dfrac{\ln(x^2 + 5)}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, hallar $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. Si $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, calcular $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 5l^3k^6 - lk^7$, encontrar $f_{kkl}(2, 1)$.

* Omítase si no se estudió la Sección 17.4.

14. Si $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$, evaluar $f_{xxy}(0, 1)$.

15. Si $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$, determinar $f_{xyy}(1, 1)$.

16. Si $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^3$, encontrar $f_{xy}(1, -1)$.

17. Para $f(x, y) = 8x^3 + 2x^2y^2 + 5y^4$, probar que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

18. Para $f(x, y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$, probar que $f_{yxx}(x, y) = f_{xxy}(x, y)$.

19. Para $z = \ln(x^2 + y^2)$, probar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

***20.** Si $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$, obtener $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

***21.** Si $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

17.6 Regla de la cadena ‡

Supóngase que el fabricante de dos productos relacionados A y B tiene una función de costos conjuntos dada por

$$c = f(q_A, q_B),$$

en donde c es el costo total de fabricar las cantidades q_A y q_B de A y B, respectivamente. Además, supóngase que las funciones de demanda para los productos son

$$q_A = g(p_A, p_B) \qquad \text{y} \qquad q_B = h(p_A, p_B),$$

en donde p_A y p_B son los precios por unidad de A y B, respectivamente. Puesto que c es función de q_A y q_B, y como tanto q_A como q_B son en sí mismas funciones de p_A y p_B, entonces se puede considerar a c como función de p_A y p_B. (A las variables q_A y q_B se les denomina, apropiadamente, *variables intermedias* de c.) En consecuencia, se debe estar en posibilidades de determinar $\partial c/\partial p_A$, la tasa de variación del costo total con respecto al precio de A. Una forma de hacer esto es sustituir las expresiones q_A y q_B por $g(p_A, p_B)$ y $h(p_A, p_B)$, respectivamente, en $c = f(q_A, q_B)$. Entonces, c es función de p_A y p_B, y es posible diferenciar c con respecto a p_A en forma directa. Este método tiene algunas desventajas, en especial cuando f, g o h están dadas por una expresión complicada. Otra forma de abordar el problema sería utilizar la regla de la cadena (en realidad *una* regla de la cadena) que se establece enseguida, sin demostración.

Regla de la Cadena

Sea $z = f(x, y)$, en donde tanto x como y son funciones de r y s, dadas por $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$. Si f, x y y tienen derivadas parciales continuas, entonces z es función de r y s, y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

* Omítase si no es estudió la Sección 17.4.
‡ Se puede omitir sin perder continuidad.

Adviértase que en la regla de la cadena el número de variables intermedias de z (dos) es el mismo que el número de términos que componen tanto a $\partial z/\partial r$ como a $\partial z/\partial s$.

Volviendo a la situación original en relación con el fabricante, se observa que si f, q_A y q_B tienen derivadas parciales continuas, entonces mediante la regla de la cadena

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} + \frac{\partial c}{\partial q_B}\frac{\partial q_B}{\partial p_A}.$$

EJEMPLO 1

Para un fabricante de cámaras fotográficas y película el costo total c de fabricar q_C cámaras y q_F unidades de película, está dado por

$$c = 30q_C + 0.015q_Cq_F + q_F + 900.$$

Las funciones de demanda para las cámaras y para la película están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C\sqrt{p_F}} \qquad y \qquad q_F = 2000 - p_C - 400p_F,$$

en donde p_C es el precio por cámara y p_F es el precio por unidad de película. Encontrar la tasa de variación del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$.

En primer lugar se debe determinar $\partial c/\partial p_C$. Mediante la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_C} = \frac{\partial c}{\partial q_C}\frac{\partial q_C}{\partial p_C} + \frac{\partial c}{\partial q_F}\frac{\partial q_F}{\partial p_C}$$

$$= (30 + 0.015q_F)\left[\frac{-9000}{p_C^2\sqrt{p_F}}\right] + (0.015q_C + 1)(-1).$$

Cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$, entonces $q_C = 90\sqrt{2}$ y $q_F = 1150$. Sustituyendo estos valores en $\partial c/\partial p_C$ y simplificando, resulta

$$\left.\frac{\partial c}{\partial p_C}\right|_{\substack{p_C=50\\p_F=2}} = -123.2 \qquad \text{(aproximadamente)}.$$

Se puede extender la regla de la cadena. Por ejemplo, supóngase que $z = f(v, w, x, y)$ y que v, w, x y y son todas funciones de r, s y t. Entonces, si se suponen ciertas condiciones de continuidad, z es función de r, s y t, y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Obsérvese que el número de variables intermedias de z (cuatro) es el mismo que el número de términos que forman tanto a $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$, como $\partial z/\partial t$.

Ahora, se considera la situación en la que $z = f(x, y)$ y $x = x(t)$, $y = y(t)$. En este caso,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Aquí, se utiliza el símbolo dz/dt, en vez de $\partial z/\partial t$ porque puede considerarse que z es función de *una* variable, t. De la misma manera, se emplean los símbolos dx/dt y dy/dt, en vez de $\partial x/\partial t$ y $\partial y/\partial t$. Como se ha visto, el número de términos que forman a dz/dt es igual al número de variables intermedias de z. Otras situaciones se abordarían de modo análogo.

EJEMPLO 2

a. *Si* $w = f(x, y, z) = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$, *en donde*

$$x = 2r - 3s,\ y = 6r + s\ y\ z = r - s,$$

determinar $\partial w/\partial r$ *y* $\partial w/\partial s$.

Ya que x, y y z son funciones de r y s, entonces, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2z^2)(1)$$

$$= x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz).$$

También,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2z^2)(-1)$$

$$= x(3x - 19y + z) - yz(3 + 8z^2 - 12yz).$$

b. *Si* $z = \dfrac{x + e^y}{y}$, *en donde* $x = rs + se^{rt}$ *y* $y = 9 + rt$, *evaluar* $\partial z/\partial s$ *cuando* $r = -2$, $s = 5$ *y* $t = 4$.

En virtud de que x y y son funciones de r, s y t (nótese que es posible escribir $y = 9 + rt + 0 \cdot s$), por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)(r + e^{rt}) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (0) = \frac{r + e^{rt}}{y}.$$

Si $r = -2$, $s = 5$ y $t = 4$, entonces $y = 1$. Por ello

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{\substack{r=-2\\ s=5\\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}.$$

EJEMPLO 3

a. *Determinar* $\partial y/\partial r$ *si* $y = x^2 \ln(x^4 + 6)$ *y* $x = (r + 3s)^6$.

Mediante la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}\\ &= \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot \ln(x^4 + 6)\right][6(r + 3s)^5]\\ &= 12x(r + 3s)^5\left[\frac{2x^4}{x^4 + 6} + \ln(x^4 + 6)\right].\end{aligned}$$

b. *Dados* $z = e^{xy}$, $x = r - 4s$ *y* $y = r - s$, *hallar* $\partial z/\partial r$ *en términos de r y s.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1)\\ &= (x + y)e^{xy}.\end{aligned}$$

Debido a que $x = r - 4s$ y $y = r - s$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= [(r - 4s) + (r - s)]e^{(r-4s)(r-s)}\\ &= (2r - 5s)e^{r^2 - 5rs + 4s^2}\end{aligned}$$

EJERCICIOS 17.6

En los Problemas **1-12**, *obtenga las derivadas que se señalan aplicando la regla de la cadena.*

1. $z = 5x + 3y$, $x = 2r + 3s$, $y = r - 2s$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

2. $z = x^2 + 3xy + 7y^3$, $x = r^2 - 2s$, $y = 5s^2$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

3. $z = e^{x+y}$, $x = t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$; dz/dt.

4. $z = \sqrt{8x + y}$, $x = t^2 + 3t + 4$, $y = t^3 + 4$; dz/dt.

5. $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$, $x = 5t$, $y = 2t + 3$, $z = 6 - t$; dw/dt.

6. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = 2 - 3t$, $y = t^2 + 3$, $z = 4 - t$; dw/dt.

7. $z = (x^2 + xy^2)^3$, $x = r + s + t$, $y = 2r - 3s + t$; $\partial z/\partial t$.

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r^2 + s - t$, $y = r - s + t$; $\partial z/\partial r$.

9. $w = x^2 + xyz + y^3z^2$, $x = r - s^2$, $y = rs$, $z = 2r - 5s$; $\partial w/\partial s$.

10. $w = e^{xyz}$, $x = r^2s^3$, $y = r - s$, $z = rs^2$; $\partial w/\partial r$.

11. $y = x^2 - 7x + 5$, $x = 15rs + 2s^2t^2$; $\partial y/\partial r$.

12. $y = 4 - x^2$, $x = 2r + 3s - 4t$; $\partial y/\partial t$.

13. Si $z = (4x + 3y)^3$, en donde $x = r^2s$ y $y = r - 2s$, evalúe $\partial z/\partial r$ cuando $r = 0$ y $s = 1$.

14. Si $z = \sqrt{5x + 2y}$, en donde $x = 4t + 7$ y $y = t^2 - 3t + 4$, determine dz/dt cuando $t = 1$.

15. Si $w = e^{3x-y}(x^2 + 4z^3)$, en donde $x = rs$, $y = 2s - r$ y $z = r + s$, determine $\partial w/\partial s$ cuando $r = 1$ y $s = -1$.

16. Si $y = x/(x - 5)$, en donde $x = 2t^2 - 3rs - r^2t$, determine $\partial y/\partial t$ cuando $r = 0$, $s = 2$, y $t = -1$.

17. Considerando una función de producción $P = f(l, k)$ en donde l es insumo de mano de obra y k es insumo de capital, Fon, Boulier y Goldfarb* suponen que l está dada por $l = Lg(h)$, en donde L es el número de trabajadores, h es el número de horas diarias por trabajador y $g(h)$ es una función de eficacia de la mano de obra. Al maximizar la productividad p dada por

$$p = aP - whL,$$

en donde a es el precio por unidad de producción y w es el salario por hora para los trabajadores, Fon, Boulier y Goldfarb determinan $\partial p/\partial L$ y $\partial p/\partial h$. Supóngase que k es independiente de L y de h y determínense estas derivadas parciales.

17.7 Máximos y mínimos para funciones de dos variables

Ahora se amplía a funciones de dos variables la noción de máximos y mínimos relativos (o extremos relativos).

DEFINICIÓN

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** *en el punto (x_0, y_0), es decir, cuando $x = x_0$ y $y = y_0$ si para todos los puntos (x, y) del plano que están lo suficientemente cercanos a (x_0, y_0) se tiene que*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y). \tag{1}$$

Para un ***mínimo relativo****, en* (1)*, se reemplaza $\geq$ por $\leq$.*

Decir que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa geométricamente que el punto (x_0, y_0, z_0) de la gráfica de f está en una posición superior que (o está a la misma altura que) todos los demás puntos de la superficie que se encuentran "cerca" de (x_0, y_0, z_0). En la Figura 16.12(a) f tiene un máximo relativo en (x_1, y_1). De la misma forma, la función f de la Figura 16.12(b) tiene un mínimo relativo cuando $x = y = 0$, que corresponde a un punto *bajo* en la superficie.

Se debe recordar que al ubicar extremos para una función $y = f(x)$ de una variable, se examinaron los valores de x pertenecientes al dominio de f para los cuales $f'(x) = 0$ o bien $f'(x)$ no existe. Para funciones de dos (o más) variables, se sigue un procedimiento semejante. Sin embargo, para las funciones que son de interés aquí no ocurren extremos en los casos en donde no existen derivadas y se excluye la consideración de esta clase de situaciones.

Supóngase que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0), como se señala en la Figura 17.13(a). En este caso, la curva en la que el plano $y = y_0$ corta la superficie debe tener un máximo relativo cuando $x = x_0$. Así, la pendiente de la recta tan-

* V. Fon, B.L. Boulier y R.S. Goldfarb, "The Firm's Demand for Daily Hours of Work: Some Implications", *Atlantic Economic Journal*, XIII, núm. 1 (1985), 36-42.

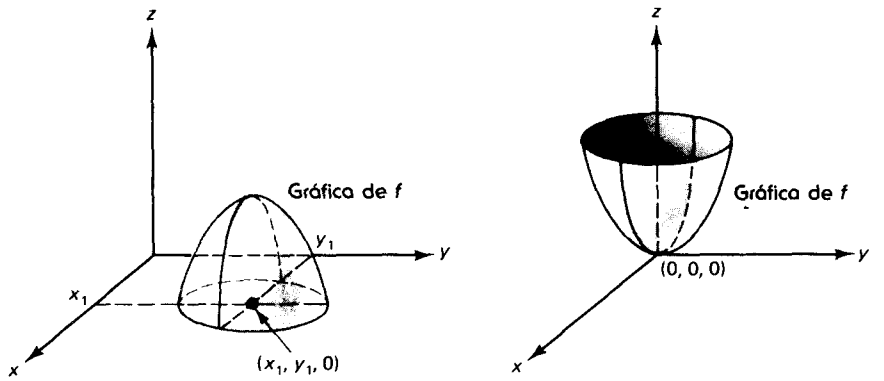


FIGURA 17.12

gente a la superficie en la dirección de x debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_x(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). De modo análogo, en la curva en la que el plano $x = x_0$ corta a la superficie [Figura 17.13(b)], debe haber un máximo relativo cuando $y = y_0$. En consecuencia, en la dirección de y la pendiente de la tangente a la superficie debe ser 0 en (x_0, y_0). En forma equivalente, $f_y(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). Puesto que es posible realizar un análisis similar para un mínimo relativo, pueden combinarse estos resultados como se explica a continuación.

Regla 1

Si $z = f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo relativo en (x_0, y_0), y si tanto f_x como f_y están definidas para todos los puntos cercanos a (x_0, y_0), es necesario que (x_0, y_0) sea una solución del sistema.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

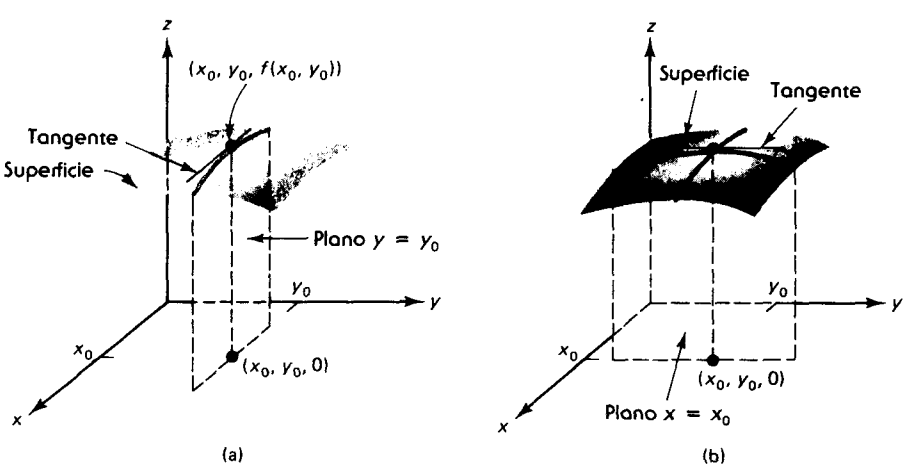


FIGURA 17.13

Un punto (x_0, y_0) para el cual $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ recibe el nombre de **punto crítico** de f. Por lo tanto, a partir de la Regla 1 se infiere que para localizar extremos relativos de una función deben examinarse sus puntos críticos.

ADVERTENCIA

La Regla 1 no implica que debe haber un extremo en un punto crítico. De la misma forma que en el caso de funciones de una variable, un punto crítico puede representar un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos.

Dos comentarios adicionales: En primer lugar, la Regla 1 al igual que la noción de un punto crítico, puede ampliarse a funciones de más de dos variables. Por consiguiente, para ubicar los extremos posibles de $w = f(x, y, z)$, se examinarían los puntos para los cuales $w_x = w_y = w_z = 0$. En segundo término, para una función cuyo dominio está restringido, una búsqueda completa de extremos relativos incluiría la consideración de los puntos límites.

EJEMPLO 1

Localizar los puntos críticos de las siguientes funciones.

a. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1.$

Como $f_x(x, y) = 4x - 2y + 5$ y $f_y(x, y) = 2y - 2x - 3$, se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ -2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Esto da como resultado $x = -1$ y $y = \frac{1}{2}$. Consecuentemente, $(-1, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico.

b. $f(l, k) = l^3 + k^3 - lk.$

$$\begin{cases} f_l(l, k) = 3l^2 - k = 0, & (2) \\ f_k(l, k) = 3k^2 - l = 0. & (3) \end{cases}$$

De la Ecuación (2), $k = 3l^2$. Sustituyendo k en la Ecuación (3) se obtiene $0 = 27l^4 - l = l(27l^3 - 1)$. Por ello, $l = 0$ o bien $l = \frac{1}{3}$. Si $l = 0$, entonces $k = 0$; si $l = \frac{1}{3}$, entonces $k = \frac{1}{3}$. Así, los puntos críticos son (0, 0) y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

c. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100).$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x + y - z = 0, \\ f_y(x, y, z) = x + 2y - z = 0, \\ f_z(x, y, z) = -x - y + 100 = 0 \end{cases}$$

se tiene el punto crítico (25, 75, 175), como el lector puede verificar.

EJEMPLO 2

Ubicar los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y + 7$$

Se tiene que $f_x(x, y) = 2x - 4y$ $f_y(x, y) = 4y + 4$. El sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

da el punto crítico $(2, -1)$. Debe advertirse que la función dada puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4x + 4 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 1, \end{aligned}$$

y $f(2, -1) = 1$. Resulta claro que si $(x, y) \neq (2, -1)$, entonces $f(x, y) > 1$, en consecuencia, ocurre un mínimo relativo en $(2, -1)$. Además, existe un *mínimo absoluto* en $(2, -1)$, dado que $f(x, y) > f(2, -1)$ para *todas* las $(x, y) \neq (2, -1)$.

Aunque en el Ejemplo 2 fue posible probar que el punto crítico señalaba un extremo relativo, en muchos casos esto no es fácil de hacer. Existe, sin embargo, una prueba con segundas derivadas que da las condiciones en las cuales un punto crítico se identifica como un máximo o un mínimo relativo. Se le establece aquí, omitiendo la demostración.

Regla 2

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Supóngase que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas f_{xx}, f_{yy}, y f_{xy} en todos los puntos (x, y) cercanos al punto crítico (x_0, x_0). Sea D la función definida por

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

Entonces,

a. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);

b. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);

c. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni máximo relativo ni mínimo relativo en (x_0, y_0);

d. si $D(x_0, y_0) = 0$, no se puede obtener ninguna conclusión acerca de puntos extremos en (x_0, y_0), y se requiere un análisis más detallado.

EJEMPLO 3

Examinar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ para ver si tiene máximos o mínimos relativos aplicando la prueba de la segunda derivada.

En primer lugar, se hallan los puntos críticos.

$$f_x(x, y) = 3x^2 - y, \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - x.$$

De la misma forma que se hizo en el Ejemplo 1(b), resolviendo $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se producen los puntos críticos (0, 0) y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ahora,

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \qquad f_{xy}(x, y) = -1, \qquad f_{yy}(x, y) = 6y.$$

De donde

$$D(x, y) = (6x)(6y) - (-1)^2 = 36xy - 1.$$

Como $D(0, 0) = 36(0)(0) - 1 = -1 < 0$, no existen extremos relativos en (0, 0).

Debido a que $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 36(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - 1 = 3 > 0$ y $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) = 2 > 0$, existe un mínimo relativo en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. El valor de la función en este punto es

$$f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 - (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{27}.$$

EJEMPLO 4

Examinar $f(x, y) = y^2 - x^2$ para ver si tiene extremos relativos
Resolviendo

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 2y = 0,$$

se origina el punto crítico (0, 0). Ahora se aplica la prueba de la segunda derivada. En (0, 0) y, de hecho, en cualquier punto,

$$f_{xx}(x, y) = -2, \qquad f_{yy}(x, y) = 2, \qquad f_{xy}(x, y) = 0.$$

Como $D(0, 0) = (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0$ y no existen extremos relativos en (0, 0). En la Figura 17.14 aparece un esbozo de $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Nótese que para la superficie curva cortada por el plano $y = 0$ existe un *máximo* en (0); pero para la superficie curva cortada por el plano $x = 0$ existe un *mínimo* en (0, 0). Por consiguiente, no puede existir un extremo relativo en la *superficie*, en el origen, aunque (0, 0) es un punto crítico. Alrededor del origen la curva tiene forma de silla de montar y a (0, 0) se le llama *punto de silla* de f.

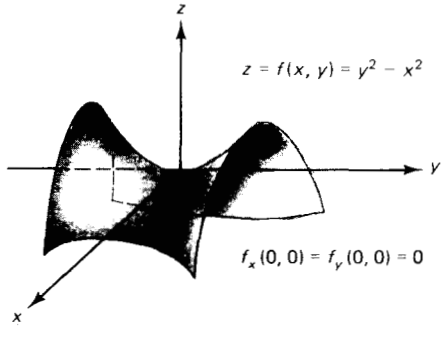


FIGURA 17.14

EJEMPLO 5

Examinar $f(x, y) = x^4 + (x - y)^4$ y ver si tiene extremos relativos.

Si se establece que

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4(x - y)^3 = 0 \tag{4}$$

y

$$f_y(x, y) = -4(x - y)^3 = 0, \tag{5}$$

entonces, de la Ecuación (5), se tiene $x - y = 0$, o bien $x = y$. Sustituyendo la Ecuación (4) resulta $4x^3 = 0$, o bien $x = 0$. Consecuentemente, $x = y = 0$ y (0, 0) es el único punto crítico. En (0, 0),

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 12(x - y)^2 = 0,$$

$$f_{yy}(x, y) = 12(x - y)^2 = 0,$$

y

$$f_{xy}(x, y) = -12(x - y)^2 = 0.$$

Por ello, $D(0, 0) = 0$ y la prueba de la segunda derivada no proporciona información. Sin embargo, para todos los $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene que $f(x, y) > 0$, en tanto que $f(0, 0) = 0$. Así, en (0, 0), la gráfica de f tiene un punto bajo y se concluye que f tiene un mínimo relativo (y absoluto) en (0, 0).

En muchos casos que implican funciones de dos variables, y en especial en sus aplicaciones, la naturaleza del problema es un indicador de si un punto crítico es de hecho un máximo relativo (o absoluto) o un mínimo relativo (o absoluto). En estos casos no es necesaria la prueba de la segunda derivada. Con frecuencia, en estudios matemáticos en áreas de aplicación se supone que las condiciones pertinentes de segundo orden se cumplen.

EJEMPLO 6

Sea P una función de producción dada por

$$P = f(l, k) = 0.54l^2 - 0.02l^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3,$$

en donde l y k son las cantidades de mano de obra y capital, respectivamente, y P es la cantidad de productos que se fabrican. Calcular los valores de l y k que maximizan P.

$$P_l = 1.08l - 0.06l^2 \qquad P_k = 3.78k - 0.27k^2$$

$$= 0.06l(18 - l) = 0. \qquad = 0.27k(14 - k) = 0.$$

$$l = 0, \; l = 18. \qquad k = 0, \; k = 14.$$

Existen cuatro puntos críticos: (0, 0), (0, 14), (18, 0) y (18, 14).

Ahora se aplica la prueba de la segunda derivada a cada uno de los puntos críticos.

$$P_{ll} = 1.08 - 0.12l, \qquad P_{kk} = 3.78 - 0.54k, \qquad P_{lk} = 0.$$

De donde

$$D(l, k) = P_{ll}P_{kk} - [P_{lk}]^2$$

$$= (1.08 - 0.12l)(3.78 - 0.54k).$$

En (0, 0),

$$D(0, 0) = 1.08(3.78) > 0.$$

Dado que $D(0, 0) > 0$ y $P_{II} = 1.08 > 0$, existe un mínimo relativo en (0, 0).

En (0, 14),

$$D(0, 14) = 1.08(-3.78) < 0.$$

Como $D(0, 14) < 0$, no existe extremo relativo en (0, 14).

En (18, 0),

$$D(18, 0) = (-1.08)(3.78) < 0.$$

En virtud de que $D(18, 0) < 0$, no existe extremo relativo en (18, 0).

En (18, 14),

$$D(18, 14) = (-1.08)(-3.78) > 0.$$

Ya que $D(18, 14) > 0$ y $P_{II} = -1.08 < 0$ existe un máximo relativo en (18, 14). Se obtiene la producción máxima cuando $l = 18$ y $k = 14$.

EJEMPLO 7

Un fabricante de alimentos produce 2 tipos de golosinas, A y B, cuyos costos promedio de producción son constantes y de \$2 y \$3 (dólares) por libra, respectivamente. Las cantidades q_A, q_B (en libras de A *y* B *que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjuntas*

$$q_A = 400(p_B - p_A)$$
$$y \quad q_B = 400(9 + p_A - 2p_B)$$

en donde p_A *y* p_B *son los precios de venta (en dólares por libra) de* A *y* B, *respectivamente. Determinar los precios de venta que maximizan las utilidades P del fabricante.*

La utilidad total, P está dada por

$$P = \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{de A}\\ \text{vendidas}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{de B}\\ \text{vendidas}\end{pmatrix}.$$

Para A y B, las utilidades por libra son $P_A - 2$ y $P_B - 3$ Respectivamente. Así,

$$P = (p_A - 2)q_A + (p_B - 3)q_B$$
$$= (p_A - 2)[400(p_B - p_A)] + (p_B - 3)[400(9 + p_A - 2p_B)].$$

Obsérvese que P está expresada como función de dos variables, P_A y P_B. Para maximizar P se igualan sus derivadas parciales a cero:

$$\frac{\partial P}{\partial p_A} = (p_A - 2)[400(-1)] + [400(p_B - p_A)](1) + (p_B - 3)[400(1)] = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial p_B} = (p_A - 2)[400(1)] + (p_B - 3)[400(-2)] + [400(9 + p_A - 2p_B)](1) = 0.$$

Simplificando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{cases} -2p_A + 2p_B - 1 = 0, \\ 2p_A - 4p_B + 13 = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $P_A = 5.5$ y $P_B = 6$. Además,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_A^2} = -800, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B^2} = -1600, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B \, \partial p_A} = 800.$$

Por ello, $D(5.5, 6) = (-800)(-1600) - (800)^2 > 0$. Como $\partial^2 P/\partial p_1^2 < 0$, se tiene, de hecho, un máximo. El fabricante debe vender la golosina A a \$5.50 (dólares) por libra y la B a \$6.00 (dólares) por libra.

EJEMPLO 8*

Supóngase que un monopolista practica la discriminación de precios vendiendo el mismo producto en dos mercados distintos a precios diferentes. Sea q_A el número de unidades que se venden en el mercado A, en donde la función de demanda es $p_A = f(q_a)$, y sea q_B el número de unidades que se venden en el mercado B, en donde la función de demanda es $p_B = g(q_B)$.

En este caso, las funciones de ingresos para los dos mercados son

$$r_A = q_A f(q_A) \qquad \text{y} \qquad r_B = q_B g(q_B).$$

Supóngase que todas las unidades se fabrican en una sola planta y sea la función de costos por fabricar $q\,(= q_A + q_B)$ unidades, $c = c(q)$. Se debe tener presente que r_A es función de q_A y que r_B es función de q_B. La utilidad P del monopolista es

$$P = r_A + r_B - c.$$

Para maximizar P con respecto a las producciones q_A y q_B, se igualan sus derivadas parciales a 0. Para comenzar con,

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} + 0 - \frac{\partial c}{\partial q_A}$$

$$= \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq}\frac{\partial q}{\partial q_A} = 0 \qquad \text{(regla de la cadena).}$$

Debido a que

$$\frac{\partial q}{\partial q_A} = \frac{\partial}{\partial q_A}(q_A + q_B) = 1,$$

se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq} = 0. \tag{6}$$

* Omítase si no se estudió la Sección 17.6

De manera semejante

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = \frac{dr_B}{dq_B} - \frac{dc}{dq} = 0. \tag{7}$$

De las Ecuaciones (6) y (7), se obtiene

$$\frac{dr_A}{dq_A} = \frac{dc}{dq} = \frac{dr_B}{dq_B}.$$

Pero dr_A/dq_A y dr_B/dq_B son ingresos marginales y dc/dq es costo marginal. Por consiguiente, para maximizar las utilidades es necesario cobrar precios (y distribuir la producción) de manera que los ingresos marginales en ambos mercados sean iguales y, hablando en términos no muy estrictos, que sean iguales al costo de la última unidad fabricada en la planta.

EJERCICIOS 17.7

En los Problemas **1-6**, *ubique los puntos críticos de las funciones.*

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 4y + xy.$

2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

3. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y.$

4. $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$

5. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 200).$

6. $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w(x - y + 2z - 6).$

En los Problemas **7-18**, *localice los puntos críticos de las funciones. Determine, mediante la prueba de la segunda derivada, si cada punto corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, o a ninguno de ellos, o si la prueba no da ninguna información.*

7. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3.$

8. $f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7.$

9. $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2.$

10. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1.$

11. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y - 5.$

12. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 - 2x + 2y - 2xy.$

13. $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1.$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3.$

15. $f(l, k) = 2lk - l^2 + 264k - 10l - 2k^2.$

16. $f(l, k) = l^3 + k^3 - 3lk.$

17. $f(p, q) = pq - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$

18. $f(x, y) = (x - 3)(y - 3)(x + y - 3).$

En los Problemas **19-26**, *a menos que se indique lo contrario, las variables p_A y p_B denotan precios de venta de los productos* A *y* B, *respectivamente. En forma análoga, q_A y q_B denotan las cantidades de* A *y* B *que se fabrican y venden durante cierto periodo. En todos los casos se supone que las variables que se utilizan son unidades de producción, insumos, dinero, etc.*

19. Suponga que

$$P = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

es una función de producción para una empresa. Encontrar las cantidades de insumos l y k que maximizan la producción P.

20. En cierto proceso automatizado de manufactura, se utilizan las máquinas M y N durante m y n horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es función de m y n, es decir,

$$Q = 4.5m + 5n - 0.5m^2 - n^2 - 0.25mn,$$

halle los valores de m y n que maximizan Q.

21. Una compañía dulcera fabrica dos clases de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio constantes de producción son 60 y 70 (centavos de dólar por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están respectivamente dadas por $q_A = 5(p_B - p_A)$ y $q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B)$. Obtenga los precios de venta p_A y p_B que maximizan las utilidades de la compañía.

22. Repita el Problema 21 si los costos constantes de producción de A y B son a y b (centavos por libra), respectivamente.

23. Supóngase que un monopolista practica la discriminación de precios en la venta de un producto al cobrar precios diferentes en dos mercados distintos. En el mercado A, la función de demanda es $p_A = 100 - q_A$ y en el mercado B es $p_B = 84 - q_B$, en donde q_A y q_B son las cantidades que se venden a la semana en A y B, y p_A y p_B son los respectivos precios por unidad. Si la función de costos del monopolista es $c = 600 + 4(q_A + q_B)$, ¿cuánto se debe vender en cada mercado para maximizar las utilidades? ¿Qué precios de venta producen esta utilidad máxima? Calcule la utilidad máxima.

24. Un monopolista vende dos productos que compiten entre sí, A y B, para los cuales las funciones de demanda son $q_A = 1 - 2p_A + 4p_B$ y $q_B = 11 + 2p_A - 6p_B$. Si el costo promedio constante de fabricar una unidad de A es 4 y de 1 para B, ¿cuántas unidades de A y B se deben vender para maximizar las utilidades del monopolista?

25. Para los productos A y B la función de costos conjuntos para un fabricante es $c = 1.5q^2_B + 4.5q^2_B$ y las funciones de demanda son $p_A = 36 - q^2_A$ y $p_B = 30 - q^2_B$. Evalúe el nivel de producción que maximiza las utilidades.

26. Para los productos de un monopolista A y B, la función de costos conjuntos es $c = (q_A + q_B)^2$ y las funciones de demanda son $q_A = 26 - p_A$ y $q_B = 10 - 0.25p_B$. Determine los valores de p_A y p_B que maximizan las utilidades. ¿Cuáles son las cantidades de A y B que corresponden a estos precios? ¿Cuál es la utilidad total?

27. Una caja rectangular descubierta en la parte superior debe tener un volumen de 6 pie^3. El costo por pie^2 de materiales es \$3 (dólares) para la base, \$1 para el frente y la parte de atrás y \$0.50 para los otros dos lados. Establezca las dimensiones de la caja que minimizan los costos de los materiales (véase la Figura 17.15).

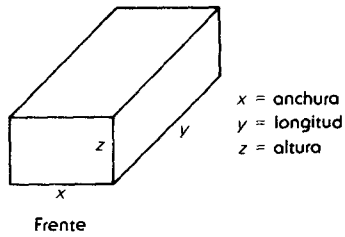


FIGURA 17.15

28. Supóngase que A y B son las dos únicas empresas que en un mercado venden el mismo producto (se dice que son *duopolistas*). La función de demanda de la industria para el producto es $p = 92 - q_A - q_B$ en donde q_A y q_B denotan la producción que se fabrica y vende de A y B, respectivamente. Para A la función de costos es $c_A = 10q_A$; y para B es $c_B = 0.5q^2_B$. Supóngase que las empresas deciden acordar niveles de producción y control de precios al actuar en forma conjunta como monopolio. En este caso se dice que se *coluden*. Demuestre que la función de utilidades para el monopolio está dada por

$$P = pq_A - c_A + pq_B - c_B.$$

Exprese P como función de q_A y q_B y determine la forma en que se debe asignar la producción para maximizar las utilidades del monopolio.

29. Supóngase $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$, en donde x y y deben satisfacer la ecuación $3x - 2y = 7$. Halle los extremos relativos de f sujetos a las condiciones dadas para x y y, despejando en primer lugar y en la segunda ecuación. Sustituya el resultado de y en la ecuación dada. Consecuentemente, f queda expresada como función de una variable para la cual es posible hallar extremos en la forma usual.

30. Repita el Problema 29 si $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$ sujeto a la condición de que $2x - 8y = 20$.

17.8 Multiplicadores de Lagrange

Ahora, se hallarán máximos y mínimos relativos para una función sobre la cual se imponen ciertas *restricciones*. Podría presentarse esta situación en el caso de que un fabricante deseara minimizar el costo total de los factores de insumo y, al mismo tiempo, lograr un determinado nivel de producción.

Supóngase que se desea localizar los extremos relativos de

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

sujeto a la restricción de que x, y y z deben satisfacer

$$x - y + 2z = 6. \tag{2}$$

Puede transformarse w, que es función de tres variables, en una función de dos variables de forma que la nueva función refleje la restricción (2). Despejando x en la Ecuación (2) se obtiene

$$x = y - 2z + 6, \tag{3}$$

expresión que cuando es sustituida en lugar de x en la Ecuación (1), produce

$$w = (y - 2z + 6)^2 + y^2 + z^2. \tag{4}$$

Como ahora w está expresada como función de dos variables, para hallar los extremos relativos se sigue el procedimiento usual de igualar a 0 sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - 2z + 6) + 2y = 4y - 4z + 12 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -4(y - 2z + 6) + 2z = -4y + 10z - 24 = 0. \tag{6}$$

Resolviendo simultáneamente las Ecuaciones (5) y (6) se obtiene $y = -1$ y $z = 2$. Sustituyendo esto en la Ecuación (3), resulta $x = 1$. Por ello, el único punto crítico de (1), sujeto a la restricción (2) es $(1, -1, 2)$. Aplicando en (4) la prueba de la segunda derivada cuando $y = -1$ y $z = 2$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 10, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = -4,$$

$$D(-1, 2) = 4(10) - (-4)^2 = 24 > 0.$$

Así w, sujeta a la restricción, tiene un mínimo relativo en $(1, -1, 2)$.

Se descubrió esta solución empleando la restricción para expresar una de las variables de la función original en términos de las otras. Con frecuencia esto no es práctico, pero existe otra técnica, a la que se denomina método de los **multiplicadores de Lagrange***, que evita este paso y permite, no obstante, obtener los puntos críticos.

Este método es como sigue. Supóngase que se tiene una función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Se elabora una nueva función F de cuatro variables definida por lo siguiente (en donde λ es la letra griega lambda):

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

* Por el nombre del matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Es posible demostrar que si (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$, existe un valor de λ, por ejemplo λ_0, tal que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de F. Al número λ_0 se le conoce como *multiplicador de Lagrange*. También, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de F, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción. En consecuencia, para ubicar puntos críticos de f sujetos a $g(x, y, z) = 0$, se localizan más bien puntos críticos de F. Estos se obtienen resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \end{cases}$$

En ocasiones debe utilizarse el ingenio para realizar esto. Una vez que se determina un punto crítico $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ de F, puede concluirse que (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Aunque f y g son funciones de tres variables, el método de los multiplicadores de Lagrange se puede extender a n variables.

Enseguida se ilustra el método de los multiplicadores de Lagrange para la situación original:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{sujeto a} \quad x - y + 2z = 6.$$

En primer lugar, se escribe la restricción como $g(x, y, z) = x - y + 2z - 6 = 0$. En segundo lugar se forma la función

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x - y + 2z - 6). \end{aligned}$$

Enseguida, se iguala cada una de las derivadas parciales de F a 0. Por conveniencia se expresa $F_x(x, y, z, \lambda)$ como F_x, etc.

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0, & (7) \\ F_y = 2y + \lambda = 0, & (8) \\ F_z = 2z - 2\lambda = 0, & (9) \\ F_\lambda = -x + y - 2z + 6 = 0. & (10) \end{cases}$$

De las Ecuaciones (7)-(9) se ve inmediatamente que

$$x = \frac{\lambda}{2}, \qquad y = -\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{y} \qquad z = \lambda. \tag{11}$$

Sustituyendo estos valores en la Ecuación (10), resulta

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda = 2.$$

Por lo tanto, de la Ecuación (11), $x = 1$ $y = -1$ y $z = 2$. Por consiguiente, el único punto crítico de f sujeto a la restricción es $(1, -1, 2)$ en el que puede existir un máximo

relativo, un mínimo relativo o ninguno de ellos. El método de los multiplicadores de Lagrange no señala en forma directa cuál de estas posibilidades ocurre, aunque de lo expuesto antes se puede ver que es en realidad un mínimo relativo. En los problemas de aplicación la naturaleza del problema mismo puede dar una clave con respecto a la forma en que se debe considerar a un punto crítico. A menudo se supone la existencia de un mínimo relativo o un máximo relativo, y al punto crítico se le considera de acuerdo con esto. En realidad, hay suficientes condiciones de segundo orden para los extremos relativos, pero no se les considera aquí.

EJEMPLO 1

Hallar los puntos críticos para $z = f(x, y) = 3x - y + 6$ *sujeto a la restricción* $x^2 + y^2 = 4$.

Se escribe la restricción como $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y se forma la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 3x - y + 6 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Haciendo $F_x = F_y = F_\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 3 - 2x\lambda = 0, & (12) \\ -1 - 2y\lambda = 0, & (13) \\ -x^2 - y^2 + 4 = 0. & (14) \end{cases}$$

De las Ecuaciones (12) y (13),

$$x = \frac{3}{2\lambda} \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Sustituyendo en la Ecuación (14),

$$-\frac{9}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

$$-\frac{10}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

Si $\lambda = \sqrt{10}/4$, entonces

$$x = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$y = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

De igual modo, si $\lambda = -\sqrt{10}/4$,

$$x = -\frac{3\sqrt{10}}{5}, \qquad y = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Por lo tanto, los puntos críticos de f sujetos a la restricción son $(3\sqrt{10}/5, -\sqrt{10}/5)$ y $(-3\sqrt{10}/5, \sqrt{10}/5)$. Nótese que los valores de λ no aparecen en la respuesta. Son simplemente medios para encontrarla.

EJEMPLO 2

Hallar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xyz$, *en donde* $xyz \neq 0$, *sujeto a la restricción* $x + 2y + 3z = 36$.

Se hace

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36).$$

Entonces

$$\begin{cases} F_x = yz - \lambda = 0, \\ F_y = xz - 2\lambda = 0, \\ F_z = xy - 3\lambda = 0, \\ F_\lambda = -x - 2y - 3z + 36 = 0. \end{cases}$$

Ahora, puede escribirse el sistema como

$$\begin{cases} yz = \lambda, & (15) \\ xz = 2\lambda, & (16) \\ xy = 3\lambda, & (17) \\ x + 2y + 3z - 36 = 0. & (18) \end{cases}$$

Dividiendo cada uno de los lados de la Ecuación (15) entre el correspondiente lado de la Ecuación (16), se obtiene

$$\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{2\lambda} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{x}{2}.$$

Esta división es válida puesto que $xyz \neq 0$. Análogamente de las Ecuaciones (15) y (17) resulta

$$z = \frac{x}{3}.$$

Sustituyendo en la Ecuación (18),

$$x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) - 36 = 0,$$

$$x = 12.$$

Por consiguiente, $y = 6$ y $z = 4$. Consecuentemente, (12, 6, 4) es el único punto crítico que satisface las condiciones dadas.

EJEMPLO 3

Supóngase que una empresa ha recibido un pedido de 200 *unidades de su producto y desea distribuir su manufactura entre dos de sus fábricas, la planta* 1 *y la planta* 2. *Se utilizan* q_1 *y* q_2 *para denotar las producciones de* 1 *y* 2, *respectivamente, y se supone que la función de costos totales está dada por* $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$. *¿Cómo se debe distribuir la producción para minimizar los costos?*

Se debe minimizar $c = f(q_1, q_2)$ sujeto a la restricción $q_1 + q_2 = 200$.

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200 - \lambda(q_1 + q_2 - 200).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q_1} = 4q_1 + q_2 - \lambda = 0, & (19) \\ \dfrac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 2q_2 - \lambda = 0, & (20) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0. & (21) \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente las Ecuaciones (19) y (20) para encontrar q_1 y q_2, se obtiene

$$q_1 = \frac{\lambda}{7}, \qquad q_2 = \frac{3\lambda}{7}.$$

Sustituyendo estos valores en la Ecuación (21) se obtiene $\lambda = 350$. Por ello, $q_1 = 50$ y $q_2 = 150$. Se deben fabricar 50 unidades en la planta 1 y 150 en la 2, para minimizar los costos.

Es posible hacer una observación interesante con respecto al Ejemplo 3. De la Ecuación (19), $\lambda = 4q_1 + q_2 = \partial c/\partial q_1$, el costo marginal de la planta 1. De la Ecuación (20) $\lambda = q_1 + 2q_2 = \partial c/\partial q_2$, el costo marginal para la planta 2. Así, $\partial c/\partial q_1 = \partial c/\partial q_2$, y se concluye que para minimizar los costos es necesario que los costos marginales de cada planta sean iguales entre sí.

EJEMPLO 4

Supóngase que una empresa debe fabricar una cantidad dada P_0 de producción en la forma más económica posible. Si existen dos factores de insumos l y k y sus precios por unidad son fijos en p_l y p_k, respectivamente, analizar la importancia económica de combinar los insumos para alcanzar un costo mínimo. Es decir, describir la combinación de insumos de costos mínimos.

Sea $P = f(l, k)$ la función de producción. Entonces debe minimizarse la función de costos

$$c = lp_l + kp_k$$

sujeta a

$$P_0 = f(l, k).$$

Se establece

$$F(l, k, \lambda) = lp_l + kp_k - \lambda[f(l, k) - P_0].$$

De modo que

$$\frac{\partial F}{\partial l} = p_l - \lambda \frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] = 0, \qquad (22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k} = p_k - \lambda \frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = 0, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -f(l, k) + P_0 = 0.$$

De las Ecuaciones (22) y (23),

$$\lambda = \frac{p_l}{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]} = \frac{p_k}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]}. \tag{24}$$

Por tanto

$$\frac{p_l}{p_k} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]}.$$

Se concluye que cuando se utiliza la combinación de factores que tienen los menores costos, la razón de los productos marginales con respecto a los factores de insumos debe ser igual a la razón de sus correspondientes precios.

El método de los multiplicadores de Lagrange no está de ninguna manera limitado a problemas que implican una sola restricción. Por ejemplo, supóngase que $f(x, y, z, w)$ estuviera sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z, w) = 0$ y $g_2(x, y, z, w) = 0$. Entonces, habría dos lambdas, λ_1 y λ_2 (una para cada restricción), y se establece la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$. Luego se resolvería el sistema $F_x = F_y = F_z = F_w = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0$.

EJEMPLO 5

Encontrar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xy + yz$, *sujeto a las restricciones* $x^2 + y^2 = 8$ *y* $yz = 8$.

Se hace que

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 8) - \lambda_2(yz - 8).$$

Entonces

$$\begin{cases} F_x = y - 2x\lambda_1 = 0, \\ F_y = x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, \\ F_z = y - y\lambda_2 = 0, \\ F_{\lambda_1} = -x^2 - y^2 + 8 = 0, \\ F_{\lambda_2} = -yz + 8 = 0. \end{cases}$$

Puede describirse el sistema como

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x} = \lambda_1, & (25) \\ x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, & (26) \\ \lambda_2 = 1, & (27) \\ x^2 + y^2 = 8, & (28) \\ z = \dfrac{8}{y}. & (29) \end{cases}$$

Sustituyendo $\lambda_2 = 1$ de la Ecuación (27) en la Ecuación (26) y simplificando, se obtiene la ecuación $x - 2y\lambda_1 = 0$, por lo que

$$\lambda_1 = \frac{x}{2y}.$$

Sustituyendo en la Ecuación (25),

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y},$$

$$y^2 = x^2. \tag{30}$$

Sustituyendo en la Ecuación (28) da $x^2 + x^2 = 8$, de lo cual $x = \pm 2$. Si $x = 2$, entonces de la Ecuación (30) se tiene $y = \pm 2$. Análogamente, si $x = -2$, entonces $y = \pm 2$.

En consecuencia, si $x = 2$ y $y = 2$, de la Ecuación (29) se determina $z = 4$. Continuando de esta manera, se obtienen cuatro puntos críticos:

$$(2, 2, 4), \quad (2, -2, -4), \quad (-2, 2, 4), \quad (-2, -2, -4).$$

EJERCICIOS 17.8

En los Problemas **1-12** *halle, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones dadas.*

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$; $2x - 8y = 20$.

2. $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$; $3x - 2y = 7$.

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $2x + y - z = 9$.

4. $f(x, y, z) = x + y + z$; $xyz = 27$.

5. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2$; $x - 3y - 4z = 16$.

6. $f(x, y, z) = xyz^2$; $x - y + z = 20$, $(xyz^2 \neq 0)$.

7. $f(x, y, z) = xyz$; $x + 2y + 3z = 18$, $(xyz \neq 0)$.

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 1$.

9. $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$; $2x - y = 0$, $y + z = 0$.

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$.

11. $f(x, y, z) = xyz$; $x + y + z = 12$, $x + y - z = 0$, $(xyz \neq 0)$.

12. $f(x, y, z, w) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4w^2$; $4x - 8y + 6z + 16w = 6$.

13. Para surtir un pedido de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, la 1 y la 2. La función de costos totales está dada por

$$c = f(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000,$$

en donde q_1 y q_2 son el número de unidades fabricadas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo se debe distribuir la producción con el objeto de minimizar los costos?

14. Repita el Problema 13 si la función de costos es $c = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$ y se deben fabricar 200 unidades en total.

15. La función de producción para una empresa es

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2.$$

El costo para la compañía es de 4 y 8, por unidad de l y k, respectivamente. Si la empresa desea que el costo total de los insumos sea 88, calcule la máxima producción posible, sujeta a esta restricción presupuestal.

16. Repita el Problema 15, dado que

$$f(l, k) = 60l + 30k - 2l^2 - 3k^2$$

y la restricción presupuestal es $2l + 3k = 30$.

Los Problemas **17-20** *se refieren a la siguiente definición. Una* ***función de utilidad*** *es una que asocia una medida a la satisfacción o utilidad que un consumidor obtiene por el consumo de ciertos productos por unidad de tiempo. Supóngase que* $U = f(x, y)$ *es una función de éstas, en donde* x *y* y *son las cantidades de dos productos,* X *y* Y. *La* ***utilidad marginal*** *de* X *es* $\partial U/\partial x$ *y representa aproximadamente el cambio en la utilidad total que se produce por un cambio unitario en el consumo del producto* X *por unidad de tiempo. Se define la utilidad marginal de* Y *de manera semejante. Si los precios de* X *y* Y *son* p_x *y* p_y, *respectivamente, y el consumidor tiene un ingreso o un presupuesto de* I *para sus gastos, entonces la restricción presupuestal es* $xp_x + yp_y = I$. *En los Problemas* **17-19**, *halle las cantidades de cada producto que el consumidor debe comprar, sujeto al presupuesto y que le permitirán obtener una satisfacción máxima. Es decir, en los Problemas* **17** *y* **18** *determine los valores de* x *y* y *que maximizan* $U = f(x, y)$ *sujeta a* $xp_x + yp_y = I$. *El Problema* **19** *se resuelve del mismo modo. Supóngase que existe un máximo.*

17. $U = x^3y^3$; $p_x = 2, p_y = 3, I = 48$, $(x^3y^3 \neq 0)$.

18. $U = 46x - (5x^2/2) + 34y - 2y^2$; $p_x = 5, p_y = 2, I = 30$.

19. $U = f(x, y, z) = xyz$; $p_x = 2, p_y = 1, p_z = 4, I = 60$, $(xyz \neq 0)$.

20. Sea $U = f(x, y)$ una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestal $xp_x + yp_y = I$, en donde p_x, p_y e I son constantes. Demuestre que para maximizar la satisfacción es necesario que

$$\lambda = \frac{f_x(x, y)}{p_x} = \frac{f_y(x, y)}{p_y},$$

en donde $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son las utilidades marginales de X y Y, respectivamente. Deduzca que $f_x(x, y)/p_x$ es la utilidad marginal de un dólar de X. Por lo tanto, la satisfacción máxima se logra cuando el consumidor asigna el presupuesto de manera que la utilidad marginal de un dólar de X sea igual a la utilidad marginal por dólar de Y. Llevando a cabo el mismo procedimiento que se utilizó antes, verificar que esto es cierto para $U = f(x, y, z, w)$ sujeto a la correspondiente ecuación de presupuestos. En cada caso, a λ se le denomina la *utilidad marginal del ingreso*.

17.9 Líneas de regresión*

Para estudiar la influencia de la publicidad sobre las ventas una empresa recopiló los datos que aparecen en la Tabla 17.4. La variable x denota gastos de publicidad en cientos de dólares y la variable y denota los ingresos resultantes por ventas, en millares de dólares. Si se ubica cada par (x, y), al resultado se le denomina *diagrama de dispersión* [Figura 17.16(a)].

TABLA 17.4

Gastos, x	2	3	4.5	5.5	7
Ingresos, y	3	6	8	10	11

Observando la distribución de los puntos, es razonable suponer que existe una relación entre x y y que es aproximadamente lineal. Sobre esta base se puede ajustar "a ojo" una recta que se aproxime a los datos dados [Figura 17.16(b), y a partir de esta línea pronosticar un valor de y para un valor dado de x. Esta recta parece ser congruente con la tendencia de los datos, aunque se podrían trazar también otras rectas.

* Se puede omitir sin perder continuidad.

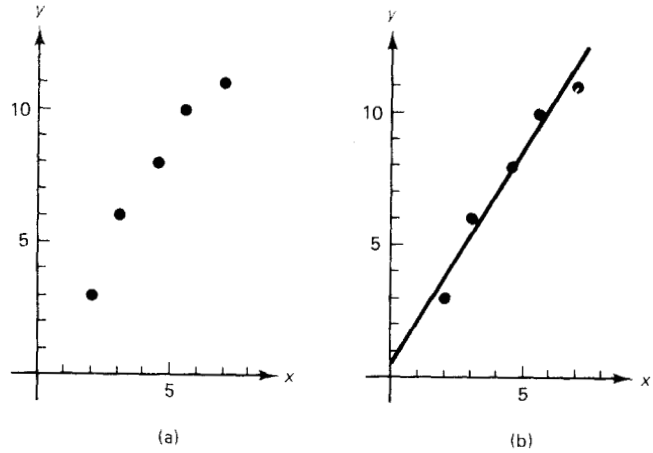


FIGURA 17.16

Por desgracia, determinar una recta "a ojo" no resulta muy objetivo. Se desea aplicar el criterio al especificar lo que se denominará una línea de "mejor ajuste". Una técnica que se utiliza con frecuencia es la que se denomina el **método de mínimos cuadrados**.

Para aplicar el método de mínimos cuadrados a los datos de la Tabla 17.4, en primer lugar se supone que x y y tienen una relación aproximadamente lineal y que es posible ajustar una línea recta:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \tag{1}$$

que se aproxime a los puntos dados mediante una selección objetiva apropiada de las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ (que se leen "a con circunflejo" y "b con circunflejo", respectivamente). Para un valor dado de x en la Ecuación (1), $\hat{y}$ es el valor pronosticado correspondiente de y y $(x, \hat{y})$ estará sobre la recta. El objetivo es que $\hat{y}$ esté cerca de y.

Cuando $x = 2$ el valor observado de y es 3. El valor pronosticado de y se determina sustituyendo $x = 2$ en la Ecuación (1), lo cual da $\hat{y} = \hat{a} + 2\hat{b}$. El error de estimación, o desviación vertical del punto (2, 3) con respecto a la recta, es $\hat{y} - y$, o bien

$$\hat{a} + 2\hat{b} - 3.$$

Esta desviación vertical se señala (aunque exagerada para hacerla más clara) en la Figura 17.17. Igualmente, la desviación vertical de (3, 6) con respecto a la recta es $\hat{a} + 3\hat{b} - 6$, que se ilustra también. Para evitar algunas posibles dificultades relacionadas con las desviaciones negativas y positivas, se consideran los cuadrados de las desviaciones y se forma la suma S de todos esos cuadrados para los datos.

$$S = (\hat{a} + 2\hat{b} - 3)^2 + (\hat{a} + 3\hat{b} - 6)^2 + (\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8)^2 + (\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10)^2 + (\hat{a} + 7\hat{b} - 11)^2.$$

El método de los mínimos cuadrados requiere que se elija como la recta de "mejor ajuste" aquella que se obtenga seleccionando $\hat{a}$ y $\hat{b}$ de manera que S resulte mínima. Se puede minimizar S con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$ resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 0. \end{cases}$$

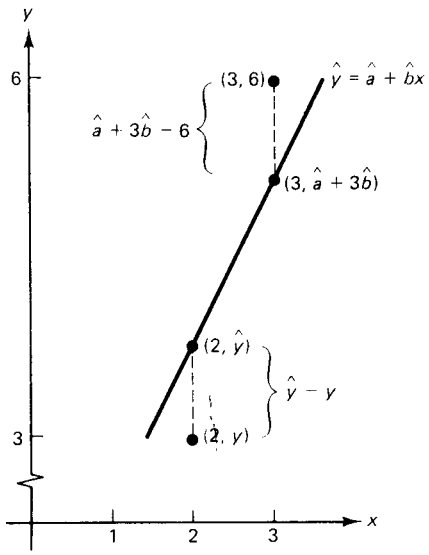


FIGURA 17.17

Se tiene así

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 2(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 2(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) +$$

$$2(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 2(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 4(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 6(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 9(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) +$$

$$11(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 14(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

que, simplificado da

$$\begin{cases} 5\hat{a} + 22\hat{b} = 38, \\ 44\hat{a} + 225\hat{b} = 384. \end{cases}$$

Despejando $\hat{a}$ y $\hat{b}$, se obtiene

$$\hat{a} = \frac{102}{157} \approx 0.65, \qquad \hat{b} = \frac{248}{157} \approx 1.58.$$

Se puede demostrar que estos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ conducen a un valor mínimo de S. Por lo tanto, en el sentido de los mínimos cuadrados, la línea de mejor ajuste $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ es

$$\hat{y} = 0.65 + 1.58x. \tag{2}$$

Esta es, de hecho, la recta señalada en la Figura 16.16(b). Se le denomina **línea de mínimos cuadrados de y sobre x**, o bien **línea de regresión de y sobre x**. Las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ reciben el nombre de **coeficientes de regresión lineal**. Con la Ecuación (2) se pronosticaría que cuando $x = 5$, el valor correspondiente de y es $\hat{y} = 0.65 + 1.58(5) = 8.55$.

En términos más generales, supóngase que se dan los siguientes n pares de observaciones:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Si se supone que x y y tienen una relación aproximadamente lineal y que puede ajustarse una recta $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ que se aproxime a los datos, la suma de los cuadrados de los errores $\hat{y} - y$ es

$$S = (\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1)^2 + (\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2)^2 + \cdots + (\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n)^2.$$

Como se debe minimizar S con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$,

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 2x_1(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2x_2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2x_n(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0.$$

Dividiendo entre 2 ambas ecuaciones y utilizando notación de sumatoria, se tiene

$$\begin{cases} \hat{a}n + \hat{b}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \\ \hat{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0. \end{cases}$$

De manera equivalente se tiene el sistema de las llamadas *ecuaciones normales*:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{a}n + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i, & (3) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (4) \end{cases}$$

Para despejar b, en primer lugar se multiplica la Ecuación (3) por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ y la Ecuación (4) por n:

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, & (5) \\ n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (6) \end{cases}$$

Restando la Ecuación (5) de la (6) se obtiene

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$= \hat{b}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right].$$

De donde

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{7}$$

Despejando $\hat{a}$ en las Ecuaciones (3) y (4), resulta

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{8}$$

Se puede demostrar que estos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ minimizan S.

Calculando los coeficientes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ de regresión lineal por las fórmulas de las Ecuaciones (7) y (8) se obtiene la recta de regresión de y sobre x, es decir, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, que puede emplearse para estimar y para un valor dado de x.

En el siguiente ejemplo, al igual que en los ejercicios, se encontrarán *números índices*. Estos se usan para relacionar una variable en un periodo con la misma variable en otro periodo, y a este último se le denomina *periodo base*. Un número índice es un número *relativo* que describe datos que varían en el tiempo. A tal tipo de datos se les denomina *series de tiempo*.

Por ejemplo, considérense los datos de series de tiempo de una cierta producción total en Estados Unidos durante 1985-1989, que se presentan en la Tabla 17.5. Si se elige 1986 como el año base y se le asigna el número índice 100, entonces los otros números índices se calculan dividiendo la producción de cada año entre la producción de 900 unidades en 1989 y multiplicando el resultado por 100. Por ejem plo, se puede interpretar el índice de 106 para 1986 señalando que significa que la producción para ese año fue del 106% de la producción en 1986.

TABLA 17.5

Año	Producción (en millares)	Índice (1983 = 100)
1985	828	92
1986	900	100
1987	936	104
1988	891	99
1989	954	106

En análisis de series de tiempo, es evidente que los números índices son de gran utilidad si los datos que se manejan implican números de magnitud grande. Pero, sin

importar la magnitud de los datos, los números índices simplifican la tarea de comparar cambios en los datos con respecto a intervalos de tiempo.

EJEMPLO 1

Mediante la recta de regresión, represente la tendencia del Índice de Producción Industrial de 1982 *a* 1987 (1982 = 100).

Año	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Índice	100	104	108	111	111	114

Fuente: Economic Report of the President, 1988, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1988.

Se utiliza x para denotar tiempo, y para denotar el índice, y se considera a y como una función lineal de x. También se designa a 1982 con $x = 1$, 1983 con $x = 2$, y así sucesivamente. Existen $n = 6$ pares de observaciones. Para determinar los coeficientes de regresión lineal utilizando las Ecuaciones (7) y (8), en primer lugar se realizan los cálculos aritméticos:

Año	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1982	1	100	100	1
1983	2	104	208	4
1984	3	108	324	9
1985	4	111	444	16
1986	5	111	555	25
1987	6	114	684	36
Total	21	648	2315	91
	$= \sum_{i=1}^{6} x_i$	$= \sum_{i=1}^{6} y_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_iy_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2$

De donde, por la Ecuación (8),

$$\hat{a} = \frac{91(648) - 21(2315)}{6(91) - (21)^2} = \frac{10{,}353}{105} = 98.6,$$

y, de la Ecuación (7),

$$\hat{b} = \frac{6(2315) - 21(648)}{6(91) - (21)^2} = \frac{282}{105} = 2.69 \text{ (aproximadamente)}$$

Por consiguiente, la línea de regresión de y sobre x es

$$\hat{y} = 98.6 + 2.69x,$$

cuya gráfica, al igual que un diagrama de dispersión, se presentan en la Figura 17.18.

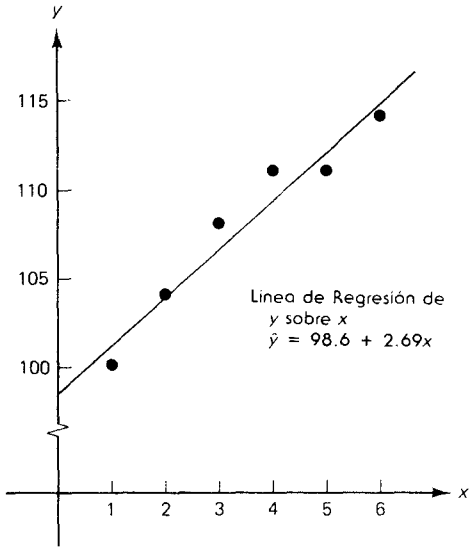


FIGURA 17.18

EJERCICIOS 17.9

En los Problemas **1-4**, *obtenga una ecuación de la línea de regresión o de mínimos cuadrados de y sobre x para los datos que se proporcionan, y trace tanto la recta como los datos. Pronostique el valor de y que corresponde a* $x = 3.5$.

1.

x	1	2	3	4	5	6
y	1.5	2.3	2.6	3.7	4.0	4.5

2.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	1.8	2	4	4.5	7	9

3.

x	2	3	4.5	5.5	7
y	3	5	8	10	11

4.

x	2	3	4	5	6	7
y	2.4	2.9	3.3	3.8	4.3	4.9

5. Una empresa descubre que cuando el precio de su producto es de p dólares por unidad, el número de unidades que se venden es q, como se indica enseguida. Halle la ecuación de la línea de regresión de q sobre p.

PRECIO, p	10	30	40	50	60	70
DEMANDA, q	70	68	63	50	46	32

6. En una granja un agrónomo encuentra que la cantidad de agua que se aplica (en pulgadas) y el rendimiento correspondiente de cierto cultivo (en toneladas por acre) están dados como se señala enseguida. Determine una ecuación de la recta de regresión de y sobre x. Pronostique y cuando $x = 12$.

AGUA, x	8	16	24	32
RENDIMIENTO, y	4.1	4.5	5.1	6.1

7. A un conejo se le inyectó un virus, y x horas después de la inyección se le midió la temperatura y (en grados Fahrenheit).* Los datos se presentan enseguida. Obtenga una ecuación de la recta de regresión de y sobre x y estime la temperatura del conejo 40 horas después de la inyección.

TIEMPO TRANSCURRIDO, x	24	32	48	56
TEMPERATURA, y	102.8	104.5	106.5	107.0

8. En un experimento psicológico se sometió a cuatro personas a un estímulo. Se midió a cada sujeto la presión sanguínea sistólica (en milímetros de mer-

* R.R. Sokal y F.J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W.H. Freeman & Company, Publishers, 1973).

curio) tanto antes como después del estímulo. Los datos se presentan enseguida. Halle una ecuación de la línea de regresión de y sobre x, en donde x y y son lo que se define en la tabla siguiente.

ANTES DEL ESTÍMULO, x	PRESIÓN SANGUÍNEA 130	132	136	140
DESPUÉS DEL ESTÍMULO, y	139	140	144	146

Para las series de tiempo de los Problemas **9** *y* **10**, *ajuste una línea de regresión mediante mínimos cuadrados; es decir, halle una ecuación de la línea de regresión de y sobre x. En ambos casos hágase que el primer año de la tabla corresponda a* $x = 1$.

9. **Fabricación del Producto A, 1985-1989 (en millares de unidades)**

Año	Producción
1985	10
1986	15
1987	16
1988	18
1989	21

10. En lo que sigue hágase que 1975 corresponda a $x = 1$, 1977 corresponda a $x = 3$, etcétera.

Índice de Producción Industrial Maquinaria Eléctrica [1977 = 100]

YEAR	INDEX
1975	77
1977	100
1979	126
1981	134

Fuente: Economic Report of the President, 1988, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1988

11. **a.** Obtenga una ecuación de la recta de mínimos cuadrados de y sobre x para los siguientes datos. Considérese a 1985 como el año $x = 1$, etcétera,

Envíos de computadoras que hizo la Acme Computer Company al Extranjero (en millares).

Año	Cantidad
1985	35
1986	31
1987	26
1988	24
1989	26

b. Para los datos de la parte (a), considérese a 1985 como el año $x = -2$, 1986 como el año $x = -1$, 1987 como el año $x = 0$, etcétera. En este caso, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Ajuste una recta de mínimos cuadrados y obsérvese la forma en que se simplifican los cálculos.

12. Para la siguiente serie de tiempo, determine una ecuación de la recta de regresión que mejor se ajuste a los datos. Considérese a 1983 como año $x = -2$, 1984 como año $x = -1$, etcétera.

Índice de Precios al Consumidor—Atención Médica 1983-1987 (1967 = 100)

Año	Índice
1983	357
1984	380
1985	403
1986	434
1987	462

Fuente: Economic Report of the President, 1988, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1988.

17.10 Un comentario sobre las funciones homogéneas*

Muchas de las funciones que son útiles en el análisis económico comparten la propiedad de ser homogéneas.

DEFINICIÓN

Se dice que una función $z = f(x, y)$ es ***homogénea de grado n*** *(en donde n es una constante) si, para* ***todos*** *los valores reales positivos de* λ,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Verbalmente, si tanto x como y se multiplican por el mismo número real positivo, entonces el valor resultante de la función es una potencia del número multiplicado por el valor funcional $f(x, y)$. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 xy^2 \\ &= \lambda^3(x^3 - 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y). \end{aligned}$$

Consecuentemente, f es homogénea de grado tres.

Una función homogénea que es de importancia en Economía es la función de producción de Cobb-Douglas:

$$P = f(l, k) = Al^{\alpha}k^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ y } A \text{ son constantes}).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda l, \lambda k) &= A(\lambda l)^{\alpha}(\lambda k)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha} l^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} k^{1-\alpha} \\ &= \lambda A l^{\alpha} k^{1-\alpha} = \lambda f(l, k). \end{aligned}$$

Por tanto f es homogénea de grado 1. Por ejemplo, $f(l, k) = 2l^{0.3}k^{0.7}$ es una función homogénea de grado 1.

Las funciones de producción homogéneas de grado 1 tienen una propiedad interesante. Si f es una de tales funciones, entonces

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda f(l, k).$$

Así, si se duplican todos los insumos, entonces,

$$f(2l, 2k) = 2f(l, k),$$

y se duplica la producción. De manera similar, si se triplican todos los insumos, se triplica la producción, etc. En resumen, el mismo cambio proporcional en cada uno de los factores de los insumos de producción da como resultado el mismo cambio proporcional en la producción.

Considerando las derivadas parciales de una función homogénea puede obtenerse un resultado importante. Sea $f(l, k)$ una función homogénea de producción de grado n. Entonces se tiene la identidad

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda^n f(l, k). \tag{1}$$

* Esta sección contiene material que proviene de la Sección 17.6 y se le puede omitir sin perder continuidad.

Considérese el lado izquierdo de la Ecuación (1). Si $r = \lambda l$ y $s = \lambda k$, entonces la Ecuación (1) se convierte en

$$f(r, s) = \lambda^n f(l, k). \tag{2}$$

Ahora se obtiene la derivada parcial con respecto a λ en ambos miembros. Para el lado izquierdo, $f(r, s)$, por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)] &= \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]\frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]\frac{\partial s}{\partial \lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]l + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]k. \end{aligned} \tag{3}$$

Para el lado derecho de la Ecuación (2),

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^n f(l, k)] = n\lambda^{n-1} f(l, k). \tag{4}$$

Utilizando las Ecs. (3) y (4), se iguala $\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)]$ a $\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^n f(l, k)]$:

$$l\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] + k\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = n\lambda^{n-1} f(l, k).$$

En particular, si $\lambda = 1$, entonces $r = l$ y $s = k$; por lo tanto, $f(r, s) = f(l, k)$. En consecuencia, $\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]$ y $\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]$. Por consiguiente, se tiene lo que se llama *Teorema de Euler* para funciones homogéneas:

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = nf(l, k). \tag{5}$$

Ahora, si f es homogénea de grado 1, como la función de Cobb-Douglas, entonces $n = 1$ y la Ecuación (5) se convierte en

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = f(l, k).$$

Consecuentemente, si se multiplica el producto marginal de cada insumo por la cantidad del mismo, la suma es igual al producto total.

17.11 Integrales múltiples

Se debe recordar que la integral definida de una función de una variable se refiere a la integración sobre un *intervalo*. Existen también integrales definidas de funciones de dos variables, a las que se les da el nombre de **integrales dobles** (definidas). Éstas implican la integración sobre una *región* de un plano.

Por ejemplo, el símbolo

$$\int_0^2 \int_3^4 xy \, dx \, dy, \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy \, dx \right] dy,$$

es la integral doble de $f(x, y) = xy$ sobre una región determinada por los límites de integración. Esta región está formada por todos los puntos (x, y) del plano x, y, tales que $3 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 2$ lo cual se muestra en la Figura 17.19. En esencia, una integral doble es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x, y)\, \Delta y\, \Delta x$, en la que en el caso actual, los puntos (x, y) se encuentran en la región sombreada. Más adelante se presenta una interpretación geométrica de las integrales dobles.

Para evaluar

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\, dx\, dy \quad \text{o bien} \quad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy\, dx \right] dy,$$

se emplean integraciones sucesivas comenzando con la integral que se encuentra más hacia la parte interior. En primer lugar se evalúa

$$\int_3^4 xy\, dx$$

considerando a y como constante e integrando con respecto a x entre los límites 3 y 4.

$$\int_3^4 xy\, dx = \frac{x^2 y}{2}\bigg|_3^4.$$

Introduciendo los límites para la variable x, se tiene

$$\frac{4^2 \cdot y}{2} - \frac{3^2 \cdot y}{2} = \frac{16y}{2} - \frac{9y}{2} = \frac{7}{2} y.$$

Ahora se integra este resultado con respecto a x entre los límites 0 y 2.

$$\int_0^2 \frac{7}{2} y\, dy = \frac{7y^2}{4}\bigg|_0^2 = \frac{7 \cdot 2^2}{4} - 0 = 7.$$

De donde

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\, dx\, dy = 7.$$

Ahora, considérese la doble integral

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx \quad \text{o bien} \quad \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx.$$

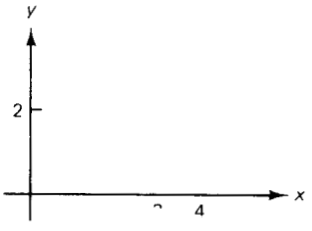


FIGURA 17.19

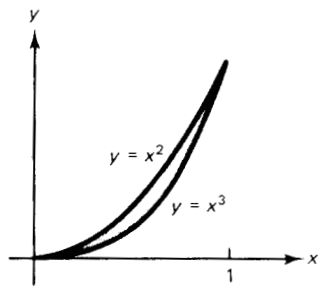


FIGURA 17.20

Aquí se integra primero con respecto a y y después con respecto a x. La región sobre la que tiene lugar la integración es todos los puntos (x, y) en donde $x^3 \leq y \leq x^2$ y $0 \leq x \leq 1$ (Figura 17.20) Se evalúa esta doble integral tratando primero a x como constante e integrando $x^3 - xy$ con respecto a y, entre x^3 y x^2. Después, se integra el resultado con respecto a x, entre 0 y 1.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{x^3}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\left[x^3(x^2) - \frac{x(x^2)^2}{2} \right] - \left[x^3(x^3) - \frac{x(x^3)^2}{2} \right] \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^5 - \frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^6}{12} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{16} \right) \Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} \right) - 0 = \frac{1}{336}.$$

EJEMPLO 1

Evaluar $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx.$

Aquí se integra primero con respecto a y.

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_{0}^{1-x} (2x + 1)\, dy \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2xy + y) \Big|_0^{1-x} dx = \int_{-1}^{1} \{[2x(1 - x) + (1 - x)] - 0\}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + x + 1)\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{2}{3}.$$

EJEMPLO 2

Evaluar $\int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} dx\, dy.$

Primero se integra con respecto a x:

$$\int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} dx\, dy = \int_1^{\ln 2} \left[\int_{e^y}^{2} dx \right] dy = \int_1^{\ln 2} x \Big|_{e^y}^{2} dy$$

$$= \int_1^{\ln 2} (2 - e^y)\, dy = (2y - e^y) \Big|_1^{\ln 2}$$

$$= (2 \ln 2 - 2) - (2 - e) = 2 \ln 2 - 4 + e$$

$$= \ln 4 - 4 + e.$$

Puede interpretarse una integral doble en términos del volumen de una región entre el plano x, y y una superficie $z = f(x, y)$ si $z \geq 0$. En la Figura 17.21 se presenta una región cuyo volumen desea considerarse. El elemento de volumen para esta región es una columna vertical. Su altura es aproximadamente $z = f(x, y)$ y el área de su base es $\Delta y\, \Delta x$. Por ello, su volumen es también aproximadamente $f(x, y)\, \Delta y\, \Delta x$. Es posible determinar el volumen de la región completa sumando los volúmenes de todos esos elementos para $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ por medio de una integral doble. Así,

$$\text{volumen} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

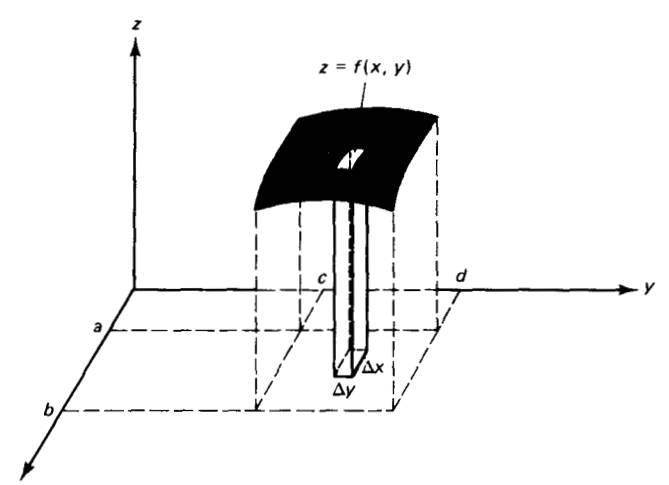


FIGURA 17.21

Las **integrales triples** se manejan evaluando sucesivamente tres integrales, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Evaluar $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dz \, dy \, dx$.

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^{x-y} x \, dz \right] dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (xz) \Big|_0^{x-y} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x [x(x-y) - 0] \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 - xy) \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2} \right) - 0 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} \, dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

EJERCICIOS 17.11

En los Problemas **1-22,** *evalúe las integrales múltiples.*

1. $\int_0^3 \int_0^4 x \, dy \, dx$.

2. $\int_0^2 \int_1^2 y \, dy \, dx$.

3. $\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy$.

4. $\int_0^2 \int_0^3 x^2 \, dy \, dx$.

5. $\int_1^3 \int_1^2 (x^2 - y) \, dx \, dy$.

6. $\int_{-1}^2 \int_1^4 (x^2 - 2xy) \, dy \, dx$.

7. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) \, dy \, dx$.

8. $\int_0^3 \int_0^x (x^2 + y^2) \, dy \, dx$.

9. $\int_0^6 \int_0^{3x} y \, dy \, dx$.

10. $\int_1^2 \int_0^{x-1} y \, dy \, dx$.

11. $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 2x^2 y \, dy \, dx$.

12. $\int_0^2 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx$.

13. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx \, dy$.

14. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y \, dx \, dy$.

15. $\int_{-1}^1 \int_x^{1-x} (x + y) \, dy \, dx$.

16. $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x \, dx \, dy$.

17. $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y} \, dx \, dy$.

18. $\int_2^3 \int_0^2 e^{x-y} \, dx \, dy$.

19. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$.

20. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dz \, dy \, dx$.

21. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dz \, dy \, dx$.

22. $\int_0^2 \int_{y^2}^{3y} \int_0^x dz \, dx \, dy$.

23. En Estadística, se representa una función densidad conjunta $z = f(x, y)$, definida en una región del plano xy, mediante una superficie en el espacio. La probabilidad de

$$a \le x \le b \text{ y } c \le y \le d$$

está dada por

$$P(a \le x \le b,\ c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

y la representa el volumen ubicado entre la gráfica de f y una región rectangular dada por

$$a \le x \le b \text{ y } c \le y \le d$$

Si $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ es una función densidad conjunta, en donde $x \ge 0$ y $y \ge 0$, halle

$$P(0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2)$$

y exprese la respuesta en términos de e.

24. En el Problema 23 sea $f(x, y) = 12e^{-4x-3y}$ para $x, y \ge 0$. Halle

$$P(3 \le x \le 4,\ 2 \le y \le 6)$$

y dé la respuesta en términos de e.

25. En el Problema 23 sea $f(x, y) = x/8$, en donde $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 4$. Obtenga $P(x \ge 1, y \ge 2)$.

26. En el Problema 23 sea f la función densidad uniforme $f(x, y) = 1$ definida sobre el cuadrado unidad $0 \le x \le 1$, y $0 \le y \le 1$. Determine la probabilidad de que $0 \le x \le \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4} \le y \le \frac{3}{4}$.

17.12 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 17.1 sistema coordenado tridimensional $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función de n variables plano x,y plano x,z plano y,z octante trazas

Sección 17.2 derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $f_x(x, y)$ $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ $f_x(x_0, y_0)$

Sección 17.3 función de costos conjuntos función de producción productividad marginal productos que compiten entre sí productos complementarios

Sección 17.4 diferenciación parcial implícita

Sección 17.5 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ f_{xy} f_{yx} f_{xx} f_{yy}

Sección 17.6 regla de la cadena variable intermedia

Sección 17.7 máximos y mínimos relativos (o locales) punto crítico prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Sección 17.8 eliminar los multiplicadores de Lagrange

Sección 17.9 diagrama de dispersión método de mínimos cuadrados línea de regresión de y sobre x números índices

Sección 17.10 función homogénea de grado n

Sección 17.11 integral doble integral triple

RESUMEN

Es posible ampliar el concepto de una función de una variable a funciones de varias variables. Los datos de entrada para funciones de n variables son n-adas. En general, la gráfica de una función de dos variables es

una superficie en un sistema coordenado tridimensional. Las funciones con más de dos variables no se pueden representar geométricamente.

Para una función de n variables se consideran n derivadas parciales. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, se tienen las derivadas parciales de f con respecto a x, con respecto a y y con respecto a z, que se denotan por f_x, f_y y f_z, o bien por $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$, respectivamente. Para evaluar $f_x(x, y, z)$, se consideran a y y a z como constantes y se diferencia f con respecto a x en la forma usual. Las otras derivadas parciales se encuentran de modo semejante. Puede interpretarse $f_x(x, y, z)$ como el cambio aproximado en w que se produce por un cambio unitario en x cuando se mantienen fijas y y z. Existen interpretaciones similares para las otras derivadas parciales.

Se puede definir en forma implícita a una función de varias variables. En este caso, se obtienen sus derivadas parciales mediante diferenciación (parcial) implícita.

Ocurren con frecuencia funciones de varias variables en el análisis económico y de negocios, así como en otras áreas de estudio. Si un fabricante elabora x unidades del producto X y y unidades del producto Y, entonces el costo total c de estas unidades es función de x y y, y se le denomina función de costos conjuntos. A las derivadas parciales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ se les conoce como costos marginales con respecto a x y y, respectivamente. Por ejemplo, puede interpretarse a $\partial c/\partial x$ como el costo aproximado de fabricar una unidad extra de X al tiempo que se mantiene fijo el nivel de producción de Y.

Si se utilizan l unidades de mano de obra y k unidades de capital para fabricar P unidades de un producto, entonces a la función $P = f(l, k)$ se le denomina función de producción. A las derivadas parciales de P se les llama funciones de productividad marginal.

Supóngase que para dos productos A y B la cantidad de demanda de cada uno de ellos depende de los precios de ambos. Si q_A y q_B son las cantidades de A y B que se demandan cuando sus precios son p_A y p_B, respectivamente, entonces q_A y q_B son cada una funciones de p_A y p_B. Cuando $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$, entonces A y B reciben el nombre de productos que compiten entre sí (o sustitutos). Cuando $\partial q_A/\partial p_B < 0$ y $\partial q_B/\partial p_A < 0$, entonces A y B se llaman productos complementarios.

Si $z = f(x, y)$ en donde $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$, entonces puede considerarse a z como función de r y s. Para hallar, por ejemplo, $\partial z/\partial r$, es posible usar la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Una derivada parcial de una función de n variables es también función de n variables. Obteniendo en forma sucesiva derivadas parciales de derivadas parciales, se tienen las derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, si f es función de x y y, entonces f_{xy} denota la derivada parcial de f_x con respecto a y; a f_{xy} se le denomina segunda derivada parcial de f, primero con respecto a x y después con respecto a y.

Si la función $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) debe ser una solución del sistema.

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Cualquier solución de este sistema recibe el nombre de punto crítico de f. Así, los puntos críticos son aquellos en los que pueden ocurrir extremos relativos. La prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables da las condiciones en las cuales un punto crítico corresponde a un máximo o a un mínimo relativo. Establece que si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2,$$

entonces

1. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);
2. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0);
3. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni máximo relativo ni mínimo relativo en (x_0, y_0);
4. si $D(x_0, y_0) = 0$, no se puede obtener ninguna conclusión con respecto a extremos en (x_0, y_0) y se requiere un análisis más detallado.

Para localizar puntos críticos de una función de varias variables sujeta a una restricción, se puede aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Por ejemplo, para obtener los puntos críticos de $f(x, y, z)$, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$, en primer lugar se forma la función

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Resolviendo el sistema

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_\lambda = 0,$$

resultan los puntos críticos de F. Si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es uno de esos puntos críticos, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción. Es importante escribir la restricción en la forma $g(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, si la restricción es $2x + 3y - z = 4$, entonces $g(x, y, z) = 2x + 3y - z - 4$ [o bien $g(x, y, z) = 4 - 2x - 3y + z$]. Si $f(x, y, z)$ está sujeta a dos restricciones, $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, entonces se formaría la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ y se resolvería el sistema

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_{\lambda_1} = 0, \quad F_{\lambda_2} = 0.$$

En ocasiones dos variables, por ejemplo x y y, pueden estar relacionadas de tal forma que su relación sea aproximadamente lineal. Cuando se dan puntos (x_i, y_i), en donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, se puede ajustar una línea recta que se aproxime a ellos. Tal recta es la línea de regresión (o línea de mínimos cuadrados) de y sobre x, y está dada por $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, en donde

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

y

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Pueden utilizarse los valores de $\hat{y}$ para pronosticar valores de y dados ciertos valores de x.

Cuando se trabaja con funciones de varias variables pueden considerarse sus integrales múltiples. Éstas se determinan mediante integraciones sucesivas. Por ejemplo, la integral doble

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\, dx\, dy$$

se determina primero considerando a y como constante e integrando $x + y$ con respecto a x. Después de evaluar entre los límites 0 y y se integra el resultado con respecto a y, de $x = 1$ a $x = 2$. En consecuencia

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^y (x + y)\, dx \right] dy.$$

Las integrales triples implican funciones de tres variables y se evalúan también mediante integración sucesiva.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-4,** *esquematice las superficies dadas.*

1. $2x + 3y + z = 9$. **2.** $z = x$. **3.** $z = y^2$. **4.** $x^2 + z^2 = 1$.

En los Problemas **5-16**, *determine las derivadas parciales que se señalan.*

5. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 1$; $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.

6. $P = l^3 + k^3 - lk$; $\partial P/\partial l$, $\partial P/\partial k$.

7. $z = \dfrac{x}{x + y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8. $f(p_A, p_B) = 2(p_A - 20) + 3(p_B - 30)$; $f_{p_A}(p_A, p_B)$.

9. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$.

10. $w = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$; $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

11. $w = e^{x^2yz}$; $w_{xy}(x, y, z)$.

12. $f(x, y) = xy \ln(xy)$; $f_{xy}(x, y)$.

13. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z^2)$; $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[f(x, y, z)]$.

14. $z = (x^2 - y)(y^2 - 2xy)$; $\partial^2 z/\partial y^2$.

15. $w = xe^{yz} \ln z$; $\partial w/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x \partial z$.

16. $P = 100l^{0.11}k^{0.89}$; $\partial^2 P/\partial k \partial l$.

+**17.** Si $w = x^2 + 2xy + 3y^2$, $x = e^r$, y $y = \ln(r + s)$, halle $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$.

*+**18.** Si $z = \ln(x/y) + e^y - xy$, $x = r^2s^2$, y $y = r + s$, obtenga $\partial z/\partial s$.

*+**19.** Si $x^2 + 2xy - 2z^2 + xz + 2 = 0$, determine $\partial z/\partial x$.

*+**20.** Si $z^2 - e^{yz} + \ln z = e^{xz} = 0$, calcule $\partial z/\partial y$.

21. Si la función de producción de un fabricante está definida por $P = 20l^{0.7}k^{0.3}$, determine las funciones de productividad marginal.

22. El costo en que incurre un fabricante al elaborar x unidades del producto X y y unidades del producto Y está dado por $c = 5x + 0.03xy + 7y + 200$. Calcule el costo marginal (parcial) con respecto a x cuando $x = 100$ y $y = 200$.

23. Si $q_A = 200 - 3p_A + p_B$ y $q_B = 50 - 5p_B + p_A$, en donde q_A y q_B son el número de unidades de demanda de los productos A y B, respectivamente, y p_A y p_B son sus respectivos precios por unidad, determine si A y B son productos complementarios o que compiten entre sí.

24. Existe un modelo para la industria que describe la tasa α (la letra griega alfa) a la cual una innovación sustituye a un proceso establecido. Está dada por†

$$\alpha = Z + 0.530P - 0.027S,$$

en donde Z es una constante que depende de la industria específica, P es un índice de redituabilidad de la innovación y S es un índice de la medida de la inversión necesaria para aprovechar la innovación. Obtenga $\partial\alpha/\partial P$ y $\partial\alpha/\partial S$.

25. Examine $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 3$ y diga si tiene extremos relativos.

26. Examine $f(w, z) = 2w^3 + 2z^3 - 6wz + 7$ y diga si tiene extremos relativos.

27. Una caja rectangular de cartón, sin tapa, debe tener un volumen de 32 pies cúbicos. Halle las dimensiones de la caja que hagan que se minimice la cantidad de cartón por utilizar.

28. Localice todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = xyz$ sujeto a la condición

$$3x + 2y + 4z - 120 = 0 \quad (xyz \neq 0).$$

29. Halle todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $3x + 2y + z = 14$.

30. En un experimento† se inyectó a un grupo de peces bacterias vivas. De los peces que se mantuvieron a 28°C, el porcentaje p de los que sobrevivieron a la infección durante t horas después de la inyección está dado en la tabla que aparece enseguida. Halle la línea de regresión de p sobre t.

t	8	10	18	20	48
p	82	79	78	78	64

* Re + Refiérase a la Sección 17.6
' Re. * Refiérase a la Secc. 17.4 o a la 17.6

† A.P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein y cols. "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

† J.B. Covert y W.W. Reynolds, "Survival Value of Fever in Fish", *Nature*, 267, núm. 5606 (1977), 43-45.

31. Determine la línea de regresión o de mínimos cuadrados de y sobre x para los datos que se presentan enseguida. Considere el año 1984 como el año $x = 1$, etcétera.

Gastos en equipos de la Allied Computer Company, 1984-1989 (en millones de dólares)

Años	Gastos
1984	15
1985	22
1986	21
1987	27
1988	26
1989	34

En los Problemas **32-35**, *evalúe las integrales dobles.*

32. $\int_1^2 \int_0^y x^2 y^2 \, dx \, dy.$

33. $\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy \, dx \, dy.$

34. $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x \, dx \, dy.$

35. $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 + 2xy - 3y^2) \, dy \, dx.$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Análisis de datos para modelar el enfriamiento*

En el Capítulo 16 se trabajó con la ley del enfriamiento ideada por Newton, la cual se puede utilizar para describir la temperatura de un cuerpo que se enfría con respecto al tiempo. Aquí se determinará la relación de manera empírica, mediante el análisis de datos. Esto ilustrará la forma en que se diseñan modelos matemáticos en muchos casos del mundo real.

Supóngase que se desea crear un modelo matemático para representar el enfriamiento de té caliente, después de que se introduce a un refrigerador. Para ello se coloca en el refrigerador el recipiente que contiene esa bebida caliente con un termómetro puesto en ella, y periódicamente se lee y registra la temperatura del té. En la Tabla 17.6 se presentan los datos recopilados, en donde T es temperatura en grados Fahrenheit, a los t minutos después de que se puso el té dentro del refigerador. Inicialmente,

TABLA 17.6

TIEMPO t	TEMPERATURA T	TIEMPO t	TEMPERATURA T
0 min	124 °F	128 min	64 °F
5	118	144	62
10	114	178	59
16	109	208	55
20	106	244	51
35	97	299	50
50	89	331	49
65	82	391	47
85	74	toda la noche	45

* Adaptado de Gloria Barrett, Dot Doyle, y Dan Teague, "Using Data Analysis in Precalculus to Model Cooling", *The Mathematics Teacher*, 81, no. 8 (Noviembre 1988), 680-84. Con autorización de National Council of Teachers of Mathematics.

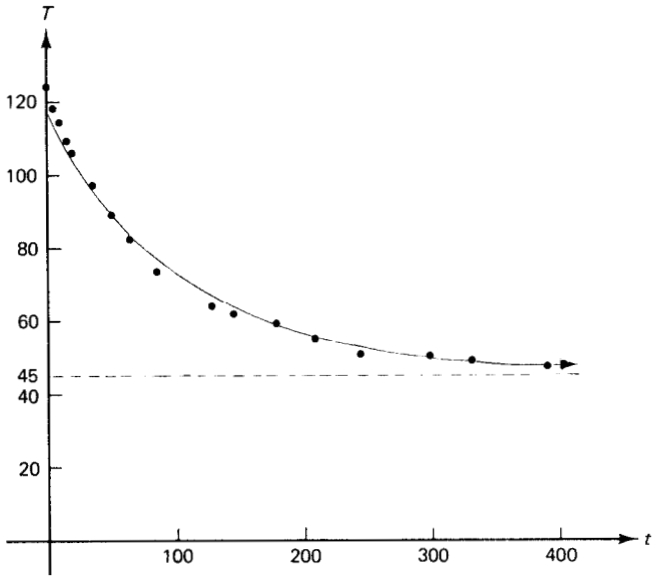


FIGURA 17.22

es decir, en $t = 0$, la temperatura es 124 °F; cuando $t = 391$, entonces $T = 47$ °F. Después de haber estado en el refrigerador durante toda la noche, la temperatura es de 45 °F. En la Figura 17.22 se presenta una gráfica de los puntos de datos (t, T) para $(t = 0)$ hasta $t = 391$.

La disposición de esos puntos indica en gran medida que casi están en la gráfica de una función exponencial decreciente, como la que se muestra en la Figura 17.22. En particular, como la temperatura después de haber transcurrido la noche es 45 °F, esta función exponencial debe tener a $T = 45$ como asíntota horizontal. Una función como ésta tiene la forma

$$\hat{T} = Ce^{at} + 45. \tag{1}$$

en donde $\hat{T}$ da el pronóstico de la temperatura en el tiempo t, y C y a son constantes con $a < 0$. (Obsérvese que, como $a < 0$, entonces cuando $t \to \infty$, se tiene $Ce^{at} \to 0$, por lo que $Ce^{at} + 45 \to 45$).

Ahora el problema consiste en encontrar valores de C y a de manera que la curva dada en la Ec. (1) se ajuste de la mejor manera a los datos. Escribiendo la ecuación (1) como

$$\hat{T} - 45 = Ce^{at}$$

y después tomando los logaritmos naturales en ambos lados, se obtiene una forma lineal:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{T} - 45) &= \ln(Ce^{at}), \\ \ln(\hat{T} - 45) &= \ln C + \ln e^{at}, \\ \ln(\hat{T} - 45) &= \ln C + at. \end{aligned} \tag{2}$$

Fijando $\hat{T}_l = \ln(\hat{T} - 45)$, la Ec. (2) se convierte en

$$\hat{T}_l = at + \ln C. \tag{3}$$

Como a y $\ln C$ son constantes, la Ec. (3) es una ecuación lineal en $\hat{T}_l$ y t. Esto significa que, para los datos originales, si se trazan los puntos $[t, \ln(T - 45)]$, deben caer casi en una recta. Estos puntos se muestran en la Figura 17.23, en donde T_l representa $\ln(T - 45)$. Así, para la recta dada por la Ec. (3) y que pronostica T_l, puede suponerse que es la recta de regresión lineal de T_l sobre t. Es decir, a y $\ln C$ son los coeficientes de regresión lineal. Utilizando las fórmulas para estos coeficientes

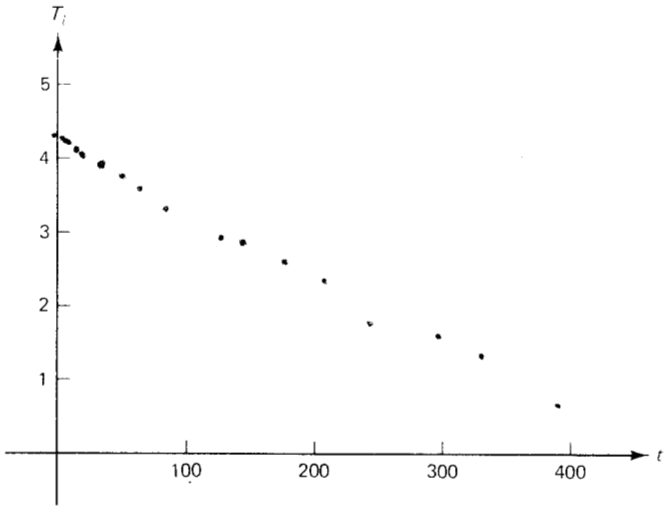


FIGURA 17.23

y una calculadora puede determinarse que

$$a = \frac{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2} \approx -0.00921$$

y

$$\ln C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2} \approx 4.260074.$$

Como $\ln C \approx 4.260074$, entonces $C = e^{4.260074} \approx 70.82$. Por ello, de la Ec. (1),

$$\hat{T} = 70.82e^{-0.00921t} + 45,$$

que es un modelo que pronostica la temperatura del té en enfriamiento. La gráfica de esta función es la curva que se muestra en la Figura 17.22.

EJERCICIOS

1. Para los datos siguientes, ubique los puntos de datos en un plano coordenado x,y. Supóngase que tales puntos caen cerca de la gráfica de una función exponencial decreciente con asíntota horizontal $y = 5$. Utilice la técnica descrita en esta Aplicación Práctica para determinar tal función.

x	0	1	4	7	10
y	15	12	9	7	6

2. Supóngase que ciertos datos observados siguen una relación dada por $y = C/x^r$, en donde x, y, $C > 0$. Tomando el logaritmo natural en ambos lados, probar que $\ln x$ y $\ln y$ están relacionados linealmente. Por ello, los puntos $(\ln x, \ln y)$ caen en una línea recta.
3. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (véase la Secc. 17.7) y los puntos de datos (0, 124) y (128, 64) para determinar la temperatura T del té mencionado, al tiempo t. Supóngase que la temperatura ambiente es de 45 °F.

Apéndice **A**

Potencias, raíces y recíprocos

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
1.0	1.0000	1.0000	3.1623	1.0000	1.0000	2.1544	4.6416	1.0000
1.1	1.2100	1.0488	3.3166	1.3310	1.0323	2.2240	4.7914	0.9091
1.2	1.4400	1.0954	3.4641	1.7280	1.0627	2.2894	4.9324	0.8333
1.3	1.6900	1.1402	3.6056	2.1970	1.0914	2.3513	5.0658	0.7692
1.4	1.9600	1.1832	3.7417	2.7440	1.1187	2.4101	5.1925	0.7143
1.5	2.2500	1.2247	3.8730	3.3750	1.1447	2.4662	5.3133	0.6667
1.6	2.5600	1.2649	4.0000	4.0960	1.1696	2.5198	5.4288	0.6250
1.7	2.8900	1.3038	4.1231	4.9130	1.1935	2.5713	5.5397	0.5882
1.8	3.2400	1.3416	4.2426	5.8320	1.2164	2.6207	5.6462	0.5556
1.9	3.6100	1.3784	4.3589	6.8590	1.2386	2.6684	5.7489	0.5263
2.0	4.0000	1.4142	4.4721	8.0000	1.2599	2.7144	5.8480	0.5000
2.1	4.4100	1.4491	4.5826	9.2610	1.2806	2.7589	5.9439	0.4762
2.2	4.8400	1.4832	4.6904	10.6480	1.3006	2.8020	6.0368	0.4545
2.3	5.2900	1.5166	4.7958	12.1670	1.3200	2.8439	6.1269	0.4348
2.4	5.7600	1.5492	4.8990	13.8240	1.3389	2.8845	6.2145	0.4167
2.5	6.2500	1.5811	5.0000	15.6250	1.3572	2.9240	6.2996	0.4000
2.6	6.7600	1.6125	5.0990	17.5760	1.3751	2.9625	6.3825	0.3846
2.7	7.2900	1.6432	5.1962	19.6830	1.3925	3.0000	6.4633	0.3704
2.8	7.8400	1.6733	5.2915	21.9520	1.4095	3.0366	6.5421	0.3571
2.9	8.4100	1.7029	5.3852	24.3890	1.4260	3.0723	6.6191	0.3448
3.0	9.0000	1.7321	5.4772	27.0000	1.4422	3.1072	6.6943	0.3333
3.1	9.6100	1.7607	5.5678	29.7910	1.4581	3.1414	6.7679	0.3226
3.2	10.2400	1.7889	5.6569	32.7680	1.4736	3.1748	6.8399	0.3125
3.3	10.8900	1.8166	5.7446	35.9370	1.4888	3.2075	6.9104	0.3030
3.4	11.5600	1.8439	5.8310	39.3040	1.5037	3.2396	6.9795	0.2941
3.5	12.2500	1.8708	5.9161	42.8750	1.5183	3.2711	7.0473	0.2857
3.6	12.9600	1.8974	6.0000	46.6560	1.5326	3.3019	7.1138	0.2778
3.7	13.6900	1.9235	6.0828	50.6530	1.5467	3.3322	7.1791	0.2703
3.8	14.4400	1.9494	6.1644	54.8720	1.5605	3.3620	7.2432	0.2632
3.9	15.2100	1.9748	6.2450	59.3190	1.5741	3.3912	7.3061	0.2564

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
4.0	16.0000	2.0000	6.3246	64.0000	1.5874	3.4200	7.3681	0.2500
4.1	16.8100	2.0248	6.4031	68.9210	1.6005	3.4482	7.4290	0.2439
4.2	17.6400	2.0494	6.4807	74.0880	1.6134	3.4760	7.4889	0.2381
4.3	18.4900	2.0736	6.5574	79.5070	1.6261	3.5034	7.5478	0.2326
4.4	19.3600	2.0976	6.6333	85.1840	1.6386	3.5303	7.6059	0.2273
4.5	20.2500	2.1213	6.7082	91.1250	1.6510	3.5569	7.6631	0.2222
4.6	21.1600	2.1448	6.7823	97.3360	1.6631	3.5830	7.7194	0.2174
4.7	22.0900	2.1679	6.8557	103.823	1.6751	3.6088	7.7750	0.2128
4.8	23.0400	2.1909	6.9282	110.592	1.6869	3.6342	7.8297	0.2083
4.9	24.0100	2.2136	7.0000	117.649	1.6985	3.6593	7.8837	0.2041
5.0	25.0000	2.2361	7.0711	125.000	1.7100	3.6840	7.9370	0.2000
5.1	26.0100	2.2583	7.1414	132.651	1.7213	3.7084	7.9896	0.1961
5.2	27.0400	2.2804	7.2111	140.608	1.7325	3.7325	8.0415	0.1923
5.3	28.0900	2.3022	7.2801	148.877	1.7435	3.7563	8.0927	0.1887
5.4	29.1600	2.3238	7.3485	157.464	1.7544	3.7798	8.1433	0.1852
5.5	30.2500	2.3452	7.4162	166.375	1.7652	3.8030	8.1932	0.1818
5.6	31.3600	2.3664	7.4833	175.616	1.7758	3.8259	8.2426	0.1786
5.7	32.4900	2.3875	7.5498	185.193	1.7863	3.8485	8.2913	0.1754
5.8	33.6400	2.4083	7.6158	195.112	1.7967	3.8709	8.3396	0.1724
5.9	34.8100	2.4290	7.6811	205.379	1.8070	3.8930	8.3872	0.1695
6.0	36.0000	2.4495	7.7460	216.000	1.8171	3.9149	8.4343	0.1667
6.1	37.2100	2.4698	7.8102	226.981	1.8272	3.9365	8.4809	0.1639
6.2	38.4400	2.4900	7.8740	238.328	1.8371	3.9579	8.5270	0.1613
6.3	39.6900	2.5100	7.9372	250.047	1.8469	3.9791	8.5726	0.1587
6.4	40.9600	2.5298	8.0000	262.144	1.8566	4.0000	8.6177	0.1563
6.5	42.2500	2.5495	8.0623	274.625	1.8663	4.0207	8.6624	0.1538
6.6	43.5600	2.5690	8.1240	287.496	1.8758	4.0412	8.7066	0.1515
6.7	44.8900	2.5884	8.1854	300.763	1.8852	4.0615	8.7503	0.1493
6.8	46.2400	2.6077	8.2462	314.432	1.8945	4.0817	8.7937	0.1471
6.9	47.6100	2.6268	8.3066	328.509	1.9038	4.1016	8.8366	0.1449
7.0	49.0000	2.6458	8.3666	343.000	1.9129	4.1213	8.8790	0.1429
7.1	50.4100	2.6646	8.4261	357.911	1.9220	4.1408	8.9211	0.1408
7.2	51.8400	2.6833	8.4853	373.248	1.9310	4.1602	8.9628	0.1389
7.3	53.2900	2.7019	8.5440	389.017	1.9399	4.1793	9.0041	0.1370
7.4	54.7600	2.7203	8.6023	405.224	1.9487	4.1983	9.0450	0.1351
7.5	56.2500	2.7386	8.6603	421.875	1.9574	4.2172	9.0856	0.1333
7.6	57.7600	2.7568	8.7178	438.976	1.9661	4.2358	9.1258	0.1316
7.7	59.2900	2.7749	8.7750	456.533	1.9747	4.2543	9.1657	0.1299
7.8	60.8400	2.7928	8.8318	474.552	1.9832	4.2727	9.2052	0.1282
7.9	62.4100	2.8107	8.8882	493.039	1.9916	4.2908	9.2443	0.1266
8.0	64.0000	2.8284	8.9443	512.000	2.0000	4.3089	9.2832	0.1250
8.1	65.6100	2.8460	9.0000	531.441	2.0083	4.3267	9.3217	0.1235
8.2	67.2400	2.8636	9.0554	551.368	2.0165	4.3445	9.3599	0.1220
8.3	68.8900	2.8810	9.1104	571.787	2.0247	4.3621	9.3978	0.1205
8.4	70.5600	2.8983	9.1652	592.704	2.0328	4.3795	9.4354	0.1190
8.5	72.2500	2.9155	9.2195	614.125	2.0408	4.3968	9.4727	0.1176
8.6	73.9600	2.9326	9.2736	636.056	2.0488	4.4140	9.5097	0.1163
8.7	75.6900	2.9496	9.3274	658.503	2.0567	4.4310	9.5464	0.1149
8.8	77.4400	2.9665	9.3808	681.472	2.0646	4.4480	9.5828	0.1136
8.9	79.2100	2.9833	9.4340	704.969	2.0723	4.4647	9.6190	0.1124
9.0	81.000	3.0000	9.4868	729.000	2.0801	4.4814	9.6549	0.1111
9.1	82.8100	3.0166	9.5394	573.571	2.0878	4.4979	9.6905	0.1099
9.2	84.6400	3.0332	9.5917	778.688	2.0954	4.5144	9.7259	0.1087
9.3	86.4900	3.0496	9.6436	804.357	2.1029	4.5307	9.7610	0.1075
9.4	88.3600	3.0659	9.6954	830.584	2.1105	4.5468	9.7959	0.1064

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
9.0	81.000	3.0000	9.4868	729.000	2.0801	4.4814	9.6549	0.1111
9.5	90.2500	3.0822	9.7468	857.375	2.1179	4.5629	9.8305	0.1053
9.6	92.1600	3.0984	9.7980	884.736	2.1253	4.5789	9.8648	0.1042
9.7	94.0900	3.1145	9.8489	912.673	2.1327	4.5947	9.8990	0.1031
9.8	96.0400	3.1305	9.8995	941.192	2.1400	4.6014	9.9329	0.1020
9.9	98.0100	3.1464	9.9499	970.299	2.1472	4.6261	9.9666	0.1010
10.0	100.000	3.1623	10.000	1000.00	2.1544	4.6416	10.0000	0.1000

Apéndice **B**

Valores de e^x y e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.00000	0.35	1.4191	0.70469
0.01	1.0101	0.99005	0.36	1.4333	0.69768
0.02	1.0202	0.98020	0.37	1.4477	0.69073
0.03	1.0305	0.97045	0.38	1.4623	0.68386
0.04	1.0408	0.96079	0.39	1.4770	0.67706
0.05	1.0513	0.95123	0.40	1.4918	0.67032
0.06	1.0618	0.94176	0.41	1.5068	0.66365
0.07	1.0725	0.93239	0.42	1.5220	0.65705
0.08	1.0833	0.92312	0.43	1.5373	0.65051
0.09	1.0942	0.91393	0.44	1.5527	0.64404
0.10	1.1052	0.90484	0.45	1.5683	0.63763
0.11	1.1163	0.89583	0.46	1.5841	0.63128
0.12	1.1275	0.88692	0.47	1.6000	0.62500
0.13	1.1388	0.87809	0.48	1.6161	0.61878
0.14	1.1503	0.86936	0.49	1.6323	0.61263
0.15	1.1618	0.86071	0.50	1.6487	0.60653
0.16	1.1735	0.85214	0.51	1.6653	0.60050
0.17	1.1853	0.84366	0.52	1.6820	0.59452
0.18	1.1972	0.83527	0.53	1.6989	0.58860
0.19	1.2092	0.82696	0.54	1.7160	0.58275
0.20	1.2214	0.81873	0.55	1.7333	0.57695
0.21	1.2337	0.81058	0.56	1.7507	0.57121
0.22	1.2461	0.80252	0.57	1.7683	0.56553
0.23	1.2586	0.79453	0.58	1.7860	0.55990
0.24	1.2712	0.78663	0.59	1.8040	0.55433
0.25	1.2840	0.77880	0.60	1.8221	0.54881
0.26	1.2969	0.77105	0.61	1.8404	0.54335
0.27	1.3100	0.76338	0.62	1.8589	0.53794
0.28	1.3231	0.75578	0.63	1.8776	0.53259
0.29	1.3364	0.74826	0.64	1.8965	0.52729
0.30	1.3499	0.74082	0.65	1.9155	0.52205
0.31	1.3634	0.73345	0.66	1.9348	0.51685
0.32	1.3771	0.72615	0.67	1.9542	0.51171
0.33	1.3910	0.71892	0.68	1.9739	0.50662
0.34	1.4049	0.71177	0.69	1.9937	0.50158

x	e^x	e^{-x}
0.70	2.0138	0.49659
0.71	2.0340	0.49164
0.72	2.0544	0.48675
0.73	2.0751	0.48191
0.74	2.0959	0.47711
0.75	2.1170	0.47237
0.76	2.1383	0.46767
0.77	2.1598	0.46301
0.78	2.1815	0.45841
0.79	2.2034	0.45384
0.80	2.2255	0.44933
0.81	2.2479	0.44486
0.82	2.2705	0.44043
0.83	2.2933	0.43605
0.84	2.3164	0.43171
0.85	2.3396	0.42741
0.86	2.3632	0.42316
0.87	2.3869	0.41895
0.88	2.4109	0.41478
0.89	2.4351	0.41066
0.90	2.4596	0.40657
0.91	2.4843	0.40252
0.92	2.5093	0.39852
0.93	2.5345	0.39455
0.94	2.5600	0.39063
0.95	2.5857	0.38674
0.96	2.6117	0.38289
0.97	2.6379	0.37908
0.98	2.6645	0.37531
0.99	2.6912	0.37158
1.00	2.7183	0.36788
1.10	3.0042	0.33287
1.20	3.3201	0.30119
1.30	3.6693	0.27253
1.40	4.0552	0.24660
1.50	4.4817	0.22313
1.60	4.9530	0.20190
1.70	5.4739	0.18268
1.80	6.0496	0.16530
1.90	6.6859	0.14957
2.00	7.3891	0.13534
2.10	8.1662	0.12246
2.20	9.0250	0.11080
2.30	9.9742	0.10026
2.40	11.023	0.09072

x	e^x	e^{-x}
2.50	12.182	0.08208
2.60	13.464	0.07427
2.70	14.880	0.06721
2.80	16.445	0.06081
2.90	18.174	0.05502
3.00	20.086	0.04979
3.10	22.198	0.04505
3.20	24.533	0.04076
3.30	27.113	0.03688
3.40	29.964	0.03337
3.50	33.115	0.03020
3.60	36.598	0.02732
3.70	40.447	0.02472
3.80	44.701	0.02237
3.90	49.402	0.02024
4.00	54.598	0.01832
4.10	60.340	0.01657
4.20	66686	0.01500
.430	73.700	0.01357
4.40	81.451	0.01227
4.50	90.107	0.01111
4.60	99.484	0.01005
4.70	109.95	0.00910
4.80	121.51	0.00823
4.90	134.29	0.00745
5.00	148.41	0.00674
5.10	164.02	0.00610
5.20	181.27	0.00552
5.30	200.34	0.00499
5.40	221.41	0.00452
5.50	244.69	0.00409
5.60	270.43	0.00370
5.70	298.87	0.00335
5.80	330.30	0.00303
5.90	365.04	0.00274
6.00	403.43	0.00248
6.25	518.01	0.00193
6.50	665.14	0.00150
6.75	854.06	0.00117
7.00	1096.6	0.00091
7.50	1808.0	0.00055
8.00	2981.0	0.00034
8.50	4914.8	0.00020
9.00	8103.1	0.00012
9.50	13360.	0.00007
10.00	22026.	0.00005

Apéndice **C**

Logaritmos naturales

En el cuerpo de la tabla, los primeros dos dígitos (y el punto decimal) de la mayor parte de los elementos se acarrean del elemento precedente de la primera columna. Por ejemplo, ln 3.32 ~ 1.19996. Sin embargo, un asterisco (*) señala que los primeros dos dígitos son los del elemento siguiente de la primera columna. Por ejemplo, ln 3.33 ~ 1.20297.

Para extender esta tabla a un número inferior a 1.0 o mayor que 10.09, escríbase el número en la forma $x = y \cdot 10^n$ en donde $1.0 \leq y < 10$ y utilícese el hecho de que $\ln x = \ln y + n \ln 10$. Algunos valores de $n \ln 10$ son

$$1 \ln 10 \approx 2.30259, \qquad 6 \ln 10 \approx 13.81551,$$
$$2 \ln 10 \approx 4.60517, \qquad 7 \ln 10 \approx 16.11810,$$
$$3 \ln 10 \approx 6.90776, \qquad 8 \ln 10 \approx 18.42068,$$
$$4 \ln 10 \approx 9.21034, \qquad 9 \ln 10 \approx 20.72327,$$
$$5 \ln 10 \approx 11.51293, \qquad 10 \ln 10 \approx 23.02585.$$

Por ejemplo,

$$\ln 332 = \ln[(3.32)(10^2)] = \ln 3.32 + 2 \ln 10$$
$$\approx 1.19996 + 4.60517 = 5.80513$$

y

$$\ln 0.0332 = \ln [(3.32)(10^{-2})] = \ln 3.32 - 2 \ln 10$$
$$\approx 1.19996 - 4.60517 = -3.40521.$$

Se pueden utilizar las propiedades de los logaritmos para encontrar el logaritmo de un número tal como $\frac{3}{8}$:

$$\ln \tfrac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 \approx 1.09861 - 2.07944$$
$$= -0.98083.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0 0000	0995	1980	2956	3922	4879	5827	6766	7696	8618
1.1	9531	*0436	*1333	*2222	*3103	*3976	*4842	*5700	*6551	*7395
1.2	0.1 8232	9062	9885	*0701	*1511	*2314	*3111	*3902	*4686	*5464
1.3	0.2 6236	7003	7763	8518	9267	*0010	*0748	*1481	*2208	*2930
1.4	0.3 3647	4359	5066	5767	6464	7156	7844	8526	9204	9878

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	0.4 0547	1211	1871	2527	3178	3825	4469	5108	5742	6373
1.6	7000	7623	8243	8858	9470	*0078	*0672	*1282	*1879	*2473
1.7	0.5 3063	3649	4232	4812	5389	5962	6531	7098	7661	8222
1.8	8779	9333	9884	*0432	*0977	*1519	*2058	*2594	*3127	*3658
1.9	0.6 4185	4710	5233	5752	6269	6783	7294	7803	8310	8813
2.0	9315	9813	*0310	*0804	*1295	*1784	*2271	*2755	*3237	*3716
2.1	0.7 4194	4669	5142	5612	6081	6547	7011	7473	7932	8390
2.2	8846	9299	9751	*0200	*0648	*1093	*1536	*1978	*2418	*2855
2.3	0.8 3291	3725	4157	4587	5015	5442	5866	6289	6710	7129
2.4	7547	7963	8377	8789	9200	9609	*0016	*0422	*0826	*1228
2.5	0.9 1629	2028	2426	2822	3216	3609	4001	4391	4779	5166
2.6	5551	5935	6317	6698	7078	7456	7833	8208	8582	8954
2.7	9325	9695	*0063	*0430	*0796	*1160	*1523	*1885	*2245	*2604
2.8	1.0 2962	3318	3674	4028	4380	4732	5082	5431	5779	6126
2.9	6471	6815	7158	7500	7841	8181	8519	8856	9192	9527
3.0	9861	*0194	*0526	*0856	*1186	*1514	*1841	*2168	*2493	*2817
3.1	1.1 3140	3462	3783	4103	4422	4740	5057	5373	5688	6002
3.2	6315	6627	6938	7248	7557	7865	8173	8479	8784	9089
3.3	9392	9695	9996	*0297	*0597	*0896	*1194	*1491	*1788	*2083
3.4	1.2 2378	2671	2964	3256	3547	3837	4127	4415	4703	4990
3.5	5276	5562	5846	6130	6413	6695	6976	7257	7536	7815
3.6	8093	8371	8647	8923	9198	9473	9746	*0019	*0291	*0563
3.7	1.3 0833	1103	1372	1641	1909	2176	2442	2708	2972	3237
3.8	3500	3763	4025	4286	4547	4807	5067	5325	5584	5841
3.9	6098	6354	6609	6864	7118	7372	7624	7877	8128	8379
4.0	8629	8879	9128	9377	9624	9872	*0118	*0364	*0610	*0854
4.1	1.4 1099	1342	1585	1828	2070	2311	2552	2792	3031	3270
4.2	3508	3746	3984	4220	4456	4692	4927	5161	5395	5629
4.3	5862	6094	6326	6557	6787	7018	7247	7476	7705	7933
4.4	8160	8387	8614	8840	9065	9290	9515	9739	9962	*0185
4.5	1.5 0408	0630	0851	1072	1293	1513	1732	1951	2170	2388
4.6	2606	2823	3039	3256	3471	3687	3902	4116	4330	4543
4.7	4756	4969	5181	5393	5604	5814	6025	6235	6444	6653
4.8	6862	7070	7277	7485	7691	7898	8104	8309	8515	8719
4.9	8924	9127	9331	9534	9737	9939	*0141	*0342	*0543	*0744
5.0	1.6 0944	1144	1343	1542	1741	1939	2137	2334	2531	2728
5.1	2924	3120	3315	3511	3705	3900	4094	4287	4481	4673
5.2	4866	5058	5250	5441	5632	5823	6013	6203	6393	6582
5.3	6771	6959	7147	7335	7523	7710	7896	8083	8269	8455
5.4	8640	8825	9010	9194	9378	9562	9745	9928	*0111	*0293
5.5	1.7 0475	0656	0838	1019	1199	1380	1560	1740	1919	2098
5.6	2277	2455	2633	2811	2988	3166	3342	3519	3695	3871
5.7	4047	4222	4397	4572	4746	4920	5094	5267	5440	5613
5.8	5786	5958	6130	6302	6473	6644	6815	6985	7156	7326
5.9	7495	7665	7834	8002	8171	8339	8507	8675	8842	9009
6.0	1.7 9176	9342	9509	9675	9840	*0006	*0171	*0336	*0500	*0665
6.1	1.8 0829	0993	1156	1319	1482	1645	1808	1970	2132	2294
6.2	2455	2616	2777	2938	3098	3258	3418	3578	3737	3896
6.3	4055	4214	4372	4530	4688	4845	5003	5160	5317	5473
6.4	5630	5786	5942	6097	6253	6408	6563	6718	6872	7026
6.5	7180	7334	7487	7641	7794	7947	8099	8251	8403	8555
6.6	8707	8858	9010	9160	9311	9462	9612	9762	9912	*0061
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.7	1.9 0211	0360	0509	0658	0806	0954	1102	1250	1398	1545
6.8	1692	1839	1986	2132	2279	2425	2571	2716	2862	3007
6.9	3152	3297	3442	3586	3730	3874	4018	4162	4305	4448
7.0	4591	4734	4876	5019	5161	5303	5445	5586	5727	5869
7.1	6009	6150	6291	6431	6571	6711	6851	6991	7130	7269
7.2	7408	7547	7685	7824	7962	8100	8238	8376	8513	8650
7.3	8787	8924	9061	9198	9334	9470	9606	9742	9877	*0013
7.4	2.0 0148	0283	0418	0553	0687	0821	0956	1089	1223	1357
7.5	1490	1624	1757	1890	2022	2155	2287	2419	2551	2683
7.6	2815	2946	3078	3209	3340	3471	3601	3732	3862	3992
7.7	4122	4252	4381	4511	4640	4769	4898	5027	5156	5284
7.8	5412	5540	5668	5796	5924	6051	6179	6306	6433	6560
7.9	6686	6813	6939	7065	7191	7317	7443	7568	7694	7819
8.0	7944	8069	8194	8318	8443	8567	8691	8815	8939	9063
8.1	9186	9310	9433	9556	9679	9802	9924	*0047	*0169	*0291
8.2	2.1 0413	0535	0657	0779	0900	1021	1142	1263	1384	1505
8.3	1626	1746	1866	1986	2106	2226	2346	2465	2585	2704
8.4	2823	2942	3061	3180	3298	3417	3535	3653	3771	3889
8.5	4007	4124	4242	4359	4476	4593	4710	4827	4943	5060
8.6	5176	5292	5409	5524	5640	5756	5871	5987	6102	6217
8.7	6332	6447	6562	6677	6791	6905	7020	7134	7248	7361
8.8	7475	7589	7702	7816	7929	8042	8155	8267	8380	8493
8.9	8605	8717	8830	8942	9054	9165	9277	9389	9500	9611
9.0	9722	9834	9944	*0055	*0166	*0276	*0387	*0497	*0607	*0717
9.1	2.2 0827	0937	1047	1157	1266	1375	1485	1594	1703	1812
9.2	1920	2029	2138	2246	2354	2462	2570	2678	2786	2894
9.3	3001	3109	3216	3324	3431	3538	3645	3751	3858	3965
9.4	4071	4177	4284	4390	4496	4601	4707	4813	4918	5024
9.5	5129	5234	5339	5444	5549	5654	5759	5863	5968	6072
9.6	6176	6280	6384	6488	6592	6696	6799	6903	7006	7109
9.7	7213	7316	7419	7521	7624	7727	7829	7932	8034	8136
9.8	8238	8340	8442	8544	8646	8747	8849	8950	9051	9152
9.9	9253	9354	9455	9556	9657	9757	9858	9958	*0058	*0158
10.0	2.3 0259	0358	0458	0558	0658	0757	0857	0956	1055	1154
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Apéndice **D**

Interés compuesto

$r = 0.005$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|r}$	$s_{\overline{n}\|r}$
1	1.005000	0.995025	0.995025	1.000000
2	1.010025	0.990075	1.985099	2.005000
3	1.015075	0.985149	2.970248	3.015025
4	1.020151	0.980248	3.950496	4.030100
5	1.025251	0.975371	4.925866	5.050251
6	1.030378	0.970518	5.896384	6.075502
7	1.035529	0.965690	6.862074	7.105879
8	1.040707	0.960885	7.822959	8.141409
9	1.045911	0.956105	8.779064	9.182116
10	1.051140	0.951348	9.730412	10.228026
11	1.056396	0.946615	10.677027	11.279167
12	1.061678	0.941905	11.618932	12.335562
13	1.066986	0.937219	12.556151	13.397240
14	1.072321	0.932556	13.488708	14.464226
15	1.077683	0.927917	14.416625	15.536548
16	1.083071	0.923300	15.339925	16.614230
17	1.088487	0.918707	16.258632	17.697301
18	1.093929	0.914136	17.172768	18.785788
19	1.099399	0.909588	18.082356	19.879717
20	1.104896	0.905063	18.987419	20.979115
21	1.110420	0.900560	19.887979	22.084011
22	1.115972	0.896080	20.784059	23.194431
23	1.121552	0.891622	21.675681	24.310403
24	1.127160	0.887186	22.562866	25.431955
25	1.132796	0.882772	23.445638	26.559115
26	1.138460	0.878380	24.324018	27.691911
27	1.144152	0.874010	25.198028	28.830370
28	1.149873	0.869662	26.067689	29.974522
29	1.155622	0.865335	26.933024	31.124395
30	1.161400	0.861030	27.794054	32.280017
31	1.167207	0.856746	28.650800	33.441417
32	1.173043	0.852484	29.503284	34.608624
33	1.178908	0.848242	30.351526	35.781667
34	1.184803	0.844022	31.195548	36.960575
35	1.190727	0.839823	32.035371	38.145378
36	1.196681	0.835645	32.871016	39.336105
37	1.202664	0.831487	33.702504	40.532785
38	1.208677	0.827351	34.529854	41.735449
39	1.214721	0.823235	35.353089	42.944127
40	1.220794	0.819139	36.172228	44.158847
41	1.226898	0.815064	36.987291	45.379642
42	1.233033	0.811009	37.798300	46.606540
43	1.239198	0.806974	38.605274	47.839572
44	1.245394	0.802959	39.408232	49.078770
45	1.251621	0.798964	40.207196	50.324164
46	1.257879	0.794989	41.002185	51.575785
47	1.264168	0.791034	41.793219	52.833664
48	1.270489	0.787098	42.580318	54.097832
49	1.276842	0.783182	43.363500	55.368321
50	1.283226	0.779286	44.142786	56.645163

$r = 0.0075$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|r}$	$s_{\overline{n}\|r}$
1	1.007500	0.992556	0.992556	1.000000
2	1.015056	0.985167	1.977723	2.007500
3	1.022669	0.977833	2.955556	3.022556
4	1.030339	0.970554	3.926110	4.045225
5	1.038067	0.963329	4.889440	5.075565
6	1.045852	0.956158	5.845598	6.113631
7	1.053696	0.949040	6.794638	7.159484
8	1.061599	0.941975	7.736613	8.213180
9	1.069561	0.934963	8.671576	9.274779
10	1.077583	0.928003	9.599580	10.344339
11	1.085664	0.921095	10.520675	11.421922
12	1.093807	0.914238	11.434913	12.507586
13	1.102010	0.907432	12.342345	13.601393
14	1.110276	0.900677	13.243022	14.703404
15	1.118603	0.893973	14.136995	15.813679
16	1.126992	0.887318	15.024313	16.932282
17	1.135445	0.880712	15.905025	18.059274
18	1.143960	0.874156	16.779181	19.194718
19	1.152540	0.867649	17.646830	20.338679
20	1.161184	0.861190	18.508020	21.491219
21	1.169893	0.854779	19.362799	22.652403
22	1.178667	0.848416	20.211215	23.822296
23	1.187507	0.842100	21.053315	25.000963
24	1.196414	0.835831	21.889146	26.188471
25	1.205387	0.829609	22.718755	27.384884
26	1.214427	0.823434	23.542189	28.590271
27	1.223535	0.817304	24.359493	29.804698
28	1.232712	0.811220	25.170713	31.028233
29	1.241957	0.805181	25.975893	32.260945
30	1.251272	0.799187	26.775080	33.502902
31	1.260656	0.793238	27.568318	34.754174
32	1.270111	0.787333	28.355650	36.014830
33	1.279637	0.781472	29.137122	37.284941
34	1.289234	0.775654	29.912776	38.564578
35	1.298904	0.769880	30.682656	39.853813
36	1.308645	0.764149	31.446805	41.152716
37	1.318460	0.758461	32.205266	42.461361
38	1.328349	0.752814	32.958080	43.779822
39	1.338311	0.747210	33.705290	45.108170
40	1.348349	0.741648	34.446938	46.446482
41	1.358461	0.736127	35.183065	47.794830
42	1.368650	0.730647	35.913713	49.153291
43	1.378915	0.725208	36.638921	50.521941
44	1.389256	0.719810	37.358730	51.900856
45	1.399676	0.714451	38.073181	53.290112
46	1.410173	0.709133	38.782314	54.689788
47	1.420750	0.703854	39.486168	56.099961
48	1.431405	0.698614	40.184782	57.520711
49	1.442141	0.693414	40.878195	58.952116
50	1.452957	0.688252	41.566447	60.394257

$r = 0.01$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.010000	0.990099	0.990099	1.000000
2	1.020100	0.980296	1.970395	2.010000
3	1.030301	0.970590	2.940985	3.030100
4	1.040604	0.960980	3.901966	4.060401
5	1.051010	0.951466	4.853431	5.101005
6	1.061520	0.942045	5.795476	6.152015
7	1.072135	0.932718	6.728195	7.213535
8	1.082857	0.923483	7.651678	8.285671
9	1.093685	0.914340	8.566018	9.368527
10	1.104622	0.905287	9.471305	10.462213
11	1.115668	0.896324	10.367628	11.566835
12	1.126825	0.887449	11.255077	12.682503
13	1.138093	0.878663	12.133740	13.809328
14	1.149474	0.869963	13.003703	14.947421
15	1.160969	0.861349	13.865053	16.096896
16	1.172579	0.852821	14.717874	17.257864
17	1.184304	0.844377	15.562251	18.430443
18	1.196147	0.836017	16.398269	19.614748
19	1.208109	0.827740	17.226008	20.810895
20	1.220190	0.819544	18.045553	22.019004
21	1.232392	0.811430	18.856983	23.239194
22	1.244716	0.803396	19.660379	24.471586
23	1.257163	0.795442	20.455821	25.716302
24	1.269735	0.787566	21.243387	26.973465
25	1.282432	0.779768	22.023156	28.243200
26	1.295256	0.772048	22.795204	29.525631
27	1.308209	0.764404	23.559608	30.820888
28	1.321291	0.756836	24.316443	32.129097
29	1.334504	0.749342	25.065785	33.450388
30	1.347849	0.741923	25.807708	34.784892
31	1.361327	0.734577	26.542285	36.132740
32	1.374941	0.727304	27.269589	37.494068
33	1.388690	0.720103	27.989693	38.869009
34	1.402577	0.712973	28.702666	40.257699
35	1.416603	0.705914	29.408580	41.660276
36	1.430769	0.698925	30.107505	43.076878
37	1.445076	0.692005	30.799510	44.507647
38	1.459527	0.685153	31.484663	45.952724
39	1.474123	0.678370	32.163033	47.412251
40	1.488864	0.671653	32.834686	48.886373
41	1.503752	0.665003	33.499689	50.375237
42	1.518790	0.658419	34.158108	51.878989
43	1.533978	0.651900	34.810008	53.397779
44	1.549318	0.645445	35.455454	54.931757
45	1.564811	0.639055	36.094508	56.481075
46	1.580459	0.632728	36.727236	58.045885
47	1.596263	0.626463	37.353699	59.626344
48	1.612226	0.620260	37.973959	61.222608
49	1.628348	0.614119	38.588079	62.834834
50	1.644632	0.608039	39.196118	64.463182

$r = 0.0125$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.012500	0.987654	0.987654	1.000000
2	1.025156	0.975461	1.963115	2.012500
3	1.037971	0.963418	2.926534	3.037656
4	1.050945	0.951524	3.878058	4.075627
5	1.064082	0.939777	4.817835	5.126572
6	1.077383	0.928175	5.746010	6.190654
7	1.090850	0.916716	6.662726	7.268038
8	1.104486	0.905398	7.568124	8.358888
9	1.118292	0.894221	8.462345	9.463374
10	1.132271	0.883181	9.345526	10.581666
11	1.146424	0.872277	10.217803	11.713937
12	1.160755	0.861509	11.079312	12.860361
13	1.175264	0.850873	11.930185	14.021116
14	1.189955	0.840368	12.770553	15.196380
15	1.204829	0.829993	13.600546	16.386335
16	1.219890	0.819746	14.420292	17.591164
17	1.235138	0.809626	15.229918	18.811053
18	1.250577	0.799631	16.029549	20.046192
19	1.266210	0.789759	16.819308	21.296769
20	1.282037	0.780009	17.599316	22.562979
21	1.298063	0.770379	18.369695	23.845016
22	1.314288	0.760868	19.130563	25.143078
23	1.330717	0.751475	19.882037	26.457367
24	1.347351	0.742197	20.624235	27.788084
25	1.364193	0.733034	21.357269	29.135435
26	1.381245	0.723984	22.081253	30.499628
27	1.398511	0.715046	22.796299	31.880873
28	1.415992	0.706219	23.502518	33.279384
29	1.433692	0.697500	24.200018	34.695377
30	1.451613	0.688889	24.888906	36.129069
31	1.469759	0.680384	25.569290	37.580682
32	1.488131	0.671984	26.241274	39.050441
33	1.506732	0.663688	26.904962	40.538571
34	1.525566	0.655494	27.560456	42.045303
35	1.544636	0.647402	28.207858	43.570870
36	1.563944	0.639409	28.847267	45.115505
37	1.583493	0.631515	29.478783	46.679449
38	1.603287	0.623719	30.102501	48.262942
39	1.623328	0.616019	30.718520	49.866229
40	1.643619	0.608413	31.326933	51.489557
41	1.664165	0.600902	31.927835	53.133177
42	1.684967	0.593484	32.521319	54.797341
43	1.706029	0.586157	33.107475	56.482308
44	1.727354	0.578920	33.686395	58.188337
45	1.748946	0.571773	34.258168	59.915691
46	1.770808	0.564714	34.822882	61.664637
47	1.792943	0.557742	35.380624	63.435445
48	1.815355	0.550856	35.931481	65.228388
49	1.838047	0.544056	36.475537	67.043743
50	1.861022	0.537339	37.012876	68.881790

$r = 0.015$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.015000	0.985222	0.985222	1.000000
2	1.030225	0.970662	1.955883	2.015000
3	1.045678	0.956317	2.912200	3.045225
4	1.061364	0.942184	3.854385	4.090903
5	1.077284	0.928260	4.782645	5.152267
6	1.093443	0.914542	5.697187	6.229551
7	1.109845	0.901027	6.598214	7.322994
8	1.126493	0.887711	7.485925	8.432839
9	1.143390	0.874592	8.360517	9.559332
10	1.160541	0.861667	9.222185	10.702722
11	1.177949	0.848933	10.071118	11.863262
12	1.195618	0.836387	10.907505	13.041211
13	1.213552	0.824027	11.731532	14.236830
14	1.231756	0.811849	12.543382	15.450382
15	1.250232	0.799852	13.343233	16.682138
16	1.268986	0.788031	14.131264	17.932370
17	1.288020	0.776385	14.907649	19.201355
18	1.307341	0.764912	15.672561	20.489376
19	1.326951	0.753607	16.426168	21.796716
20	1.346855	0.742470	17.168639	23.123667
21	1.367058	0.731498	17.900137	24.470522
22	1.387564	0.720688	18.620824	25.837580
23	1.408377	0.710037	19.330861	27.225144
24	1.429503	0.699544	20.030405	28.633521
25	1.450945	0.689206	20.719611	30.063024
26	1.472710	0.679021	21.398632	31.513969
27	1.494800	0.668986	22.067617	32.986678
28	1.517222	0.659099	22.726717	34.481479
29	1.539981	0.649359	23.376076	35.998701
30	1.563080	0.639762	24.015838	37.538681
31	1.586526	0.630308	24.646146	39.101762
32	1.610324	0.620993	25.267139	40.688288
33	1.634479	0.611816	25.878954	42.298612
34	1.658996	0.602774	26.481728	43.933092
35	1.683881	0.593866	27.075595	45.592088
36	1.709140	0.585090	27.660684	47.275969
37	1.734777	0.576443	28.237127	48.985109
38	1.760798	0.567924	28.805052	50.719885
39	1.787210	0.559531	29.364583	52.480684
40	1.814018	0.551262	29.915845	54.267894
41	1.841229	0.543116	30.458961	56.081912
42	1.868847	0.535089	30.994050	57.923141
43	1.896880	0.527182	31.521232	59.791988
44	1.925333	0.519391	32.040622	61.688868
45	1.954213	0.511715	32.552337	63.614201
46	1.983526	0.504153	33.056490	65.568414
47	2.013279	0.496702	33.553192	67.551940
48	2.043478	0.489362	34.042554	69.565219
49	2.074130	0.482130	34.524683	71.608698
50	2.105242	0.475005	34.999688	73.682828

$r = 0.02$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.020000	0.980392	0.980392	1.000000
2	1.040400	0.961169	1.941561	2.020000
3	1.061208	0.942322	2.883883	3.060400
4	1.082432	0.923845	3.807729	4.121608
5	1.104081	0.905731	4.713460	5.204040
6	1.126162	0.887971	5.601431	6.308121
7	1.148686	0.870560	6.471991	7.434283
8	1.171659	0.853490	7.325481	8.582969
9	1.195093	0.836755	8.162237	9.754628
10	1.218994	0.820348	8.982585	10.949721
11	1.243374	0.804263	9.786848	12.168715
12	1.268242	0.788493	10.575341	13.412090
13	1.293607	0.773033	11.348374	14.680332
14	1.319479	0.757875	12.106249	15.973938
15	1.345868	0.743015	12.849264	17.293417
16	1.372786	0.728446	13.577709	18.639285
17	1.400241	0.714163	14.291872	20.012071
18	1.428246	0.700159	14.992031	21.412312
19	1.456811	0.686431	15.678462	22.840559
20	1.485947	0.672971	16.351433	24.297370
21	1.515666	0.659776	17.011209	25.783317
22	1.545980	0.646839	17.658048	27.298984
23	1.576899	0.634156	18.292204	28.844963
24	1.608437	0.621721	18.913926	30.421862
25	1.640606	0.609531	19.523456	32.030300
26	1.673418	0.597579	20.121036	33.670906
27	1.706886	0.585862	20.706898	35.344324
28	1.741024	0.574375	21.281272	37.051210
29	1.775845	0.563112	21.844385	38.792235
30	1.811362	0.552071	22.396456	40.568079
31	1.847589	0.541246	22.937702	42.379441
32	1.884541	0.530633	23.468335	44.227030
33	1.922231	0.520229	23.988564	46.111570
34	1.960676	0.510028	24.498592	48.033802
35	1.999890	0.500028	24.998619	49.994478
36	2.039887	0.490223	25.488842	51.994367
37	2.080685	0.480611	25.969453	54.034255
38	2.122299	0.471187	26.440641	56.114940
39	2.164745	0.461948	26.902589	58.237238
40	2.208040	0.452890	27.355479	60.401983
41	2.252200	0.444010	27.799489	62.610023
42	2.297244	0.435304	28.234794	64.862223
43	2.343189	0.426769	28.661562	67.159468
44	2.390053	0.418401	29.079963	69.502657
45	2.437854	0.410197	29.490160	71.892710
46	2.486611	0.402154	29.892314	74.330564
47	2.536344	0.394268	30.286582	76.817176
48	2.587070	0.386538	30.673120	79.353519
49	2.638812	0.378958	31.052078	81.940590
50	2.691588	0.371528	31.423606	84.579401

$r = 0.025$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.025000	0.975610	0.975610	1.000000
2	1.050625	0.951814	1.927424	2.025000
3	1.076891	0.928599	2.856024	3.075625
4	1.103813	0.905951	3.761974	4.152516
5	1.131408	0.883854	4.645828	5.256329
6	1.159693	0.862297	5.508125	6.387737
7	1.188686	0.841265	6.349391	7.547430
8	1.218403	0.820747	7.170137	8.736116
9	1.248863	0.800728	7.970866	9.954519
10	1.280085	0.781198	8.752064	11.203382
11	1.312087	0.762145	9.514209	12.483466
12	1.344889	0.743556	10.257765	13.795553
13	1.378511	0.725420	10.983185	15.140442
14	1.412974	0.707727	11.690912	16.518953
15	1.448298	0.690466	12.381378	17.931927
16	1.484506	0.673625	13.055003	19.380225
17	1.521618	0.657195	13.712198	20.864730
18	1.559659	0.641166	14.353364	22.386349
19	1.598650	0.625528	14.978891	23.946007
20	1.638616	0.610271	15.589162	25.544658
21	1.679582	0.595386	16.184549	27.183274
22	1.721571	0.580865	16.765413	28.862856
23	1.764611	0.566697	17.332110	30.584427
24	1.808726	0.552875	17.884986	32.349038
25	1.853944	0.539391	18.424376	34.157764
26	1.900293	0.526235	18.950611	36.011708
27	1.947800	0.513400	19.464011	37.912001
28	1.996495	0.500878	19.964889	39.859801
29	2.046407	0.488661	20.453550	41.856296
30	2.097568	0.476743	20.930293	43.902703
31	2.150007	0.465115	21.395407	46.000271
32	2.203757	0.453771	21.849178	48.150278
33	2.258851	0.442703	22.291881	50.354034
34	2.315322	0.431905	22.723786	52.612885
35	2.373205	0.421371	23.145157	54.928207
36	2.432535	0.411094	23.556251	57.301413
37	2.493349	0.401067	23.957318	59.733948
38	2.555682	0.391285	24.348603	62.227297
39	2.619574	0.381741	24.730344	64.782979
40	2.685064	0.372431	25.102775	67.402554
41	2.752190	0.363347	25.466122	70.087617
42	2.820995	0.354485	25.820607	72.839808
43	2.891520	0.345839	26.166446	75.660803
44	2.963808	0.337404	26.503849	78.552323
45	3.037903	0.329174	26.833024	81.516131
46	3.113851	0.321146	27.154170	84.554034
47	3.191697	0.313313	27.467483	87.667885
48	3.271490	0.305671	27.773154	90.859582
49	3.353277	0.298216	28.071369	94.131072
50	3.437109	0.290942	28.362312	97.484349

$r = 0.03$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.030000	0.970874	0.970874	1.000000
2	1.060900	0.942596	1.913470	2.030000
3	1.092727	0.915142	2.828611	3.090900
4	1.125509	0.888487	3.717098	4.183627
5	1.159274	0.862609	4.579707	5.309136
6	1.194052	0.837484	5.417191	6.468410
7	1.229874	0.813092	6.230283	7.662462
8	1.266770	0.789409	7.019692	8.892336
9	1.304773	0.766417	7.786109	10.159106
10	1.343916	0.744094	8.530203	11.463879
11	1.384234	0.722421	9.252624	12.807796
12	1.425761	0.701380	9.954004	14.192030
13	1.468534	0.680951	10.634955	15.617790
14	1.512590	0.661118	11.296073	17.086324
15	1.557967	0.641862	11.937935	18.598914
16	1.604706	0.623167	12.561102	20.156881
17	1.652848	0.605016	13.166118	21.761588
18	1.702433	0.587395	13.753513	23.414435
19	1.753506	0.570286	14.323799	25.116868
20	1.806111	0.553676	14.877475	26.870374
21	1.860295	0.537549	15.415024	28.676486
22	1.916103	0.521893	15.936917	30.536780
23	1.973587	0.506692	16.443608	32.452884
24	2.032794	0.491934	16.935542	34.426470
25	2.093778	0.477606	17.413148	36.459264
26	2.156591	0.463695	17.876842	38.553042
27	2.221289	0.450189	18.327031	40.709634
28	2.287928	0.437077	18.764108	42.930923
29	2.356566	0.424346	19.188455	45.218850
30	2.427262	0.411987	19.600441	47.575416
31	2.500080	0.399987	20.000428	50.002678
32	2.575083	0.388337	20.388766	52.502759
33	2.652335	0.377026	20.765792	55.077841
34	2.731905	0.366045	21.131837	57.730177
35	2.813862	0.355383	21.487220	60.462082
36	2.898278	0.345032	21.832252	63.275944
37	2.985227	0.334983	22.167235	66.174223
38	3.074783	0.325226	22.492462	69.159449
39	3.167027	0.315754	22.808215	72.234233
40	3.262038	0.306557	23.114772	75.401260
41	3.359899	0.297628	23.412400	78.663298
42	3.460696	0.288959	23.701359	82.023196
43	3.564517	0.280543	23.981902	85.483892
44	3.671452	0.272372	24.254274	89.048409
45	3.781596	0.264439	24.518713	92.719861
46	3.895044	0.256737	24.775449	96.501457
47	4.011895	0.249259	25.024708	100.396501
48	4.132252	0.241999	25.266707	104.408396
49	4.256219	0.234950	25.501657	108.540648
50	4.383906	0.228107	25.729764	112.796867

$r = 0.035$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.035000	0.966184	0.966184	1.000000
2	1.071225	0.933511	1.899694	2.035000
3	1.108718	0.901943	2.801637	3.106225
4	1.147523	0.871442	3.673079	4.214943
5	1.187686	0.841973	4.515052	5.362466
6	1.229255	0.813501	5.328553	6.550152
7	1.272279	0.785991	6.114544	7.779408
8	1.316809	0.759412	6.873956	9.051687
9	1.362897	0.733731	7.607687	10.368496
10	1.410599	0.708919	8.316605	11.731393
11	1.459970	0.684946	9.001551	13.141992
12	1.511069	0.661783	9.663334	14.601962
13	1.563956	0.639404	10.302738	16.113030
14	1.618695	0.617782	10.920520	17.676986
15	1.675349	0.596891	11.517411	19.295681
16	1.733986	0.576706	12.094117	20.971030
17	1.794676	0.557204	12.651321	22.705016
18	1.857489	0.538361	13.189682	24.499691
19	1.922501	0.520156	13.709837	26.357180
20	1.989789	0.502566	14.212403	28.279682
21	2.059431	0.485571	14.697974	30.269471
22	2.131512	0.469151	15.167125	32.328902
23	2.206114	0.453286	15.620410	34.460414
24	2.283328	0.437957	16.058368	36.666528
25	2.363245	0.423147	16.481515	38.949857
26	2.445959	0.408838	16.890352	41.313102
27	2.531567	0.395012	17.285365	43.759060
28	2.620172	0.381654	17.667019	46.290627
29	2.711878	0.368748	18.035767	48.910799
30	2.806794	0.356278	18.392045	51.622677
31	2.905031	0.344230	18.736276	54.429471
32	3.006708	0.332590	19.068865	57.334502
33	3.111942	0.321343	19.390208	60.341210
34	3.220860	0.310476	19.700684	63.453152
35	3.333590	0.299977	20.000661	66.674013
36	3.450266	0.289833	20.290494	70.007603
37	3.571025	0.280032	20.570525	73.457869
38	3.696011	0.270562	20.841087	77.028895
39	3.825372	0.261413	21.102500	80.724906
40	3.959260	0.252572	21.355072	84.550278
41	4.097834	0.244031	21.599104	88.509537
42	4.241258	0.235779	21.834883	92.607371
43	4.389702	0.227806	22.062689	96.848629
44	4.543342	0.220102	22.282791	101.238331
45	4.702359	0.212659	22.495450	105.781673
46	4.866941	0.205468	22.700918	110.484031
47	5.037284	0.198520	22.899438	115.350973
48	5.213589	0.191806	23.091244	120.388257
49	5.396065	0.185320	23.276564	125.601846
50	5.584927	0.179053	23.455618	130.997910

$r = 0.04$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.040000	0.961538	0.961538	1.000000
2	1.081600	0.924556	1.886095	2.040000
3	1.124864	0.888996	2.775091	3.121600
4	1.169859	0.854804	3.629895	4.246464
5	4.216653	0.821927	4.451822	5.416323
6	1.265319	0.790315	5.242137	6.632975
7	1.315932	0.759918	6.002055	7.898294
8	1.368569	0.730690	6.732745	9.214226
9	1.423312	0.702587	7.435332	10.582795
10	1.480244	0.675564	8.110896	12.006107
11	1.539454	0.649581	8.760477	13.486351
12	1.601032	0.624597	9.385074	15.025805
13	1.665074	0.600574	9.985648	16.626838
14	1.731676	0.577475	10.563123	18.291911
15	1.800944	0.555265	11.118387	20.023588
16	1.872981	0.533908	11.652296	21.824531
17	1.947900	0.513373	12.165669	23.697512
18	2.025817	0.493628	12.659297	25.645413
19	2.106849	0.474642	13.133939	27.671229
20	2.191123	0.456387	13.590326	29.778079
21	2.278768	0.438834	14.029160	31.969202
22	2.369919	0.421955	14.451115	34.247970
23	2.464716	0.405726	14.856842	36.617889
24	2.563304	0.390121	15.246963	39.082604
25	2.665836	0.375117	15.622080	41.645908
26	2.772470	0.360689	15.982769	44.311745
27	2.883369	0.346817	16.329586	47.084214
28	2.998703	0.333477	16.663063	49.967583
29	3.118651	0.320651	16.983715	52.966286
30	3.243398	0.308319	17.292033	56.084938
31	3.373133	0.296460	17.588494	59.328335
32	3.508059	0.285058	17.873551	62.701469
33	3.648381	0.274094	18.147646	66.209527
34	3.794316	0.263552	18.411198	69.857909
35	3.946089	0.253415	18.664613	73.652225
36	4.103933	0.243669	18.908282	77.598314
37	4.268090	0.234297	19.142579	81.702246
38	4.438813	0.225285	19.367864	85.970336
39	4.616366	0.216621	19.584485	90.409150
40	4.801021	0.208289	19.792774	95.025516
41	4.993061	0.200278	19.993052	99.826536
42	5.192784	0.192575	20.185627	104.819598
43	5.400495	0.185168	20.370795	110.012382
44	5.616515	0.178046	20.548841	115.412877
45	5.841176	0.171198	20.720040	121.029392
46	6.074823	0.164614	20.884654	126.870568
47	6.317816	0.158283	21.042936	132.945390
48	6.570528	0.152195	21.195131	139.263206
49	6.833349	0.146341	21.341472	145.833734
50	7.106683	0.140713	21.482185	152.667084

$r = 0.05$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.050000	0.952381	0.952381	1.000000
2	1.102500	0.907029	1.859410	2.050000
3	1.157625	0.863838	2.723248	3.152500
4	1.215506	0.822702	3.545951	4.310125
5	1.276282	0.783526	4.329477	5.525631
6	1.340096	0.746215	5.075692	6.801913
7	1.407100	0.710681	5.786373	8.142008
8	1.477455	0.676839	6.463213	3.549109
9	1.551328	0.644609	7.107822	11.026564
10	1.628895	0.613913	7.721735	12.577893
11	1.710339	0.584679	8.306414	14.206787
12	1.795856	0.556837	8.863252	15.917127
13	1.885649	0.530321	9.393573	17.712983
14	1.979932	0.505068	9.898641	19.598632
15	2.078928	0.481017	10.379658	21.578564
16	2.182875	0.458112	10.837770	23.657492
17	2.292018	0.436297	11.274066	25.840366
18	2.406619	0.415521	11.689587	28.132385
19	2.526950	0.395734	12.085321	30.539004
20	2.653298	0.376889	12.462210	33.065954
21	2.785963	0.358942	12.821153	35.719252
22	2.925261	0.341850	13.163003	38.505214
23	3.071524	0.325571	13.488574	41.430475
24	3.225100	0.310068	13.798642	44.501999
25	3.386355	0.295303	14.093945	47.727099
26	3.555673	0.281241	14.375185	51.113454
27	3.733456	0.267848	14.643034	54.669126
28	3.920129	0.255094	14.898127	58.402583
29	4.116136	0.242946	15.141074	62.322712
30	4.321942	0.231377	15.372451	66.438848
31	4.538039	0.220359	15.592811	70.760790
32	4.764941	0.209866	15.802677	75.298829
33	5.003189	0.199873	16.002549	80.063771
34	5.253348	0.190355	16.192904	85.066959
35	5.516015	0.181290	16.374194	90.320307
36	5.791816	0.172657	16.546852	95.836323
37	6.081407	0.164436	16.711287	101.628139
38	6.385477	0.156605	16.867893	107.709546
39	6.704751	0.149148	17.017041	114.095023
40	7.039989	0.142046	17.159086	120.799774
41	7.391988	0.135282	17.294368	127.839763
42	7.761588	0.128840	17.423208	135.231751
43	8.149667	0.122704	17.545912	142.993339
44	8.557150	0.116861	17.662773	151.143006
45	8.985008	0.111297	17.774070	159.700156
46	9.434258	0.105997	17.880066	168.685164
47	9.905971	0.100949	17.981016	178.119422
48	10.401270	0.096142	18.077158	188.025393
49	10.921333	0.091564	18.168722	198.426663
50	11.467400	0.087204	18.255925	209.347996

$r = 0.06$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\,r}$	$s_{\overline{n}\,r}$
1	1.060000	0.943396	0.943396	1.000000
2	1.123600	0.889996	1.833393	2.060000
3	1.191016	0.839619	2.673012	3.183600
4	1.262477	0.792094	3.465106	4.374616
5	1.338226	0.747258	4.212364	5.637093
6	1.418519	0.704961	4.917324	6.975319
7	1.503630	0.665057	5.582381	8.393838
8	1.593848	0.627412	6.209794	9.897468
9	1.689479	0.591898	6.801692	11.491316
10	1.790848	0.558395	7.360087	13.180795
11	1.898299	0.526788	7.886875	14.971643
12	2.012196	0.496969	8.383844	16.869941
13	2.132928	0.468839	8.852683	18.882138
14	2.260904	0.442301	9.294984	21.015066
15	2.396558	0.417265	9.712249	23.275970
16	2.540352	0.393646	10.105895	25.672528
17	2.692773	0.371364	10.477260	28.212880
18	2.854339	0.350344	10.827603	30.905653
19	3.025600	0.330513	11.158116	33.759992
20	3.207135	0.311805	11.469921	36.785591
21	3.399564	0.294155	11.764077	39.992727
22	3.603537	0.277505	12.041582	43.392290
23	3.819750	0.261797	12.303379	46.995828
24	4.048935	0.246979	12.550358	50.815577
25	4.291871	0.232999	12.783356	54.864512
26	4.549383	0.219810	13.003166	59.156383
27	4.822346	0.207368	13.210534	63.705766
28	5.111687	0.195630	13.406164	68.528112
29	5.418388	0.184557	13.590721	73.639798
30	5.743491	0.174110	13.764831	79.058186
31	6.088101	0.164255	13.929086	84.801677
32	6.453387	0.154957	14.084043	90.889778
33	6.840590	0.146186	14.230230	97.343165
34	7.251025	0.137912	14.368141	104.183755
35	7.686087	0.130105	14.498246	111.434780
36	8.147252	0.122741	14.620987	119.120867
37	8.636087	0.115793	14.736780	127.268119
38	9.154252	0.109239	14.846019	135.904206
39	9.703507	0.103056	14.949075	145.058458
40	10.285718	0.097222	15.046297	154.761966
41	10.902861	0.091719	15.138016	165.047684
42	11.557033	0.086527	15.224543	175.950545
43	12.250455	0.081630	15.306173	187.507577
44	12.985482	0.077009	15.383182	199.758032
45	13.764611	0.072650	15.455832	212.743514
46	14.590487	0.068538	15.524370	226.508125
47	15.465917	0.064658	15.589028	241.098612
48	16.393872	0.060998	15.650027	256.564529
49	17.377504	0.057546	15.707572	272.958401
50	18.420154	0.054288	15.761861	290.335905

$r = 0.07$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.070000	0.934579	0.934579	1.000000
2	1.144900	0.873439	1.808018	2.070000
3	1.225043	0.816298	2.624316	3.214900
4	1.310796	0.762895	3.387211	4.439943
5	1.402552	0.712986	4.100197	5.750739
6	1.500730	0.666342	4.766540	7.153291
7	1.605781	0.622750	5.389289	8.654021
8	1.718186	0.582009	5.971299	10.259803
9	1.838459	0.543934	6.515232	11.977989
10	1.967151	0.508349	7.023582	13.816448
11	2.104852	0.475093	7.498674	15.783599
12	2.252192	0.444012	7.942686	17.888451
13	2.409845	0.414964	8.357651	20.140643
14	2.578534	0.387817	8.745468	22.550488
15	2.759032	0.362446	9.107914	25.129022
16	2.952164	0.338735	9.446649	27.888054
17	3.158815	0.316574	9.763223	30.840217
18	3.379932	0.295864	10.059087	33.999033
19	3.616528	0.276508	10.335595	37.378965
20	3.869684	0.258419	10.594014	40.995492
21	4.140562	0.241513	10.835527	44.865177
22	4.430402	0.225713	11.061240	49.005739
23	4.740530	0.210947	11.272187	53.436141
24	5.072367	0.197147	11.469334	58.176671
25	5.427433	0.184249	11.653583	63.249038
26	5.807353	0.172195	11.825779	68.676470
27	6.213868	0.160930	11.986709	74.483823
28	6.648838	0.150402	12.137111	80.697691
29	7.114257	0.140563	12.277674	87.346529
30	7.612255	0.131367	12.409041	94.460786
31	8.145113	0.122773	12.531814	102.073041
32	8.715271	0.114741	12.646555	110.218154
33	9.325340	0.107235	12.753790	118.933425
34	9.978114	0.100219	12.854009	128.258765
35	10.676581	0.093663	12.947672	138.236878
36	11.423942	0.087535	13.035208	148.913460
37	12.223618	0.081809	13.117017	160.337402
38	13.079271	0.076457	13.193473	172.561020
39	13.994820	0.071455	13.264928	185.640292
40	14.974458	0.066780	13.331709	199.635112
41	16.022670	0.062412	13.394120	214.609570
42	17.144257	0.058329	13.452449	230.632240
43	18.344355	0.054513	13.506962	247.776496
44	19.628460	0.050946	13.557908	266.120851
45	21.002452	0.047613	13.605522	285.749311
46	22.472623	0.044499	13.650020	306.751763
47	24.045707	0.041587	13.691608	329.224386
48	25.728907	0.038867	13.730474	353.270093
49	27.529930	0.036324	13.766799	378.999000
50	29.457025	0.033948	13.800746	406.528929

$r = 0.08$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.080000	0.925926	0.925926	1.000000
2	1.166400	0.857339	1.783265	2.080000
3	1.259712	0.793832	2.577097	3.246400
4	1.360489	0.735030	3.312127	4.506112
5	1.469328	0.680583	3.992710	5.866601
6	1.586874	0.630170	4.622880	7.335929
7	1.713824	0.583490	5.206370	8.922803
8	1.850930	0.540269	5.746639	10.636628
9	1.999005	0.500249	6.246888	12.487558
10	2.158925	0.463193	6.710081	14.486562
11	2.331639	0.428883	7.138964	16.645487
12	2.518170	0.397114	7.536078	18.977126
13	2.719624	0.367698	7.903776	21.495297
14	2.937194	0.340461	8.244237	24.214920
15	3.172169	0.315242	8.559479	27.152114
16	3.425943	0.291890	8.851369	30.324283
17	3.700018	0.270269	9.121638	33.750226
18	3.996019	0.250249	9.371887	37.450244
19	4.315701	0.231712	9.603599	41.446263
20	4.660957	0.214548	9.818147	45.761964
21	5.033834	0.198656	10.016803	50.422921
22	5.436540	0.183941	10.200744	55.456755
23	5.871464	0.170315	10.371059	60.893296
24	6.341181	0.157699	10.528758	66.764759
25	6.848475	0.146018	10.674776	73.105940
26	7.396353	0.135202	10.809978	79.954415
27	7.988061	0.125187	10.935165	87.350768
28	8.627106	0.115914	11.051078	95.338830
29	9.317275	0.107328	11.158406	103.965936
30	10.062657	0.099377	11.257783	113.283211
31	10.867669	0.092016	11.349799	123.345868
32	11.737083	0.085200	11.434999	134.213537
33	12.676050	0.078889	11.513888	145.950620
34	13.690134	0.073045	11.586934	158.626670
35	14.785344	0.067635	11.654568	172.316804
36	15.968172	0.062625	11.717193	187.102148
37	17.245626	0.057986	11.775179	203.070320
38	18.625276	0.053690	11.828869	220.315945
39	20.115298	0.049713	11.878582	238.941221
40	21.724521	0.046031	11.924613	259.056519
41	23.462483	0.042621	11.967235	280.781040
42	25.339482	0.039464	12.006699	304.243523
43	27.366640	0.036541	12.043240	329.583005
44	29.555972	0.033834	12.077074	356.949646
45	31.920449	0.031328	12.108402	386.505617
46	34.474085	0.029007	12.137409	418.426067
47	37.232012	0.026859	12.164267	452.900152
48	40.210573	0.024869	12.189136	490.132164
49	43.427419	0.023027	12.212163	530.342737
50	46.901613	0.021321	12.233485	573.770156

Apéndice **E**

Integrales seleccionadas

Formas racionales que contienen [*a* + *bu*]

1. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b}\ln|a+bu| + C.$

3. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{u}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bu| + C$

4. $\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{u^2}{2b} - \frac{au}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

5. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{u}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bu)} - \frac{2a}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

9. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \frac{2b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{du}{(a + bu)(c + ku)} = \frac{1}{bc - ak} \ln \left| \frac{a + bu}{c + ku} \right| + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a + bu)(c + ku)} = \frac{1}{bc - ak} \left[\frac{c}{k} \ln |c + ku| - \frac{a}{b} \ln |a + bu| \right] + C.$

Formas que contienen $\sqrt{a + bu}$

13. $\displaystyle\int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2}}{15b^2} + C.$

14. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2(8a^2 - 12abu + 15b^2u^2)(a + bu)^{3/2}}{105b^3} + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2(bu - 2a)\sqrt{a + bu}}{3b^2} + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a + bu}}{15b^3} + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \quad a > 0.$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}.$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2u} + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C, \quad a > 0.$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|) + C.$

24. $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

25. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C.$

26. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

28. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C.$

29. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|) + C.$

30. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\pm\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2u} + C.$

31. $\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

32. $\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$

33. $\int \frac{u^2\,du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

Formas racionales que contienen $a^2 - u^2$ y $u^2 - a^2$

34. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C.$

35. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C.$

Formas exponenciales y logarítmicas

36. $\int e^u\,du = e^u + C.$

37. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

38. $\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C.$

39. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du.$

40. $\int \frac{e^{au}\,du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

41. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C.$

42. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1.$

43. $\int u^n \ln^m u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\ln^m u - \frac{m}{n+1}\int u^n \ln^{m-1} u\,du, \quad m, n \neq -1.$

44. $\int \frac{du}{u\ln u} = \ln|\ln u| + C.$

45. $\int \frac{du}{a + be^{cu}} = \frac{1}{ac}(cu - \ln|a + be^{cu}|) + C.$

Formas diversas

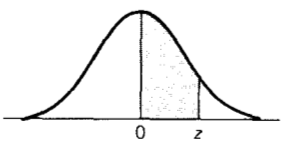
46. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\ln(\sqrt{a+u} + \sqrt{b+u}) + C.$

47. $\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C.$

48. $\int \sqrt{a + bu + cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} - \frac{b^2 - 4ac}{8c^{3/2}}\ln|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}| + C, \quad c > 0.$

Apéndice **F**

Áreas bajo la curva normal estándar



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$A(-z) = A(z)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3820
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	.0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Respuestas a los problemas de número impar

EJERCICIOS 1.2

1. Verdadero **3.** Falso; los números naturales son 1, 2, 3, etcétera. **5.** Verdadero.
7. Falso; $\frac{4}{2} = 2$, un entero positivo. **9.** Verdadero. **11.** Verdadero

EJERCICIOS 1.3

1. Falso. **3.** Falso. **5.** Verdadero. **7.** Verdadero. **9.** Falso. **11.** Distributiva.
13. Asociativa. **15.** Conmutativa. **17.** Definición de sustracción. **19.** Distributiva.

EJERCICIOS 1.4

1. -6. **3.** 2. **5.** 11. **7.** -2. **9.** -63. **11.** -6. **13.** $6 - x$.
15. $-12x + 12y$ (o bien $12y - 12x$). **17.** $-\frac{1}{3}$. **19.** -2. **21.** 18. **23.** 25. **25.** $3x - 12$.
27. $-x + 2$. **29.** $\frac{8}{11}$. **31.** $-\frac{5x}{7y}$. **33.** $\frac{2}{3x}$. **35.** 3. **37.** $\frac{7}{xy}$. **39.** $\frac{5}{6}$. **41.** $-\frac{1}{6}$.
43. $\frac{x - y}{9}$. **45.** $\frac{1}{24}$. **47.** $\frac{x}{6y}$. **49.** No está definida. **51.** No está definida.

EJERCICIOS 1.5

1. 2^5 $(= 32)$. **3.** w^{12}. **5.** $\frac{x^8}{y^{17}}$. **7.** $\frac{x^{10}}{y^{50}}$. **9.** $8x^6y^9$. **11.** x^6. **13.** x^{14}. **15.** 5.
17. -2. **19.** $\frac{1}{2}$. **21.** 10. **23.** 8. **25.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{32}$. **29.** $4\sqrt{2}$. **31.** $x\sqrt[3]{2}$.
33. $4x^2$. **35.** $-2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$. **37.** $3z^2$. **39.** $\frac{9r^2}{4}$. **41.** $\frac{x^3}{y^2z^2}$. **43.** $\frac{2}{x^4}$. **45.** $\frac{1}{9r^2}$. **47.** $7^{1/3}s^{2/3}$.
49. $x^{1/2} - y^{1/2}$. **51.** $\frac{x^{9/4}z^{3/4}}{y^{1/2}}$. **53.** $\sqrt[5]{(8x - y)^4}$. **55.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. **57.** $\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{4x^2}}$. **59.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

61. $\frac{2\sqrt{2x}}{x}$. **63.** $\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$. **65.** 4. **67.** $\frac{\sqrt[12]{8x^8y^4}}{xy}$. **69.** $\frac{2x^6}{y^3}$. **71.** $t^{2/3}$. **73.** $\frac{64y^6x^{1/2}}{x^2}$. **75.** xyz.

77. $\frac{1}{9}$. **79.** $\frac{4y^4}{x^2}$. **81.** $x^2y^{5/2}$. **83.** $\frac{y^{10}}{z^2}$. **85.** $\frac{1}{x^4}$. **87.** $-\frac{4}{s^5}$. **89.** $\frac{4x^4z^4}{9y^4}$.

EJERCICIOS 1.6

1. $11x - 2y - 3$. **3.** $6t^2 - 2s^2 + 6$. **5.** $2\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z}$. **7.** $6x^2 - 9xy - 2z + \sqrt{2} - 4$.
9. $\sqrt{2y} - \sqrt{3z}$. **11.** $-7x + 14y - 19$. **13.** $x^2 + 9y^2 + xy$. **15.** $6x^2 + 96$. **17.** $-6x^2 - 18x - 18$.
19. $x^2 + 9x + 20$. **21.** $x^2 + x - 6$. **23.** $10x^2 + 19x + 6$. **25.** $x^2 + 6x + 9$. **27.** $x^2 - 10x + 25$.
29. $2y + 6\sqrt{2y} + 9$. **31.** $4s^2 - 1$. **33.** $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$. **35.** $2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 3$.
37. $5x^3 + 5x^2 + 6x$. **39.** $3x^2 + 2y^2 + 5xy + 2x - 8$. **41.** $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$.
43. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$. **45.** $z - 4$. **47.** $3x^3 + 2x - \frac{1}{2x^2}$. **49.** $x + \frac{-1}{x+3}$.
51. $3x^2 - 8x + 17 + \frac{-37}{x+2}$. **53.** $t + 8 + \frac{64}{t-8}$. **55.** $x - 2 + \frac{7}{3x+2}$.

EJERCICIOS 1.7

1. $2(3x + 2)$. **3.** $5x(2y + z)$. **5.** $4bc(2a^3 - 3ab^2d + b^3cd^2)$. **7.** $(x - 5)(x + 5)$. **9.** $(p + 3)(p + 1)$.
11. $(4x - 3)(4x + 3)$. **13.** $(z + 4)(z + 2)$. **15.** $(x + 3)^2$. **17.** $2(x + 4)(x + 2)$. **19.** $3(x - 1)(x + 1)$.
21. $(6y + 1)(y + 2)$. **23.** $2s(3s + 4)(2s - 1)$. **25.** $x^{2/3}y(1 - 2xy)(1 + 2xy)$. **27.** $2x(x + 3)(x - 2)$.
29. $4(2x + 1)^2$. **31.** $x(xy - 5)^2$. **33.** $(x - 2)^2(x + 2)$. **35.** $(y - 1)(y + 1)(y^4 + 4)^2$.
37. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. **39.** $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$. **41.** $2(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)$.
43. $P(1 + r)^2$. **45.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$. **47.** $(y^4 + 1)(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$.
49. $(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$. **51.** $x(x + 1)^2(x - 1)^2$.

EJERCICIOS 1.8

1. $\frac{x+2}{x}$. **3.** $\frac{x-5}{x+5}$. **5.** $\frac{3x+2}{x+2}$. **7.** $-\frac{y^2}{(y-3)(y+2)}$. **9.** $\frac{3-2x}{3+2x}$. **11.** $\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+2)}$.
13. $\frac{x}{2}$. **15.** $\frac{1}{2n}$. **17.** $\frac{2}{3}$. **19.** $-27x^2$. **21.** 1. **23.** $\frac{2x^2}{x-1}$. **25.** 1.
27. $-\frac{(2x+3)(1+x)}{x+4}$. **29.** $x + 2$. **31.** $\frac{5}{3t}$. **33.** $\frac{1}{1-p^2}$.
35. $\frac{2x^2+3x+12}{(2x-1)(x+3)}$. **37.** $\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)(x-1)}$. **39.** $\frac{35-8x}{(x-1)(x+5)}$. **41.** $\frac{x^2+2x+1}{x^2}$. **43.** $\frac{x}{1-xy}$.
45. $\frac{x+1}{3x}$. **47.** $\frac{(x+2)(6x-1)}{2x^2(x+3)}$. **49.** $\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$. **51.** $2 - \sqrt{3}$. **53.** $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$.
55. $-4 - 2\sqrt{6}$. **57.** $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$. **59.** $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}-13}{2}$.

EJERCICIOS 2.1

1. 0. **3.** $\frac{10}{3}$. **5.** No satisface la ecuación. **7.** Se suman 5 en ambos lados; se garantiza la equivalencia.

9. Se elevan al cuadrado ambos lados; la equivalencia *no* está garantizada.

11. Se dividen ambos lados entre x; *no* se garantiza la equivalencia.

13. Se multiplican ambos lados por $x - 1$; *no* se garantiza la equivalencia.

15. Se multiplican ambos lados por $(x - 5)/x$; *no* se garantiza la equivalencia. **17.** $\frac{5}{2}$. **19.** 0.

21. 1. **23.** $\frac{12}{5}$. **25.** -1. **27.** 2. **29.** $\frac{10}{3}$. **31.** 90. **33.** 8. **35.** $-\frac{26}{9}$.

37. $-\frac{37}{18}$. **39.** $\frac{60}{17}$. **41.** $\frac{14}{3}$. **43.** 3. **45.** $\frac{7}{8}$. **47.** $P = \frac{I}{rt}$. **49.** $q = \frac{p + 1}{8}$.

51. $r = \frac{S - P}{Pt}$. **53.** $a_1 = \frac{2S - na_n}{n}$. **55.** 3. **57.** $y = \frac{ax}{1 + abx}$.

EJERCICIOS 2.2

1. $\frac{1}{5}$. **3.** $\varnothing$. **5.** $\frac{8}{3}$. **7.** $\frac{3}{2}$. **9.** 0. **11.** $\frac{5}{3}$. **13.** $\frac{1}{8}$. **15.** 3. **17.** $\frac{5}{13}$.

19. $\varnothing$. **21.** 3. **23.** $\frac{262}{5}$. **25.** $-\frac{10}{9}$. **27.** 2. **29.** 7. **31.** $\frac{49}{36}$. **33.** $-\frac{9}{4}$.

35. $d = \frac{r}{1 + rt}$. **37.** $n = \frac{2mI}{rB} - 1$. **39.** 10. **41.** 67 pie.

EJERCICIOS 2.3

1. 2. **3.** 4, 3. **5.** 3, -1. **7.** 6. **9.** ± 2. **11.** 0, 8. **13.** $\frac{1}{2}$. **15.** 1, $-\frac{5}{2}$. **17.** 5, -2.

19. 0, $\frac{3}{2}$. **21.** 0, 1, -2. **23.** 0, ± 8. **25.** 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}$. **27.** -3, -1, 2. **29.** 3, 4. **31.** 4, -6.

33. $\frac{3}{2}$. **35.** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$. **37.** No hay raíces reales. **39.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{3}$. **41.** 4, $-\frac{5}{2}$. **43.** $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$.

45. $\frac{3}{2}$, -1. **47.** 6, -2. **49.** $\frac{1}{2}$. **51.** 5, -2. **53.** $\frac{3}{2}$. **55.** -2. **57.** 7.

59. 4, 8. **61.** 2. **63.** 0, 4. **65.** 4. **69.** 1 año y 10 años

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 2)

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $-\frac{2}{15}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $\varnothing$. **9.** $\frac{5}{2}$. **11.** $\frac{1}{3}$. **13.** $-\frac{9}{7}$. **15.** $-\frac{5}{3}$, 1. **17.** 0, $\frac{7}{5}$.

19. 5. **21.** $\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$. **23.** $\frac{5}{8}$, -3. **25.** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. **27.** 4, ± 3. **29.** $\frac{1}{2}$. **31.** $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$.

33. 10. **35.** 5. **37.** No hay solución **39.** 10. **41.** 4, 8.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 2)

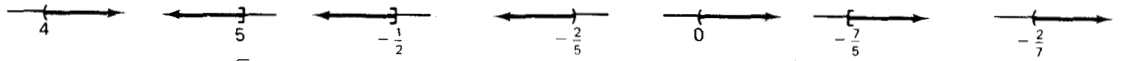
1. **(a)** \$111.40; **(b)** \$1.135; **(c)** 100 lb; **(d)** 98.15 lb; **(e)** -1.85%.

EJERCICIOS 3.1

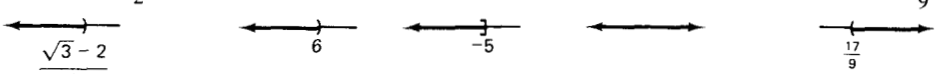
1. 181,250. **3.** \$4000 al 6%, \$16,000 al 7½%. **5.** \$4.25. **7.** 4%. **9.** 80. **11.** \$8000. **13.** 1600.
15. \$72.50. **17.** 40. **19.** 46,000 unidades. **21.** \$440 o bien \$460. **23.** \$100. **25.** 77.
27. 80 pie por 140 pie. **29.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho **31.** \$112,000. **33.** 60.
35. 125 unidades de A y 100 unidades de B, o bien 150 unidades de A y 125 unidades de B.

EJERCICIOS 3.2

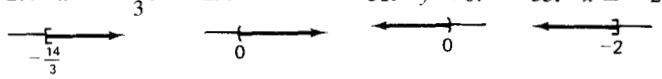
1. $x > 4$. **3.** $x \leq 5$. **5.** $x \leq -\frac{1}{2}$. **7.** $s < -\frac{2}{5}$. **9.** $y > 0$. **11.** $x \geq -\frac{7}{5}$. **13.** $x > -\frac{2}{7}$.



15. $\varnothing$. **17.** $x < \frac{\sqrt{3}-2}{2}$. **19.** $x < 6$. **21.** $y \leq -5$. **23.** $-\infty < x < \infty$. **25.** $t > \frac{17}{9}$.



27. $x \geq -\frac{14}{3}$. **29.** $r > 0$. **31.** $y < 0$. **33.** $x \leq -2$. **35.** $444{,}000 < S < 636{,}000$.



EJERCICIOS 3.3

1. Cuando menos 120,001. **3.** 12,400. **5.** 60,000. **7.** \$25,714.29. **9.** 1000. **11.** $t > 36.5$. **13.** \$4.50, \$1160.

EJERCICIOS 3.4

1. 13. **3.** 6. **5.** 5. **7.** $-3 < x < 3$. **9.** $\sqrt{5} - 2$. **11.** **(a)** $|x - 7| < 3$, **(b)** $|x - 2| < 3$, **(c)** $|x - 7| \leq 5$, **(d)** $|x - 7| = 4$, **(e)** $|x + 4| < 2$, **(f)** $|x| < 3$, **(g)** $|x| > 6$, **(h)** $|x - 6| > 4$, **(i)** $|x - 105| < 3$, **(j)** $|x - 850| < 100$. **13.** $|p_1 - p_2| \leq 2$. **15.** ± 7. **17.** ± 6. **19.** $-3, 13$. **21.** $\frac{2}{5}$. **23.** $\frac{1}{2}, 3$. **25.** $-4 < x < 4$. **27.** $x < -8, x > 8$. **29.** $-9 < x < -5$. **31.** $x < 0, x > 1$. **33.** $2 \leq x \leq 3$. **35.** $x \leq 0, x \geq \frac{16}{3}$. **37.** $x < \mu - h\sigma, x > \mu + h\sigma$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 3)

1. $x \leq 0$. **3.** $x > \frac{2}{3}$. **5.** $\varnothing$. **7.** $x \leq \frac{13}{2}$. **9.** $-\infty < s < \infty$. **11.** $-2, 5$. **13.** $0 < t < \frac{1}{2}$. **15.** $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{7}{2}$. **17.** 542. **19.** 6000.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 3)

1. 1 hora. **3.** 1 hora **5.** 1 hora y 12 minutos.

EJERCICIOS 4.1

1. Todos los números reales excepto 0. **3.** Todos los números reales ≥ 3. **5.** Todos los números reales.

7. Todos los números reales excepto $-\frac{5}{2}$. **9.** Todos los números reales excepto 0 y 1.

11. Todos los números reales excepto 4 y $-\frac{1}{2}$. **13.** 0, 15, -20.

15. $-62, 2 - u^2, 2 - u^4$. **17.** $2, (2v)^2 + 2v = 4v^2 + 2v, (-x^2)^2 + (-x^2) = x^4 - x^2$.

19. 4, 0, $(x + h)^2 + 2(x + h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1$.

21. 0, $\dfrac{3x - 5}{(3x)^2 + 4} = \dfrac{3x - 5}{9x^2 + 4}$, $\dfrac{(x + h) - 5}{(x + h)^2 + 4} = \dfrac{x + h - 5}{x^2 + 2xh + h^2 + 4}$. **23.** 0, 256, $\dfrac{1}{16}$. **25.** **(a)** $4x + 4h - 5$; **(b)** 4.

27. **(a)** $x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$; **(b)** $2x + h + 2$. **29.** y es función de x; x es función de y.

31. y es función de x; x no es función de y. **33.** Sí. **35.** $V = f(t) = 10{,}000 + 400t$. **37.** Sí; P; q.

39. **(a)** 4; **(b)** $8\sqrt[3]{2}$; **(c)** Duplicando la intensidad se duplica la respuesta en un factor $2\sqrt[3]{2}$.

41. **(a)** 3000, 2900, 2300, 2000; 12, 10; **(b)** 10, 12, 17, 20; 3000, 2300.

EJERCICIOS 4.2

1. Todos los números reales. **3.** Todos los números reales. **5.** **(a)** 3; **(b)** 7. **7.** **(a)** 4; **(b)** -3. **9.** 8, 8, 8.

11. 1, -1, 0, -1. **13.** 8, 3, 3, 1. **15.** 720. **17.** 2. **19.** 5. **21.** **(a)** $C = 850 + 3q$; **(b)** 250.

23. $\dfrac{9}{64}$. **25.** **(a)** Todas las T tal que $30 \le T \le 39$; **(b)** 4, $\dfrac{17}{4}$, $\dfrac{33}{4}$.

EJERCICIOS 4.3

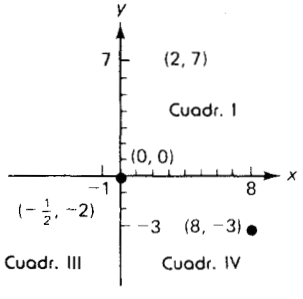
1. **(a)** $2x + 8$; **(b)** 8; **(c)** -2; **(d)** $x^2 + 8x + 15$; **(e)** 3; **(f)** $\dfrac{x + 3}{x + 5}$; **(g)** $x + 8$; **(h)** 11; **(i)** $x + 8$. **3.** **(a)** $2x^2 + x$; **(b)** $-x$; **(c)** $\dfrac{1}{2}$; **(d)** $x^4 + x^3$; **(e)** $\dfrac{x^2}{x^2 + x} = \dfrac{x}{x + 1}$ (for $x \neq 0$); **(f)** -1; **(g)** $(x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$, **(h)** $x^4 + x^2$; **(i)** 90. **5.** 6; -32. **7.** $\dfrac{4}{(t - 1)^2} + \dfrac{6}{t - 1} + 1$; $\dfrac{2}{t^2 + 3t}$.

9. $\dfrac{1}{v + 3}$; $\sqrt{\dfrac{2w^2 + 3}{w^2 + 1}}$. **11.** $f(x) = x^5$, $g(x) = 4x - 3$. **13.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 2$.

15. $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = \dfrac{x + 1}{3}$. **17.** $400m - 10m^2$; los ingresos totales que se reciben cuando se vende la producción total de m trabajadores.

EJERCICIOS 4.4

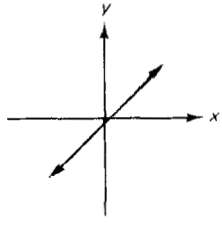
1.



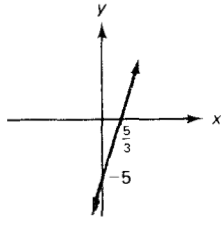
3. **(a)** 1, 2, 3, 0;
(b) Todos los números reales;
(c) Todos los números reales.

5. **(a)** 0, -1, -1;
(b) Todos los números reales;
(c) Todos los reales no positivos.

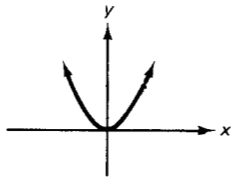
7. (0, 0); Función; todos los números reales; todos los números reales.



9. (0, -5), $(\frac{5}{3}, 0)$; Función; todos los números reales; todos los números reales.

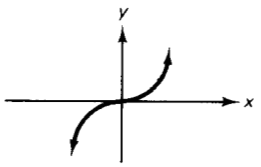


11. Función; todos los números reales; todos los numeros reales no negativos.

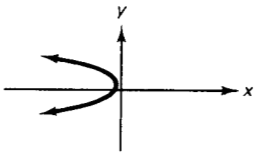


13. Todos los puntos están sobre el eje y. No es función de x.

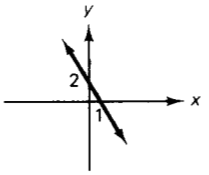
15. (0, 0) Función; todos los números reales; todos los números reales.



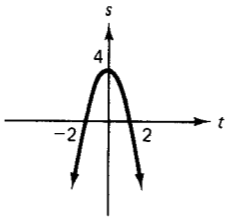
17. (0, 0) No es función de x.



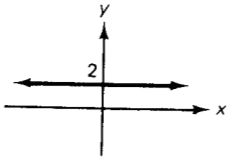
19. (0, 2), (1, 0); Función; todos los números reales; todos los números reales.



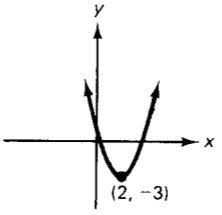
21. (0, 4), (2, 0), (−2, 0); Todos los números reales; todos los reales ≥ 4.



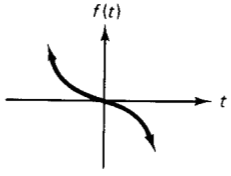
23. (0, 2); Todos los números reales; 2.



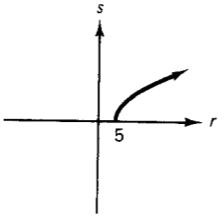
25. (0, 1), $(2 \pm \sqrt{3}, 0)$; Todos los números reales; todos los reales ≥ -3.



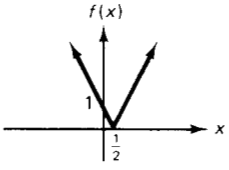
27. (0, 0); Todos los números reales; todos los números reales.



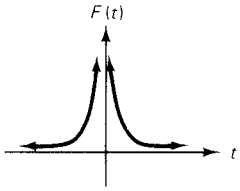
29. (5, 0); Todos los números reales ≥ 5; todos los reales no negativos.



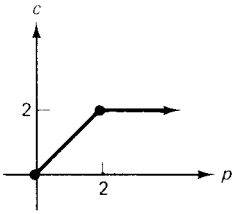
31. (0, 1) (½, 0); Todos los números reales; todos los reales no negativos.



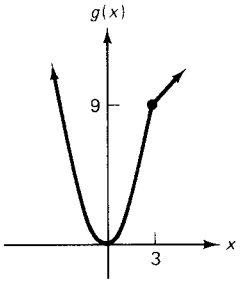
33. No hay intercepciones con los ejes; todos los números reales difieren de cero; todos los números reales positivos.



35. Todos los reales no negativos; todos los reales x en donde $0 \leq x \leq 2$.

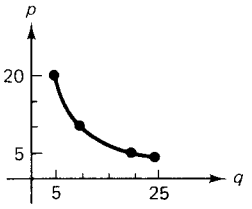


37. Todos los números reales; todos los reales no negativos.



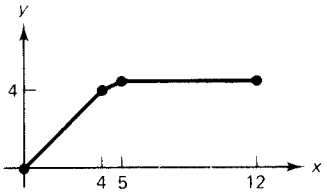
39. a, b, d.

41.



Conforme el precio disminuye, la cantidad aumenta; p es función de q.

43.



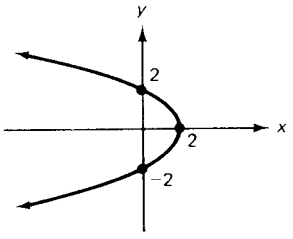
EJERCICIOS 4.5

1. (0, 0); simetría respecto al origen **3.** $(\pm 2, 0)$, (0, 8); simetría respecto al eje y

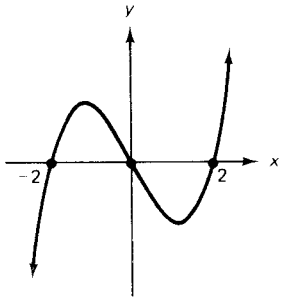
5. $(\pm 3, 0)$; simetría respecto al eje x, al eje y y al origen **7.** $(-2, 0)$; simetría respecto al eje x

9. simetría respecto al eje x **11.** $(-21, 0)$, (0, −7), (0, 3). **13.** simetría respecto al origen **15.** (0, 1).

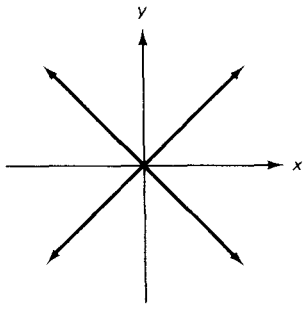
17. (2, 0), $(0, \pm 2)$; simetría respecto al eje x



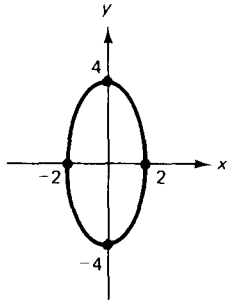
19. $(\pm 2, 0)$, (0, 0); simetría respecto al origen



21. (0, 0); simetría respecto al eje x, al eje y y al origen



23. $(\pm 2, 0), (0, \pm 4)$; simetría respecto al eje x, al eje y y al origen



PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 4)

1. Todos los números reales excepto 1 y 2. **3.** Todos los números reales.

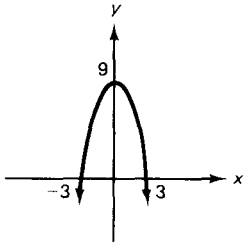
5. Todos los reales no negativos excepto 1.

7. $7, 46, 62, 3t^2 - 4t + 7$. **9.** $0, 3, \sqrt{t}, \sqrt{x^2 - 1}$. **11.** $\frac{3}{5}, 0, \frac{\sqrt{x+4}}{x}, \frac{\sqrt{u}}{u-4}$. **13.** $-8, 4, 4, -92$.

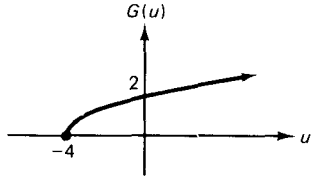
15. **(a)** $3 - 7x - 7h$; **(b)** -7. **17.** **(a)** $5x + 2$; **(b)** 22; **(c)** $x - 4$; **(d)** $6x^2 + 7x - 3$; **(e)** 10; **(f)** $\frac{3x-1}{2x+3}$; **(g)** $3(2x + 3) - 1 = 6x + 8$; **(h)** 38; **(i)** $2(3x - 1) + 3 = 6x + 1$. **19.** $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

21. $x^3 + 2, (x + 2)^3$. **23.** $(0, 0), (\pm\sqrt{2/3}, 0)$; simetría con respecto al origen

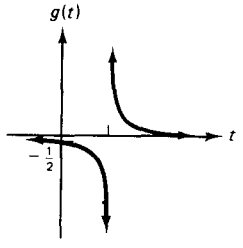
25. $(0, 9), (\pm 3, 0)$, simetría con respecto al eje y.



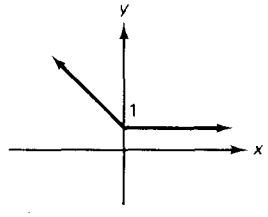
27. $(0, 2), (-4, 0)$; todas las $u \geq -4$; todos los reales.



29. $(0, -\frac{1}{2})$; todas las $t \neq 4$; todos los números reales diferentes de cero.



31. Todos los números reales; todos los reales ≥ 1.



33. a, c.

APLICACIÓN PÁCTICA (CAP. 4)

1. \$25,537.50 **3.** \$69,384.00.

EJERCICIOS 5.1

1. 3. **3.** $-\frac{1}{2}$. **5.** Indefinido. **7.** 0. **9.** $6x - y - 4 = 0$. **11.** $x + 4y - 18 = 0$.

13. $3x - 7y + 25 = 0$. **15.** $8x - 5y - 29 = 0$. **17.** $2x - y + 4 = 0$. **19.** $x + 2y + 6 = 0$.

21. $y + 2 = 0$. **23.** $x - 2 = 0$. **25.** 2; -1. **27.** $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

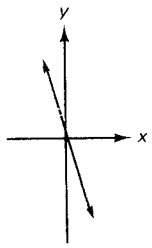
29. La pendiente no está definida; no existe intersección con el eje y. **31.** 3; 0.

33. 0; 1. **35.** $2x + 3y - 5 = 0$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. **37.** $4x + 9y - 5 = 0$; $y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$.

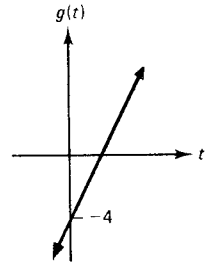
39. $3x - 2y + 24 = 0$; $y = \frac{3}{2}x + 12$. **41.** $(5, -4)$.

EJERCICIOS 5.2

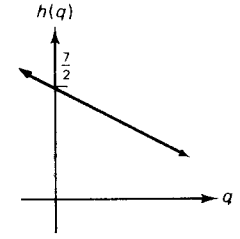
1. -4; 0.



3. 2; -4.

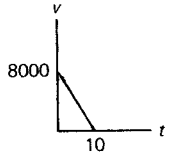


5. $-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$.



7. $f(x) = 4x$. **9.** $f(x) = -2x + 4$. **11.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$. **13.** $f(x) = x + 1$. **15.** $p = -\frac{2}{5}q + 28$; \$16.

17. $c = 3q + 10$; \$115. **19.** $v = -800t + 8000$; pendiente $= -800$.



21. $x + 10y = 100$. **23.** **(a)** $y = \frac{5}{11}x + \frac{600}{11}$; **(b)** 12. **25.** **(a)** $p = 0.059t + 0.025$; **(b)** 0.556.

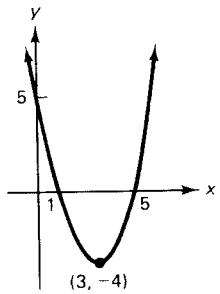
27. **(a)** $t = \frac{1}{4}c + 37$; **(b)** sumar 37 al número de sonidos en 15 segundos.

EJERCICIOS 5.3

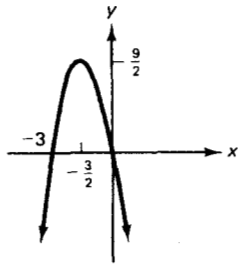
1. Cuadrática **3.** No cuadrática **5.** Cuadrática **7.** Cuadrática

9. **(a)** (1, 11); **(b)** Más alto. **11.** **(a)** -8; **(b)** -4, 2; **(c)** $(-1, -9)$.

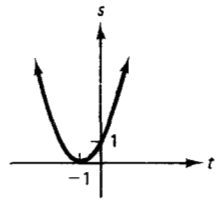
13. Vértice: $(3, -4)$; intersecciones: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$; contradominio ("rango"): toda $y \geq -4$.



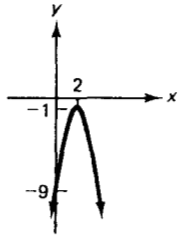
15. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; intersecciones: $(0, 0)$, $(-3, 0)$; contradominio: toda $y \leq \frac{9}{2}$.



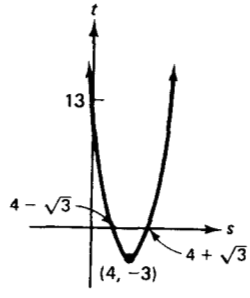
17. Vértice: $(-1, 0)$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(0, 1)$; ámbito o contradominio: toda $s \geq 0$.



19. Vértice: $(2, -1)$; intersección: $(0, -9)$; contradominio: toda $y \leq -1$.



21. Vértice: $(4, -3)$; intersecciones: $(4 + \sqrt{3}, 0)$, $(4 - \sqrt{3}, 0)$, $(0, 13)$; contradominio: toda $t \geq -3$. $t \geq -3$.



23. Mínimo; 24. **25.** Máximo; -10. **27.** $q = 200$; $r = \$120{,}000$. **29.** 70 gramos.

EJERCICIOS 5.4

1. $x = -1, y = 1$. **3.** $x = 3, y = -1$. **5.** $v = 0, w = 18$. **7.** No tiene solución. **9.** $x = 12, y = -12$.

11. Las coordenadas de cualquier punto que se encuentre sobre la recta $q = -\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}$. **13.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$.

15. $x = 1, y = 1, z = 1$. **17.** 420 galones de la solución al 20% y 280 galones de la solución al 30%.

19. 240 unidades de norteamericano clásico y 200 unidades de contemporáneo.

21. 800 calculadoras de la planta Exton y 700 de la planta Whyton.

23. 4% sobre los primeros \$100,000 y 6% sobre lo restante.

25. 60 unidades de Argón I, 40 unidades de Argón II. **27.** 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

29. 40 trabajadores semicalificados, 20 calificados y 10 empleados de envíos.

EJERCICIOS 5.5

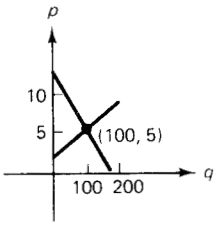
1. $x = 4, y = -12; x = -1, y = 3$. **3.** $p = -3, q = -5; p = 2, q = 0$. **5.** $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1$.

7. $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3$. **9.** $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1$.

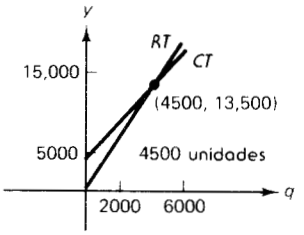
11. $x = 3\sqrt{2}, y = 2; x = -3\sqrt{2}, y = 2; x = \sqrt{15}, y = -1; x = -\sqrt{15}, y = -1$. **13.** $x = 21, y = 15$.

EJERCICIOS 5.6

1.



3. (5, 212.50). **5.** (9, 38). **7.** (15, 5). **9.**



11. No se puede estar en el punto de equilibrio en ningún nivel de producción. **13.** 10 unidades o 40 unidades.

15. (a) \$12; (b) \$12.18 **17.** 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades. **19.** \$4.

21. El costo total siempre supera a los costos totales; no existe punto de equilibrio.

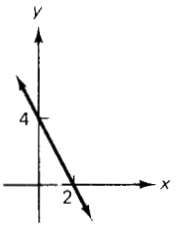
23. Disminuye en \$0.70.

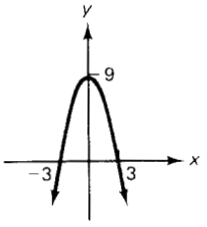
25. $p_A = 5$; $p_B = 10$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 5)

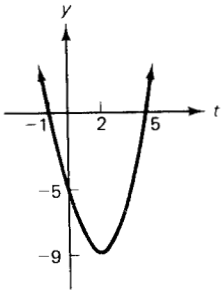
1. 9. **3.** $y = -x + 1; x + y - 1 = 0$. **5.** $y = \frac{1}{2}x - 1; x - 2y - 2 = 0$. **7.** $y = 4; y - 4 = 0$.

9. $y = \frac{3}{2}x - 2; \frac{3}{2}$. **11.** $y = \frac{4}{3}; 0$. **13.** -2; (0, 4). **15.** (3, 0), (−3, 0), (0, 9); (0, 9).

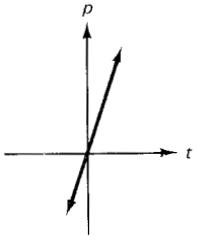




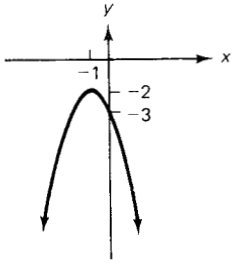
17. (5, 0), (−1, 0), (0, −5); (2, −9).



19. 3; (0, 0).



21. (0, −3); (−1, −2).



23. $x = \frac{17}{7}, y = -\frac{8}{7}$. **25.** $x = 2, y = -1$. **27.** $x = 8, y = 4$. **29.** $x = 0, y = 1, z = 0$.

31. $x = -3, y = -4; x = 2, y = 1$. **33.** $a + b - 3 = 0$; 0. **35.** $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$.

37. 50 unidades; \$5000. **39.** 6.

41. **(a)** $R = 75L + 1310$; **(b)** 1385 milisegundos (ms); **(c)** la pendiente es 75, el tiempo necesario para viajar de un nivel al siguiente es 75 (ms).

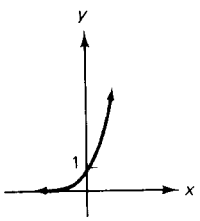
APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP 5.)

1. **(a)** 12; **(b)** $F(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x = 2 \\ 6, & \text{si } x = 3 \\ [\frac{12}{11}(x - 1) + 4.5] & \text{en los demás casos;} \end{cases}$

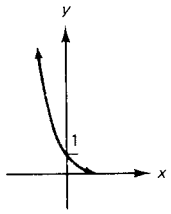
(c) $F(1) = 4$, $F(2) = 4$, $F(3) = 6$, $F(4) = 7$, $F(5) = 8$, $F(6) = 9$, $F(7) = 11$, $F(8) = 12$, $F(9) = 13$, $F(10) = 14$, $F(11) = 15$, $F(12) = 16$.

EJERCICIOS 6.1

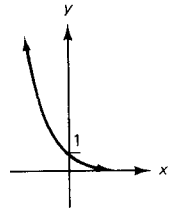
1.



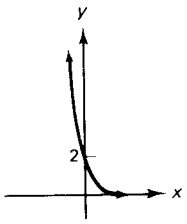
3.



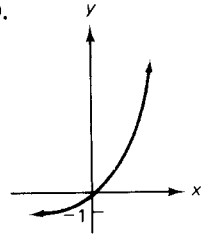
5.



7.



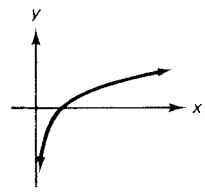
9.



11. **(a)** \$6014.52; **(b)** \$2014.52. **13.** **(a)** \$1964.76; **(b)** \$1264.76. **15.** **(a)** \$19,606.76; **(b)** 9606.76.
17. **(a)** \$6256.36; **(b)** \$1256.36. **19.** \$14,124.86. **21.** \$9649.69. **23.** \$10,446.14. **25.** 4.4817.
27. 0.67032. **29.** 140,000. **31.** 0.2241. **33.** 0.399; 0.242; 0.242. **35.** **(a)** 10; **(b)** 7.6; **(c)** 2.5; **(d)** 25 horas **37.** 32 años **39.** 0.1466.

EJERCICIOS 6.2

1. $\log 10{,}000 = 4$. **3.** $2^6 = 64$. **5.** $\ln 7.3891 = 2$. **7.** $e^{1.09861} = 3$. **9.**



11. 2.
13. 3. **15.** 1. **17.** -2. **19.** 0. **21.** -3. **23.** 9. **25.** 125. **27.** $\frac{1}{10}$. **29.** e^2. **31.** 2.
33. 6. **35.** $\frac{1}{81}$. **37.** 2. **39.** $\frac{5}{3}$. **41.** $\frac{\ln 2}{3}$. **43.** $\frac{5 + \ln 3}{2}$. **45.** 1.60944. **47.** 2.00013.
49. 41.50. **51.** $E = 2.5 \times 10^{11 + 1.5M}$. **53.** $e^{[u_0 - (\sqrt{2}/2)]/A}$. **55.** 21.7 años

EJERCICIOS 6.3

1. 1.1761. **3.** 0.4260. **5.** 1.5564. **7.** 3.3010. **9.** 48. **11.** 5.01. **13.** 1.5850. **15.** -1. **17.** 4.
19. $\ln x + 2\ln(x + 1)$. **21.** $2\ln x - 3\ln(x + 1)$. **23.** $3[\ln x - \ln(x + 1)]$. **25.** $\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.

27. $\frac{1}{2}\ln x - 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2)$. **29.** $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x+1) - \ln(x+2)$. **31.** $\log 28$. **33.** $\log_2 \frac{2x}{x+1}$.

35. $\log[7^9(23)^5]$. **37.** $\log[100(1.05)^{10}]$. **39.** $\frac{5}{2}$. **41.** ± 2. **43.** $\frac{\ln(x+8)}{\ln 10}$. **45.** $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln 3}$.

47. $\log y = \log a + x \log b$. **49.** **(a)** 3; **(b)** $2 + M_1$.

EJERCICIOS 6.4

1. 5.000. **3.** 1.333. **5.** 2.000. **7.** 0.083. **9.** 0.805. **11.** 0.203. **13.** 5.140. **15.** -0.073.

17. 2.322. **19.** 3.183. **21.** 0.483. **23.** 2.496. **25.** 1003.000. **27.** 6.667. **29.** 3.082.

31. 3.000. **33.** 0.500. **35.** $S = 12.4A^{0.26}$. **37.** **(a)** 100; **(b)** 46. **39.** **(a)** 91; **(b)** 432; **(c)** 8.

41. 20.48. **43.** $p = \frac{\log(80 - q)}{\log 2}$; 4.32. **45.** 7.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 6)

1. $\log_3 243 = 5$. **3.** $16^{1/4} = 2$. **5.** $\ln 54.598 = 4$. **7.** 3. **9.** -4. **11.** -2. **13.** 3. **15.** $\frac{1}{100}$.

17. 3. **19.** 3.3980. **21.** $\log \frac{25}{27}$. **23.** $\ln \frac{x^2y}{z^3}$. **25.** $\log_2 \frac{x^{9/2}}{(x+1)^3(x+2)^4}$. **27.** $2\ln x + \ln y - 3\ln z$.

39. $2x$. **29.** $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z)$. **31.** $\frac{1}{2}(\ln y - \ln z) - \ln x$. **33.** $\frac{\ln(x+5)}{\ln 3}$. **35.** 1.8295. **37.** $2y + \frac{1}{2}x$.

41. $y = e^{x^2+2}$. **43.** $\frac{1}{3}$. **45.** 1. **47.** 10. **49.** 0.231. **51.** -3.222. **53.** -1.596.

55. **(a)** \$3829.05; **(b)** \$1229.05. **57.** \$6915.66. **59.** **(a)** 10 mg; **(b)** 4.4; **(c)** 1.7; **(d)** 1.7; **(e)** 5.6.

61. **(a)** 6; **(b)** 28.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 6)

1. **(a)** $P = \frac{T(e^{kI} - 1)}{1 - e^{-dkI}}$; **(b)** $d = \frac{1}{kI}\ln\left[\frac{P}{P - T(e^{kI} - 1)}\right]$. **3.** **(a)** 156; **(b)** 65.

EJERCICIOS 7.1

1. **(a)** \$11,105.58; **(b)** \$5105.58. **3.** 8.24%. **5.** 8.32776%. **7.** 9.0 years. **9.** \$10,282.94.

11. \$16,117.63. **13.** **(a)** 18%; **(b)** 19.56%. **15.** \$3198.54. **17.** 8% compuesto anualmente.

19. **(a)** 5.47%; **(b)** 5.39%. **21.** 11.61%. **23.** 11.11%.

EJERCICIOS 7.2

1. \$2261.33. **3.** \$1751.83. **5.** \$1598.37. **7.** \$5118.10. **9.** \$4862.31. **11.** \$6838.95.

13. \$14,091.11. **15.** \$1238.58. **17.** \$1963.28. **19.** **(a)** \$515.63; **(b)** redituable. **21.** Cuenta de ahorros.

23. \$103.56. **25.** 9.55%.

EJERCICIOS 7.3

1. 64, 32, 16, 8, 4. **3.** 100, 102, 104.04. **5.** $\frac{422}{243}$. **7.** 1.11111. **9.** 18.664613. **11.** 8.213180.

13. \$2050.10. **15.** \$29,984.06. **17.** \$8001.24. **19.** \$90,231.01. **21.** \$204,977.46. **23.** \$24,594.36.

25. \$1937.14. **27.** \$458.40. **29.** **(a)** \$3048.85; **(b)** \$648.85. **31.** \$3474.12. **33.** \$1725.

35. 102.91305. **37.** 55,360.30. **39.** \$131.34. **41.** \$418,288.84.

EJERCICIOS 7.4

1. \$69.33. **3.** \$1565.56. **5.** (a) \$249.11; (b) \$75; (c) \$174.11.

7.

Periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	5000.00	350.00	1476.14	1126.14
2	3873.86	271.17	1476.14	1204.97
3	2668.89	186.82	1476.14	1289.32
4	1379.57	96.57	1476.14	1379.57
		904.56	5904.56	5000.00

9.

Periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	900.00	22.50	193.72	171.22
2	728.78	18.22	193.72	175.50
3	553.28	13.83	193.72	179.89
4	373.39	9.33	193.72	184.39
5	189.00	4.73	193.72	188.99
		68.61	968.60	899.99

11. 11. **13.** \$1273. **15.** (a) \$415.28; (b) \$382.50; (c) \$32.78; (d) \$79,584. **17.** 23. **19.** \$74,417.
21. \$38.64.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 7)

1. $\frac{63}{16}$. **3.** 8.5% compuesto anualmente. **5.** \$586.60. **7.** (a) \$1997.13; (b) \$3325.37. **9.** \$1036.85.
11. \$886.98. **13.** \$314.00.

15.

Periodo	Capital insoluto al principio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	15,000.00	112.50	3067.84	2955.34
2	12,044.66	90.33	3067.84	2977.51
3	9,067.15	68.00	3067.84	2999.84
4	6,067.31	45.50	3067.84	3022.34
5	3,044.97	22.84	3067.84	3045.00
		339.17	15,339.20	15,000.03

17. \$3296.32.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 7)

1. \$80.77. **3.** \$7158.28.

EJERCICIOS 8.1

1. **(a)** 2×3, 3×3, 3×2, 2×2, 4×4, 1×2, 3×1, 3×3, 1×1; **(b)** **B, D, E, H, J;** **(c)** **H, J** triangular superior; **D, J** triangular inferior; **(d)** **F, J;** **(e)** **G, J.** **3.** 2. **5.** 4. **7.** 6. **9.** 7, 2, 1, 0.

11. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$. **13.** 120 elementos, 1, 0, 1, 0. **15.** **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17. $x = 6, y = \frac{2}{3}, z = \frac{7}{2}$. **19.** $x = 0, y = 0$. **21.** **(a)** 7; **(b)** 3; **(c)** febrero; **(d)** azul de lujo; **(e)** febrero; **(f)** febrero; **(g)** 35.

EJERCICIOS 8.2

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -9 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. **5.** $[-9 \quad -7 \quad 6 \quad 11]$. **7.** No definida.

9. $\begin{bmatrix} -12 & 36 & -42 & -6 \\ -42 & -6 & -36 & 12 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 13 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. **15.** **O.** **17.** $\begin{bmatrix} 28 & 22 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

19. No definida. **21.** $\begin{bmatrix} -22 & -15 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 21 & \frac{29}{2} \\ \frac{19}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$. **29.** $x = \frac{146}{13}, y = -\frac{28}{13}$. **31.** $x = 6, y = \frac{4}{3}$.

33. $x = -6, y = -14, z = 1$. **35.** 1.1.

EJERCICIOS 8.3

1. -12. **3.** 19. **5.** 7. **7.** 2×2, 4. **9.** 3×5, 15. **11.** 2×1, 2. **13.** 3×3, 9.

15. 3×1, 3. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 10 & -16 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. **21.** $\begin{bmatrix} 23 \\ 50 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

25. $[-6 \quad 16 \quad 10 \quad -6]$. **27.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 6 \\ 6 & 9 & -6 & 9 \\ -8 & -12 & 8 & -12 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$. **31.** $\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$.

33. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. **35.** $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$. **37.** $\begin{bmatrix} -4 & 11 & -2 \\ 3 & -12 & 3 \end{bmatrix}$. **39.** $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$. **41.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \end{bmatrix}$.

43. $[7, 23]$. **45.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **47.** $\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$. **49.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

51. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$. **53.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$. **55.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$.

57. \$735,300. **59.** **(a)** \$180,000, \$520,000, \$400,000, \$270,000, \$380,000, \$640,000; **(b)** \$390,000, \$100,000, \$800,000; **(c)** \$2,390,000; **(d)** $\frac{110}{239}, \frac{129}{239}$

EJERCICIOS 8.4

1. No reducida. **3.** Reducida. **5.** No reducida. **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **13.** $x = 1, y = 1$. **15.** No tiene solución. **17.** $x = -\frac{2}{3}z + \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{6}z + \frac{7}{6}, z = z$.

19. No tiene solución. **21.** $x = -3, y = 1, z = 0$. **23.** $x = 2, y = -5, z = -1$.

25. $x_1 = 0, x_2 = -x_5, x_3 = -x_5, x_4 = -x_5, x_5 = x_5$. **27.** Federal, \$72,000; estatal, \$24,000.

29. A, 2000; B, 4000; C, 5000. **31.** **(a)** 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X, 2 de Y, 6 de Z; 3 de Y, 7 de Z. **(b)** 3 de X, 4 de Z. **(c)** 3 de X, 4 de Z; 3 de Y, 7 de Z.

EJERCICIOS 8.5

1. $w = -y - 3z + 2, x = -2y + z - 3, y = y, z = z$. **3.** $w = -z, x = -3y - 4z + 2, y = y, z = z$.

5. $w = -2y + z - 2, x = -y + 4, y = y, z = z$.

7. $x_1 = -2x_3 + x_4 - 2x_5 + 1, x_2 = -x_3 - 2x_4 + x_5 + 4, x_3 = x_3 x_4 = x_4, x_5 = x_5$. **9.** Infinita.

11. Trivial. **13.** Infinita. **15.** $x = 0, y = 0$. **17.** $x = -\frac{6}{5}z, y = \frac{8}{15}z, z = z$. **19.** $x = 0, y = 0$.

21. $x = z, y = -2z, z = z$. **23.** $w = -2z, x = -3z, y = z, z = z$.

EJERCICIOS 8.6

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$. **3.** No invertible. **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. **7.** No invertible.

9. No invertible (no es una matriz cuadrada). **11.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **19.** $x = 17, y = -20$. **21.** $x = 1, y = 3$.

23. $x = -3y + 1, y = y$. **25.** $x = 0, y = 1, z = 2$. **27.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

29. No tiene solución. **31.** $w = 1, x = 3, y = -2, z = 7$. **33.** $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

35. **(a)** 40 del primer modelo, 60 del segundo modelo; **(b)** 45 del primer modelo, 50 del segundo modelo.

EJERCICIOS 8.7

1. 1. **3.** 0. **5.** y. **7.** $-\frac{2}{7}$. **9.** 12. **11.** -12. **13.** 6. **15.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$. **19.** -16. **21.** 98. **23.** -89. **25.** -1. **27.** 2. **29.** -90.

31. 1. **33.** 24. **35.** 3, 4. **37.** 192.

EJERCICIOS 8.8

1. $x = \frac{9}{5}, y = -\frac{2}{5}$. **3.** $x = \frac{7}{16}, y = \frac{13}{8}$. **5.** $x = -\frac{1}{3}, y = -1$. **7.** $x = \frac{9}{5}, z = \frac{16}{5}$.

9. $x = 4, y = 2, z = 0$. **11.** $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{28}{15}, z = -\frac{26}{15}$. **13.** $x = 3 - z, y = 0, z = z$.

15. $x = 1, y = 3, z = 5$. **17.** $y = 6, w = 1$. **19.** Como $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, la regla de Cramer no se aplica. Pero las ecuaciones $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = -3 \end{cases}$ representan rectas paralelas distintas y, por ello, no existe solución.

EJERCICIOS 8.9

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

EJERCICIOS 8.10

1. $\begin{bmatrix} 1290 \\ 1425 \end{bmatrix}$; 1405. **3.** **(a)** $\begin{bmatrix} 297.80 \\ 349.54 \\ 443.12 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 102.17 \\ 125.28 \\ 175.27 \end{bmatrix}$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 8)

1. $\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -19 & -5 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 35 & 5 \\ 2 & -15 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$. **7.** $x = 3, y = 6$. **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **13.** $x = 0, y = 0$. **15.** No existe solución. **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$. **19.** No existe inversa.

21. $x = 0, y = 1, z = 0$. **23.** 18. **25.** 3. **27.** rico. **29.** $x = 1, y = 2$. **31.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

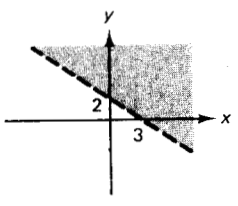
33. $\begin{bmatrix} 3.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 8)

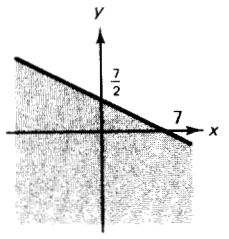
1. \$151.40.

EJERCICIOS 9.1

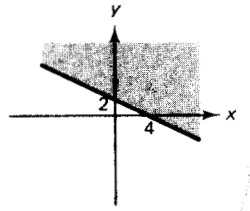
1.



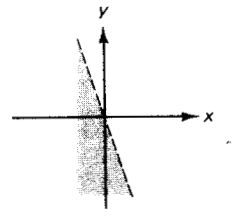
3.



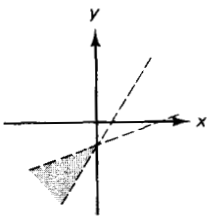
5.



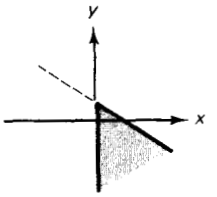
7.



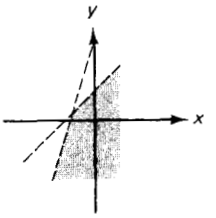
9.



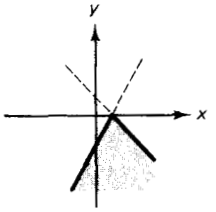
11.



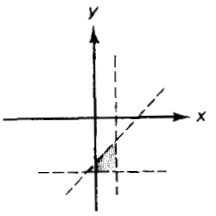
13.



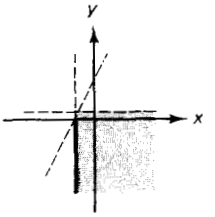
15.



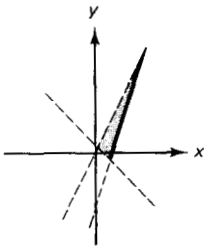
17.



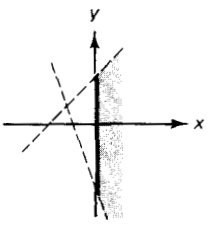
19.



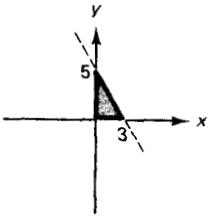
21.



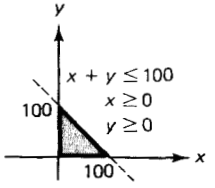
23.



25.



27.



x: número de libras de *A*
y: número de libras de *B*

EJERCICIOS 9.2

1. $P = 640$ cuando $x = 40, y = 20$. **3.** $Z = -10$ cuando $x = 2, y = 3$. **5.** No existe solución óptima (la región factible es vacía).

7. $Z = 3$ cuando $x = 0, y = 1$. **9.** $C = 2.4$ cuando $x = \frac{3}{5}, y = \frac{6}{5}$. **11.** No existe solución óptima (no acotado).

13. 15 "Maravilla", 25 "Fantástico"; \$210. **15.** 4 unidades del alimento A, 4 unidades del alimento B; \$8.

17. 10 ton del mineral I, 10 ton del mineral II; \$1100.

EJERCICIOS 9.3

1. $Z = 33$ cuando $x = (1 - t)(2) + 5t = 2 + 3t$, $y = (1 - t)(3) + 2t = 3 - t$, y $0 \le t \le 1$.
3. $Z = 72$ cuando $x = (1 - t)(3) + 4t = 3 + t$, $y = (1 - t)(2) + 0t = 2 - 2t$, y $0 \le t \le 1$.

EJERCICIOS 9.4

1. $Z = 8$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 4$. **3.** $Z = 14$ cuando $x_1 = 1, x_2 = 5$. **5.** $Z = 28$ cuando $x_1 = 3, x_2 = 2$.

7. $Z = 20$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0$. **9.** $Z = 2$ cuando $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$.

11. $Z = \frac{16}{3}$ cuando $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{14}{3}$. **13.** $W = 13$ cuando $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$.

15. $Z = 600$ cuando $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 0$. **17.** 400 de A, 1600 de B; \$1100.

19. 0 sillas, 300 mecedoras, 100 sofás; \$3600.

EJERCICIOS 9.5

1. Sí; para la tabla, x_2 es la variable que entra y los cocientes $\frac{6}{2}$ y $\frac{3}{1}$ están empatados siendo los menores.

3. No existe solución óptima (no acotada).

5. $Z = 12$ cuando $x_1 = (1 - t) \cdot 4 + 5t = 4 + t$, $x_2 = (1 - t) \cdot 0 + 1 \cdot t = t$, y $0 \leq t \leq 1$.

7. No existe solución óptima (no acotada). **9.** $Z = 13$ cuando $x_1 = (1 - t)\frac{3}{2} + 0t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t$, $x_2 = (1 - t)0 + 6t = 6t$, $x_3 = (1 - t)4 + 1 \cdot t = 4 - 3t$, y $0 \leq t \leq 1$.

11. \$3800. Si x_1, x_2 y x_3 denotan el número de sillas, mecedoras y sofás que se fabrican, respectivamente, entonces $x_1 = (1 - t)100 + 0t = 100 - 100t$, $x_2 = (1 - t)100 + 250t = 100 + 150t$, $x_3 = (1 - t)200 + 150t = 200 - 50t$, y $0 \leq t \leq 1$.

EJERCICIOS 9.6

1. $Z = 7$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. **3.** $Z = 4$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. **5.** $Z = \frac{58}{3}$ cuando $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$. **7.** $Z = -17$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **9.** No existe solución óptima (la región factible es vacía). **11.** $Z = 2$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 10$. **13.** 255 mesas contemporáneas y 0 tradicionales.

15. 30% en A, 0% en AA, 70% en AAA; 6.6%.

EJERCICIOS 9.7

1. $Z = 54$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. **3.** $Z = 36$ cuando $x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **5.** $Z = 4$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$. **7.** $Z = 0$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. **9.** $Z = 28$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$.

11. Instalar dispositivo A en los hornos que fabrican 700,000 costales anuales y el dispositivo B en los hornos que fabrican 2,600,000 costales anuales.

13. A Exton, 10 de A y 20 de B; a Whyton, 30 de A; \$760. **15.** **(a)** Columna 3: 1, 3, 3; columna 4: 0, 4, 8. **(b)** $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$. **(c)** 90 plg.

EJERCICIOS 9.8

1. Minimizar
$W = 6y_1 + 4y_2$
sujeta a
$y_1 - y_2 \geq 2$,
$y_1 + y_2 \geq 3$,
$y_1, y_2 \geq 0$.

3. Maximizar
$W = 8y_1 + 2y_2$
sujeta a
$y_1 - y_2 \leq 1$,
$y_1 + 2y_2 \leq 8$,
$y_1 + y_2 \leq 5$,
$y_1, y_2 \geq 0$.

5. Minimizar
$W = 13y_1 - 3y_2 - 11y_3$
sujeta a
$-y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$,
$2y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$,
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

7. Maximizar
$W = -3y_1 + 3y_2$
sujeta a
$-y_1 + y_2 \leq 4$,
$y_1 - y_2 \leq 4$,
$y_1 + y_2 \leq 6$,
$y_1, y_2 \geq 0$.

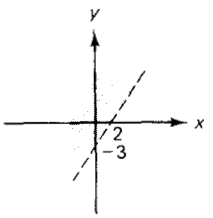
9. $Z = 11$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$. **11.** $Z = 26$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 1$.

13. $Z = 14$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **15.** \$25 en publicidad en periódicos, \$140 en publicidad de radio; \$165.

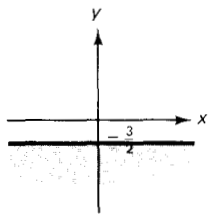
17. 20 aprendices de empleados de envío, 40 empleados de envío, 90 trabajadores semicalificados, 0 trabajadores calificados; \$600.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 9)

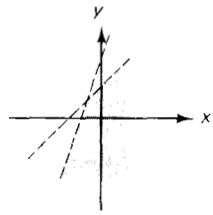
1.



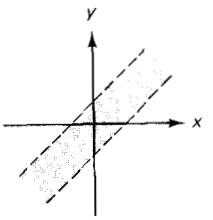
3.



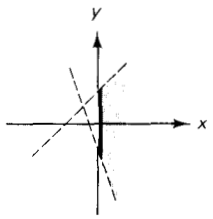
5.



7.



9.



11. $Z = 3$ cuando $x = 3$, $y = 0$. **13.** $Z = -2$ cuando $x = 0$, $y = 2$. **15.** No existe solución óptima (la región factible es vacía). **17.** $Z = 36$ cuando $x = (1 - t)(2) + 4t = 2 + 2t$, $y = (1 - t)(3) + 0t = 3 - 3t$ y $0 \le t \le 1$.

19. $Z = 32$ cuando $x_1 = 8$, $x_2 = 0$. **21.** $Z = 2$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

23. $Z = 24$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 12$. **25.** $Z = \frac{7}{2}$ cuando $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{9}{4}$.

27. No existe solución óptima (no acotada). **29.** $Z = 70$ cuando $x_1 = 35$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

31. 0 unidades de X, 6 unidades de Y, 14 unidades de Z; \$398.

33. 500,000 gal de A a D, 100,000 gal de A a C, 400,000 gal de B a C; \$19,000.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 9)

1. 2 minutos de radiación.

EJERCICIOS 10.1

1. 16. **3.** 20. **5.** -1. **7.** $-\frac{5}{2}$. **9.** 0. **11.** 5. **13.** -2. **15.** 3. **17.** 0. **19.** $\frac{1}{6}$.

21. $-\frac{1}{5}$. **23.** $\frac{11}{9}$. **25.** 4. **27.** $2x$. **29.** -1. **31.** $2x$. **33.** **(a)** 1; **(b)** 0.

EJERCICIOS 10.2

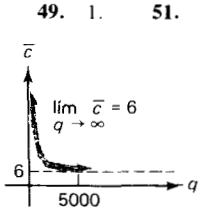
1. **(a)** 2; **(b)** 3; **(c)** no existe; **(d)** $-\infty$; **(e)** ∞; **(f)** ∞; **(g)** ∞; **(h)** 0; **(i)** 1; **(j)** 1; **(k)** 1. **3.** 1. **5.** $-\infty$.

7. $-\infty$. **9.** ∞. **11.** 0. **13.** No existe.x **15.** 0. **17.** ∞. **19.** 0. **21.** 1. **23.** 0. **25.** ∞.

27. 0. **29.** $-\frac{2}{5}$. **31.** $-\infty$. **33.** $\frac{2}{5}$. **35.** $\frac{11}{5}$. **37.** $-\frac{1}{2}$. **39.** ∞. **41.** ∞. **43.** No existe. **45.** $-\infty$.

47. 0. **49.** 1. **51.** **(a)** 1; **(b)** 2; **(c)** no existe; **(d)** 1; **(e)** 2. **53.** **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 0; **(d)** $-\infty$; **(e)** $-\infty$.

55.



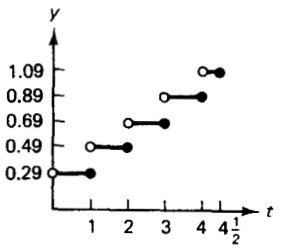
57. 20,000. **59.** 20. **61.** 1, 0.5, 0.525, 0.631, 0.912, 0.986, 0.998; se concluye que el límite es 1.

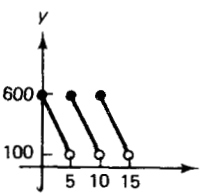
EJERCICIOS 10.3

1. \$5564; \$1564. **3.** \$1456.88. **5.** 4.08%. **7.** 10.52%. **9.** \$111.63. **11.** \$670,320. **13.** 4.88%.
15. \$927. **17.** 16.

EJERCICIOS 10.4

7. Continua en -2 y 0. **9.** Discontinua en ± 3. **11.** Continuous at 2 and 0. **7.** None. **19.** $x = 4$.
13. f es una función polinomial. **15.** f es una función racional y el denominador nunca es cero.
21. Ninguna. **23.** $x = -5, 3$. **25.** $x = 0, \pm 1$. **27.** Ninguna. **29.** $x = 0$. **31.** Ninguna. **33.** $x = 2$.
35. Discontinuities at $t = 1, 2, 3, 4$. **37.** Yes, no, no.





EJERCICIOS 10.5

1. $x < -1, x > 4$. **3.** $2 \le x \le 3$. **5.** $-\frac{7}{2} < x < -2$. **7.** No existe solución. **9.** $x \le -6, -2 \le x \le 3$.
11. $x < -4, 0 < x < 5$. **13.** $x \ge 0$. **15.** $-3 < x < 0, x > 1$. **17.** $x < -1, 0 < x < 1$. **19.** $x > 1$.
21. $x < -5, -2 \le x < 1, x \ge 3$. **23.** $-4 < x < -2$. **25.** $x \le -1 - \sqrt{3}, x \ge -1 + \sqrt{3}$.
27. Entre 50 y 150, inclusive. **29.** 17 plg por 17 plg.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 10)

1. -5. **3.** 2. **5.** x. **7.** $-\frac{8}{3}$. **9.** 0. **11.** $\frac{3}{5}$. **13.** No existe. **15.** -1. **17.** $\frac{1}{9}$. **19.** $-\infty$.
21. ∞. **23.** 1. **25.** 8. **27.** 11. **29.** **(a)** \$6661.25; **(b)** \$938.28. **31.** 6.18%.
35. Continua en todas partes; f es una función polinomial. **37.** $x = -3$. **39.** Ninguna. **41.** $x = -4, 1$.
43. $x = -2$. **45.** $x < -6, x > 2$. **47.** $x \ge 2, x = 0$. **49.** $x < -5, -1 < x < 1$.
51. $x < -4, -3 \le x \le 0, x > 2$.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 10)

1. 32.6%.

EJERCICIOS 11.1

1. 1. **3.** 3. **5.** -4. **7.** 0. **9.** $2x + 4$. **11.** $4q + 5$. **13.** $-1/x^2$. **15.** $1/(2\sqrt{x+2})$.
17. -4. **19.** 0. **21.** $y = x + 4$. **23.** $y = -3x - 7$. **25.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. **27.** $\dfrac{r}{r_L - r - \dfrac{dC}{dD}}$.

EJERCICIOS 11.2

1. 0. **3.** $5x^4$. **5.** $32x^3$. **7.** $-7w^{-8}$. **9.** $-\frac{56}{5}x^{-19/5}$. **11.** 3. **13.** $\frac{13}{5}$. **15.** $6x - 5$.

17. $42x^2 - 12x + 7$. **19.** $-9q^2 + 9q + 9 = 9(1 + q - q^2)$. **21.** $1002x^{500} - 12{,}500x^{99} + 0.68x^{2.4}$.

23. $-8x^3$. **25.** $-\frac{4}{3}x^3$. **27.** $-4x^{-5} - 3x^{-2/3} - 2x^{-7/5}$. **29.** $-2(27 - 70x^4) = 2(70x^4 - 27)$.

31. $-4x + \frac{3}{2} + x^3$. **33.** $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. **35.** $-\frac{5}{4}s^{-6}$. **37.** $2t^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{t}}$. **39.** $-\frac{1}{5}x^{-6/5}$.

41. $9x^2 - 14x + 7$. **43.** $t + 4t^{-3}$. **45.** $45x^4$. **47.** $\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{10}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-5/3}(x - 10)$.

49. $8q + \frac{4}{q^2}$. **51.** $2(x + 2)$. **53.** 1. **55.** 4, 16, −14. **57.** 0, 0, 0. **59.** $y = 13x - 2$.

61. $y = x + 3$. **63.** $(0, 0), (2, -\frac{4}{3})$.

EJERCICIOS 11.3

1. (a) 4 m; (b) 5 m/s. **3.** (a) 8 m; (b) 6 m/s. **5.** (a) 2 m; (b) 9 m/s. **7.** $dy/dx = 10x^{3/2}$; 270.

9. 0.27. **11.** $dc/dq = 10$; 10. **13.** $dc/dq = 0.6q + 2$; 3.8. **15.** $dc/dq = 2q + 50$; 80, 82, 84.

17. $dc/dq = 0.02q + 5$; 6, 7. **19.** $dc/dq = 0.00006q^2 - 0.02q + 6$; 4.6, 11. **21.** $dr/dq = 0.7$; 0.7, 0.7, 0.7.

23. $dr/dq = 250 + 90q - 3q^2$; 625, 850, 625. **25.** $dc/dq = 6.750 - 0.000656q$; 3.47.

27. $dP/dR = -4{,}650{,}000R^{-1.95}$. **29.** (a) −7.5; (b) 4.5. **31.** (a) 1; (b) $\frac{1}{x + 4}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{9} \approx 0.111$;

(e) 11.1%. **33.** (a) $6x$; (b) $\frac{2x}{x^2 + 2}$; (c) 12; (d) $\frac{2}{3} \approx 0.667$; (e) 66.7%. **35.** (a) $-3x^2$; (b) $-\frac{3x^2}{8 - x^3}$;

(c) −3; (d) $-\frac{3}{7} \approx -0.429$; (e) −42.9%. **37.** 3.2; 21.3%. **39.** (a) $dr/dq = 30 - 0.6q$; (b) $\frac{4}{45} \approx 0.089$;

(c) 9%. **41.** $\frac{0.432}{t}$.

EJERCICIOS 11.5

1. $(4x + 1)(6) + (6x + 3)(4) = 48x + 18 = 6(8x + 3)$. **3.** $(8 - 7t)(2t) + (t^2 - 2)(-7) = 14 + 16t - 21t^2$.

5. $(3r^2 - 4)(2r - 5) + (r^2 - 5r + 1)(6r) = 12r^3 - 45r^2 - 2r + 20$.

7. $(x^2 + 3x - 2)(4x - 1) + (2x^2 - x - 3)(2x + 3) = 8x^3 + 15x^2 - 20x - 7$.

9. $(8w^2 + 2w - 3)(15w^2) + (5w^3 + 2)(16w + 2) = 200w^4 + 40w^3 - 45w^2 + 32w + 4$.

11. $(x^2 - 1)(9x^2 - 6) + (3x^3 - 6x + 5)(2x) - [(x + 4)(8x + 2) + (4x^2 + 2x + 1)(1)] = 15x^4 - 39x^2 - 26x - 3$.

13. $\frac{3}{2}\left[(p^{1/2} - 4)(4) + (4p - 5)\left(\frac{1}{2}p^{-1/2}\right)\right] = \frac{3}{4}(12p^{1/2} - 5p^{-1/2} - 32)$. **15.** 0. **17.** $18x^2 + 94x + 31$.

19. $\frac{(x - 1)(1) - (x)(1)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{(x - 1)^2}$. **21.** $\frac{(x - 1)(1) - (x + 2)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$.

23. $\frac{(z^2 - 4)(-2) - (5 - 2z)(2z)}{(z^2 - 4)^2} = \frac{2(z - 4)(z - 1)}{(z^2 - 4)^2}$.

25. $\frac{(x^2 - 5x)(16x - 2) - (8x^2 - 2x + 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x)^2} = \frac{-38x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 5x)^2}$.

27. $\frac{(2x^2 - 3x + 2)(2x - 4) - (x^2 - 4x + 3)(4x - 3)}{(2x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{5x^2 - 8x + 1}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$.

29. $\frac{-100x^{99}}{(x^{100} + 1)^2}$. **31.** $\frac{4(v^5 + 2)}{v^2}$. **33.** $\frac{15x^2 - 2x + 1}{3x^{4/3}}$. **35.** $\frac{4}{(x - 8)^2} + \frac{2}{(3x + 1)^2}$.

37. $\frac{[(x + 2)(x - 4)](1) - (x - 5)(2x - 2)}{[(x + 2)(x - 4)]^2} = \frac{-(x^2 - 10x + 18)}{[(x + 2)(x - 4)]^2}$.

39. $\frac{[t^2 - 1)(t^3 + 7)](2t + 3) - (t^2 + 3t)(5t^4 - 3t^2 + 14t)}{[(t^2 - 1)(t^3 + 7)]^2} = \frac{-3t^6 - 12t^5 + t^4 + 6t^3 - 21t^2 - 14t - 21}{[(t^2 - 1)(t^3 + 7)]^2}$.

41. $3 - \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x + 4}{[x(x-1)(x-2)]^2}$. **43.** -6. **45.** $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$. **47.** $y = 16x + 24$. **49.** 1.5.

51. $\dfrac{dr}{dq} = 25 - 0.04q$. **53.** $\dfrac{dr}{dq} = \dfrac{216}{(q+2)^2} - 3$. **55.** $\dfrac{dC}{dI} = 0.672$. **57.** $\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}$. **59.** 0.615; 0.385.

61. $\dfrac{dc}{dq} = \dfrac{5q(q+6)}{(q+3)^2}$. **63.** $\dfrac{9}{10}$. **65.** $\dfrac{0.7355}{(1 + 0.02744x)^2}$.

EJERCICIOS 11.6

1. $(2u - 2)(2x - 1) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2$. **3.** $\left(-\dfrac{2}{w^3}\right)(-1) = \dfrac{2}{(2-x)^3}$.

5. -2. **7.** 0. **9.** $18(3x + 2)^5$. **11.** $300(3x^2 - 16x + 1)(x^3 - 8x^2 + x)^{99}$. **13.** $-6x(x^2 - 2)^{-4}$.

15. $\dfrac{1}{2}(10x - 1)(5x^2 - x)^{-1/2}$. **17.** $\dfrac{12}{5}x^2(x^3 + 1)^{-3/5}$. **19.** $-6(4x - 1)(2x^2 - x + 1)^{-2}$.

21. $-2(2x - 3)(x^2 - 3x)^{-3}$. **23.** $-8(8x - 1)^{-3/2}$. **25.** $\dfrac{7}{3}(7x)^{-2/3} + \sqrt[3]{7}$.

27. $(x^2)[5(x-4)^4(1)] + (x-4)^5(2x) = x(x-4)^4(7x-8)$.

29. $(2x)\left[\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-1/2}(6)\right] + (\sqrt{6x-1})(2) = 6x(6x-1)^{-1/2} + 2\sqrt{6x-1}$.

31. $(8x-1)^3[4(2x+1)^3(2)] + (2x+1)^4[3(8x-1)^2(8)] = 16(8x-1)^2(2x+1)^3(7x+1)$.

33. $10\left(\dfrac{x-7}{x+4}\right)^9\left[\dfrac{(x+4)(1) - (x-7)(1)}{(x+4)^2}\right] = \dfrac{110(x-7)^9}{(x+4)^{11}}$.

35. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}\left[\dfrac{(x+3)(1) - (x-2)(1)}{(x+3)^2}\right] = \dfrac{5}{2(x+3)^2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}$.

37. $\dfrac{(x^2+4)^3(2) - (2x-5)[3(x^2+4)^2(2x)]}{(x^2+4)^6} = \dfrac{-2(5x^2 - 15x - 4)}{(x^2+4)^4}$.

39. $6\{(5x^2+2)[2x^3(x^4+5)^{-1/2}] + (x^4+5)^{1/2}(10x)\} = 12x(x^4+5)^{-1/2}(10x^4 + 2x^2 + 25)$.

41. $8 + \dfrac{5}{(t+4)^2} - (8t - 7) = 15 - 8t + \dfrac{5}{(t+4)^2}$.

43. $\dfrac{(3x-1)^3[40(8x-1)^4] - (8x-1)^5[9(3x-1)^2]}{(3x-1)^6} = \dfrac{(8x-1)^4(48x-31)}{(3x-1)^4}$.

45. $\dfrac{(x^2-7)^4[(2x+1)(2)(3x-5)(3) + (3x-5)^2(2)] - (2x+1)(3x-5)^2[4(x^2-7)^3(2x)]}{(x^2-7)^8}$.

47. 0. **49.** 0. **51.** $y = 4x - 11$. **53.** $y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{5}{3}$. **55.** 96%. **57.** 20. **59.** 13.99.

61. (a) $-\dfrac{q}{\sqrt{q^2+20}}$; (b) $-\dfrac{q}{100\sqrt{q^2+20} - q^2 - 20}$; (c) $100 - \dfrac{q^2}{\sqrt{q^2+20}} - \sqrt{q^2+20}$. **63.** -325.

65. $\dfrac{dc}{dq} = \dfrac{5q(q^2+6)}{(q^2+3)^{3/2}}$. **67.** $48\pi(10)^{-19}$. **69.** (a) $-\dfrac{1000}{\sqrt{100-x}}$, -125; (b) $-\dfrac{1}{128}$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 11)

1. $-2x$. **3.** 0 **5.** $28x^3 - 18x^2 + 10x = 2x(14x^2 - 9x + 5)$. **7.** $4s^3 + 4s = 4s(s^2+1)$. **9.** $\dfrac{2x}{5}$.

11. $(x^2 + 6x)(3x^2 - 12x) + (x^3 - 6x^2 + 4)(2x + 6) = 5x^4 - 108x^2 + 8x + 24$.

13. $100(2x^2 + 4x)^{99}(4x + 4) = 400(x + 1)[(2x)(x + 2)]^{99}$. **15.** $-\dfrac{2}{(2x + 1)^2}$.

17. $(8 + 2x)(4)(x^2 + 1)^3(2x) + (x^2 + 1)^4(2) = 2(x^2 + 1)^3(9x^2 + 32x + 1)$. **19.** $\dfrac{(z^2 + 1)(2z) - (z^2 - 1)(2z)}{(z^2 + 1)^2} = \dfrac{4z}{(z^2 + 1)^2}$.

21. $\dfrac{4}{3}(4x - 1)^{-2/3}$. **23.** $-\dfrac{1}{2}(1 - x)^{-3/2}(-1) = \dfrac{1}{2}(1 - x)^{-3/2}$.

25. $(x - 6)^4[3(x + 5)^2] + (x + 5)^3[4(x - 6)^3] = (x - 6)^3(x + 5)^2(7x + 2)$. **27.** $\dfrac{(x + 1)(5) - (5x - 4)(1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{9}{(x + 1)^2}$.

29. $2\left(-\dfrac{3}{8}\right)x^{-11/8} + \left(-\dfrac{3}{8}\right)(2x)^{-11/8}(2) = -\dfrac{3}{4}(1 + 2^{-11/8})x^{-11/8}$.

31. $\dfrac{\sqrt{x^2 + 5}(2x) - (x^2 + 6)(1/2)(x^2 + 5)^{-1/2}(2x)}{x^2 + 5} = \dfrac{x(x^2 + 4)}{(x^2 + 5)^{3/2}}$.

33. $\left(\dfrac{3}{5}\right)(x^3 + 6x^2 + 9)^{-2/5}(3x^2 + 12x) = \dfrac{9}{5}x(x + 4)(x^3 + 6x + 9)^{-2/5}$. **35.** $7(1 - 2z)$. **37.** $y = -4x + 3$.

39. $y = \dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}$. **41.** $\dfrac{5}{7} \approx 0.714$; 71.4%. **43.** $dr/dq = 20 - 0.2q$. **45.** 0.569, 0.431.

47. $dr/dq = 450 - q$. **49.** $dc/dq = 0.125 + 0.00878q$; 0.7396. **51.** 84. **53.** **(a)** $\dfrac{4}{3}$; **(b)** $\dfrac{1}{24}$.

EJERCICIOS 12.1

1. $\dfrac{4}{x}$. **3.** $\dfrac{3}{3x - 4}$. **5.** $\dfrac{2}{x}$. **7.** $-\dfrac{2x}{1 - x^2}$. **9.** $\dfrac{6p^2 + 3}{2p^3 + 3p} = \dfrac{3(2p^2 + 1)}{p(2p^2 + 3)}$. **11.** $t\left(\dfrac{1}{t}\right) + (\ln t)(1) = 1 + \ln t$.

13. $\dfrac{2}{(\ln 3)(2x - 1)}$ or $\dfrac{2 \log_3 e}{2x - 1}$. **15.** $\dfrac{z\left(\dfrac{1}{z}\right) - (\ln z)(1)}{z^2} = \dfrac{1 - \ln z}{z^2}$. **17.** $\dfrac{3(2x + 4)}{x^2 + 4x + 5} = \dfrac{6(x + 2)}{x^2 + 4x + 5}$.

19. $\dfrac{x}{1 + x^2}$. **21.** $\dfrac{2}{1 - t^2}$. **23.** $\dfrac{x}{1 - x^4}$. **25.** $\dfrac{4x}{x^2 + 2} + \dfrac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$. **27.** $\dfrac{2(x^2 + 1)}{2x + 1} + 2x \ln(2x + 1)$.

29. $\dfrac{3(1 + \ln^2 x)}{x}$. **31.** $\dfrac{4 \ln^3(ax)}{x}$. **33.** $\dfrac{x}{2(x - 1)} + \ln\sqrt{x - 1}$. **35.** $\dfrac{1}{2x\sqrt{4 + \ln x}}$. **37.** $y = 4x - 12$.

39. $\dfrac{dr}{dq} = 25\dfrac{(q + 2)\ln(q + 2) - q}{(q + 2)\ln^2(q + 2)}$.

EJERCICIOS 12.2

1. $7e^x$. **3.** $2xe^{x^2 + 1}$. **5.** $-5e^{3 - 5x}$. **7.** $(6r + 4)e^{3r^2 + 4r + 4} = 2(3r + 2)e^{3r^2 + 4r + 4}$. **9.** $x(e^x) + e^x(1) = e^x(x + 1)$.

11. $2xe^{-x^2}(1 - x^2)$. **13.** $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. **15.** $(6x)4^{3x^2} \ln 4$. **17.** $\dfrac{2e^{2w}(w - 1)}{w^3}$. **19.** $\dfrac{e^{1 + \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **21.** $3x^2 - 3^x \ln 3$.

23. $\dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$. **25.** 1. **27.** $(1 + \ln x)\,e^{x \ln x}$. **29.** $y - e^2 = e^2(x - 2)$ or $y = e^2x - e^2$.

31. $dp/dq = -0.015e^{-0.001q}$, $-0.015e^{-0.5}$. **33.** $dc/dq = 10e^{q/100}$; $10e^{0.5}$; $10e$. **35.** $100e^{-2}$.

41. $-b(10^{A - bM})\ln 10$. **45.** 0.0036.

EJERCICIOS 12.3

1. $-\dfrac{x}{4y}$. **3.** $\dfrac{5}{12y^3}$. **5.** $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **7.** $-\dfrac{y^{1/4}}{x^{1/4}}$. **9.** $-\dfrac{y}{x}$. **11.** $\dfrac{4 - y}{x - 1}$. **13.** $\dfrac{4y - x^2}{y^2 - 4x}$. **15.** $\dfrac{6y^{2/3}}{3y^{1/6} + 2}$.

17. $\dfrac{1 - 6xy^3}{1 + 9x^2y^2}$. **19.** $\dfrac{xe^y - y}{x(\ln x - xe^y)}$. **21.** $-\dfrac{e^x}{xe^y + 1}$. **23.** $-\dfrac{3}{5}$. **25.** $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$. **27.** $\dfrac{dq}{dp} = -\dfrac{1}{2q}$.

29. $\dfrac{dq}{dp} = -\dfrac{(q + 5)^3}{40}$. **31.** $1.5\,E \ln 10$ or $\dfrac{1.5E}{\log e}$.

EJERCICIOS 12.4

1. $(x+1)^2(x-1)(x^2+3)\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+3}\right]$. **3.** $(3x^3-1)^2(2x+5)^3\left[\frac{18x^2}{3x^3-1}+\frac{6}{2x+5}\right]$.

5. $\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{x+4}\right]$. **7.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}\left[\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{1-2x}\right]$.

9. $\frac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}\left[\frac{4x}{x^2+1}-\frac{2}{x+1}-\frac{3}{3x+2}\right]$. **11.** $\frac{(8x+3)^{1/2}(x^2+2)^{1/3}}{(1-2x)^{1/4}}\left[\frac{4}{8x+3}+\frac{2x}{3(x^2+2)}-\frac{1}{2(1+2x)}\right]$.

13. $x^{2x+1}\left(\frac{2x+1}{x}+2\ln x\right)$. **15.** $\frac{x^{1/x}(1-\ln x)}{x^2}$. **17.** $2(3x+1)^{2x}\left[\frac{3x}{3x+1}+\ln(3x+1)\right]$.

19. $e^x x^{3x}(4+3\ln x)$. **21.** $y=96x+36$.

EJERCICIOS 12.5

1. 24. **3.** 0. **5.** e^x. **7.** $3+2\ln x$. **9.** $-\frac{10}{p^6}$. **11.** $-\frac{1}{4(1-r)^{3/2}}$. **13.** $\frac{50}{(5x-6)^3}$.

15. $\frac{4}{(x-1)^3}$. **17.** $-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]$. **19.** $e^z(z^2+4z+2)$. **21.** $-\frac{1}{y^3}$. **23.** $-\frac{4}{y^3}$. **25.** $\frac{1}{8x^{3/2}}$.

27. $\frac{2(y-1)}{(1+x)^2}$. **29.** $\frac{2y}{(2-y)^3}$. **31.** $300(5x-3)^2$. **33.** 0.6. **35.** ± 1.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 12)

1. $2e^x+e^{x^2}(2x)=2(e^x+xe^{x^2})$. **3.** $\frac{1}{r^2+5r}(2r+5)=\frac{2r+5}{r(r+5)}$. **5.** $e^{x^2+4x+5}(2x+4)=2(x+2)e^{x^2+4x+5}$.

7. $e^x(2x)+(x^2+2)e^x=e^x(x^2+2x+2)$. **9.** $\frac{\sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}}{2}\left[\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-9}\right]$.

11. $\frac{e^x\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(e^x)}{e^{2x}}=\frac{1-x\ln x}{xe^x}$. **13.** $\frac{2}{q+1}+\frac{3}{q+2}$. **15.** $-7(\ln 10)10^{2-7x}$. **17.** $\frac{4e^{2x+1}(2x-1)}{x^2}$.

19. $\frac{16}{(8x+5)\ln 2}$ o bien $\frac{16\log_2 e}{8x+5}$. **21.** $\frac{1+2t+3t^2}{1+t+t^2+t^3}$. **23.** $(x+1)^{x+1}[1+\ln(x+1)]$.

25. $2\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}\right)(-1)=\frac{5t-4}{2t(t-1)}$.

27. $y\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)(2x)+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{x^2+9}\right)(2x)-\frac{4}{11}\left(\frac{1}{x^3+6x}\right)(3x^2+6)\right]=y\left[\frac{3x}{x^2+2}+\frac{8x}{9(x^2+9)}-\frac{12(x^2+2)}{11(x^3+6x)}\right]$, en donde y se da en el problema.

29. 18. **31.** 2. **33.** $y=2x+2(1-\ln 2)$ or $y=2x+2-\ln 4$. **35.** $-\frac{y}{x+y}$. **37.** $\frac{4}{9}$.

39. $f'(t)=0.008e^{-0.01t}+0.00004e^{-0.0002t}$.

EJERCICIOS 13.1

1. Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x=0$.

3. Creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; decreciente en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; máximo relativo cuando $x=\frac{1}{2}$.

5. Decreciente en $(-\infty, -5)$ y $(1, \infty)$; creciente en $(-5, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -5$; máximo relativo cuando $x = 1$.

7. Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; creciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 0$; mínimo relativo cuando $x = \pm 1$.

9. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$; decreciente en $(1, 3)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 3$.

11. Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = 1$.

13. Decreciente en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$; creciente en $(-4, 0)$; mínimo relativo cuando $x = -4$; máximo relativo cuando $x = 0$.

15. Decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$; ni máximo ni mínimo relativo.

17. Decreciente en $(0, \infty)$; ni máximo ni mínimo relativo.

19. Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$; creciente en $(0, 1)$ y $(1, 2)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = 2$.

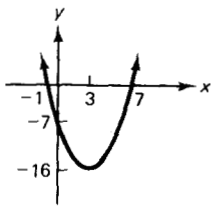
21. Creciente en $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$, y $(5, \infty)$; decreciente en $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{11}{5}$; mínimo relativo cuando $x = 5$.

23. Decreciente en $(-\infty, \infty)$; ni máximo ni mínimo relativo.

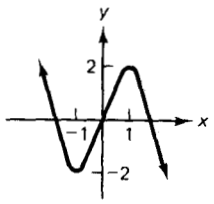
25. Decreciente en $(0, 1)$; creciente en $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$.

27. Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 0$.

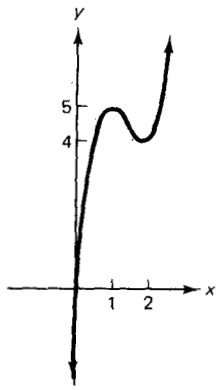
29. Decreciente en $(-\infty, 3)$; creciente en $(3, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 3$; intersecciones: $(7, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -7)$.



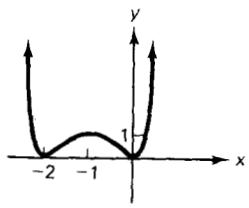
31. Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; creciente en $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; simetría con respecto al origen; intersecciones: $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$.



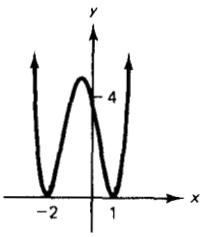
33. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(1, 2)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 2$; intersecciones: $(0, 0)$.



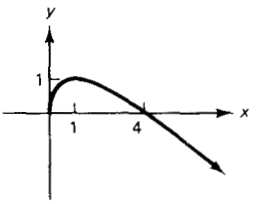
35. Creciente en $(-2, -1)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = -2, 0$; intersecciones $(0, 0)$, $(-2, 0)$.



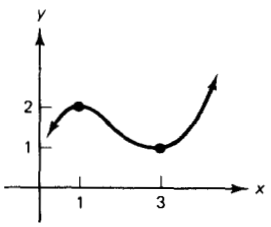
37. Decreciente en $(-\infty, -2)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; creciente en $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2, 1$; máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{2}$; intersecciones con los ejes $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$.



39. Decreciente en $(1, \infty)$; creciente en $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = 1$; intersecciones con los ejes $(0, 0)$ $(4, 0)$.



41.



45. Nunca. **47.** 40. **51.** **(a)** 25,300; **(b)** 4; **(c)** 17,200.

EJERCICIOS 13.2

1. Máximo absoluto cuando $x = -1$; ab mínimo absoluto cuando $x = 1$. **3.** Máximo absoluto cuando $x = 0$; ab mínimo absoluto cuando $x = 2$.

5. Máximo absoluto cuando $x = 3$; ab mínimo absoluto cuando $x = 1$. **7.** Máximo absoluto cuando $x = -2$; ab mínimo absoluto cuando $x = -1$.

EJERCICIOS 13.3

1. Cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.

3. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -1$.

5. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$; punto de inflexión cuando $x = \pm 1$.

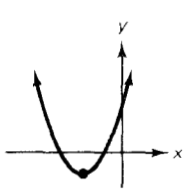
7. Cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$.

9. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; punto de inflexión cuando $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

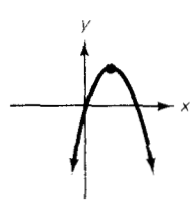
11. Cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.

13. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -2)$; cóncava hacia arriba $(-2, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -2$.

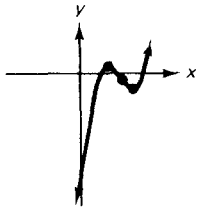
15. Intersecciones con los ejes $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$; decreciente $(-\infty, -2)$; creciente $(-2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



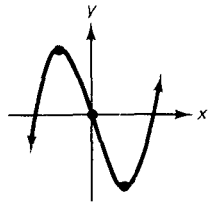
17. Intersecciones con los ejes $(0, 0)$, $(4, 0)$; creciente $(-\infty, 2)$; decreciente $(2, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.



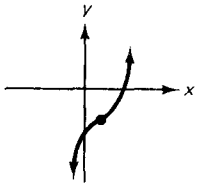
19. Intersecciones con los ejes $(0, -19)$; creciente $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$; decreciente $(2, 4)$; máximo relativo cuando $x = 2$; mínimo relativo cuando $x = 4$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 3)$; cóncava hacia arriba $(3, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 3$.



21. Intersecciones con los ejes $(0, 0)$, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; creciente $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; decreciente $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.

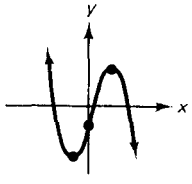


23. Intersecciones con los ejes $(0, -3)$; creciente $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$; ni máximo ni mínimo relativo; cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 1$.

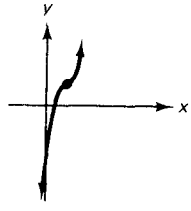


25. Intersecciones con los ejes $(0, 0)$, $(4/3, 0)$; creciente $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; decreciente $(1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(0, 2/3)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $(2/3, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$, $x = 2/3$.

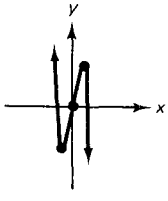
27. Intersecciones con los ejes $(0, -2)$; decreciente $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; creciente $(-2, 2)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; puntos de inflexion cuando $x = 0$.



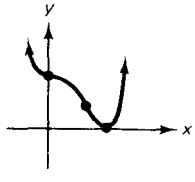
29. Intersecciones con los ejes $(0, -6)$; creciente $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 2)$; cóncava hacia arriba $(2, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 2$.



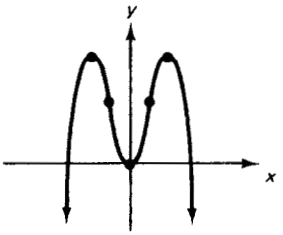
31. Intersecciones con los ejes $(0, 0)$, $(\pm \sqrt[4]{5}, 0)$; decreciente $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; creciente $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



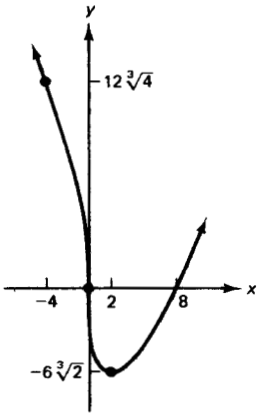
33. Intersecciones con los ejes $(0, 1)$, $(1, 0)$; decreciente $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; creciente $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$, $(2/3, \infty)$; cóncava hacia abajo $(0, 2/3)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$, $x = 2/3$.



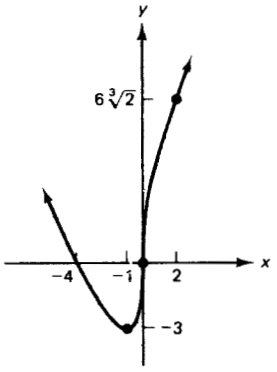
35. Intersecciones con los ejes (0, 0), (±2, 0); creciente $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$; decreciente $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$; punto de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{2/3}$; simetría con respecto al eje y.



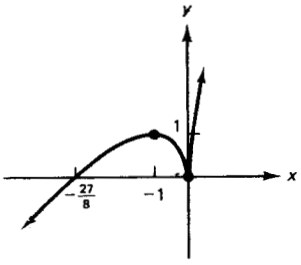
37. Intersecciones de los ejes (0, 0), (8, 0); decreciente $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$; creciente $(2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -4)$, $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-4, 0)$; punto de inflexión cuando $x = -4$, $x = 0$.



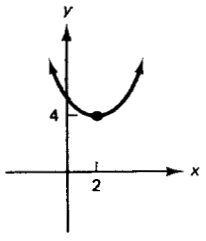
39. Intersecciones (0, 0), (−4, 0); decreciente $(-\infty, -1)$; creciente $(-, 0)$, $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$ $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo (0, 2) punto de inflexión cuando $x = 0$, $x = 2$.



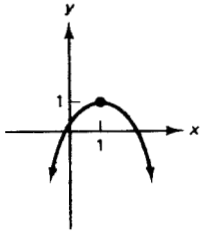
41. Intersecciones con los ejes $(0, 0)\left(-\frac{27}{8}, 0\right)$; creciente $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$; decreciente $(-1, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo rrelativo cuando $x = 1$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.



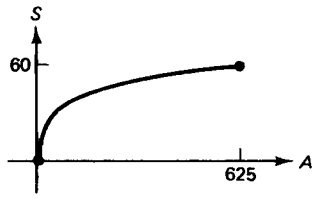
43.



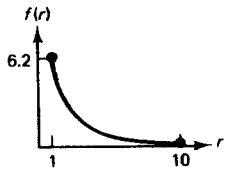
45.



49.



53. (b) (c) 0.26.



EJERCICIOS 13.4

1. Mínimo relativo cuando $x = \frac{5}{2}$; mínimo absoluto. **3.** Máximo relativo cuando $x = \frac{1}{4}$; máximo a

5. Máximo relativo cuando $x = -3$, mínimo relativo cuando $x = 3$.

7. Mínimo relativo cuando $x = 0$, máximo relativo cuando $x = 2$.

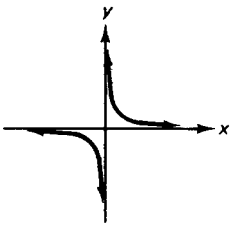
9. La prueba falla, cuando $x = 0$ existe un mínimo relativo de acuerdo a la prueba de la primera derivada.

EJERCICIOS 13.5

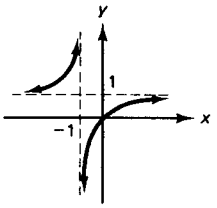
1. $y = 1, x = -1$. **3.** $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}$. **5.** $y = 0, x = 0$. **7.** $y = 0, x = 1, x = -1$. **9.** N

11. $y = 2, x = -3, x = 2$. **13.** $y = 4, x = 6$. **15.** $x = 0, x = -1$. **17.** $y = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{2}$. 1

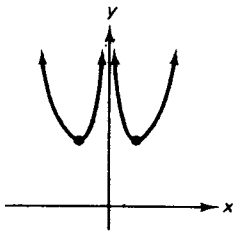
21. Decreciente $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; simetría con respecto al origen; asíntotas $x = 0$, $y = 0$.



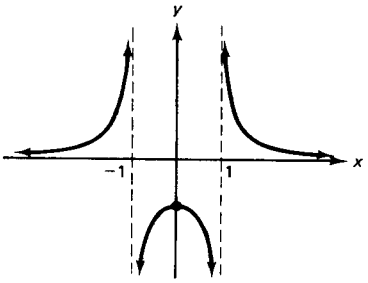
23. Intersecciones con los ejes (0, 0); creciente (− (−, ∞); cóncava hacia arriba (−∞, −1); cónc cia abajo (−1, ∞); asíntotas $x = 1$, $x =$ − 0; simetría con respecto al eje y.



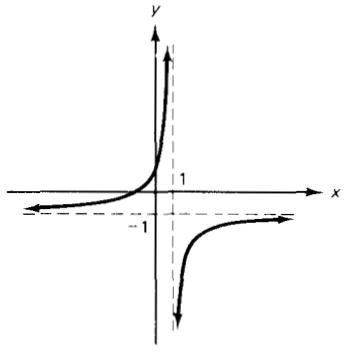
25. Decreciente. $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$; creciente $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = \pm 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; simetría con respecto al eje y, asíntota $x = 0$.



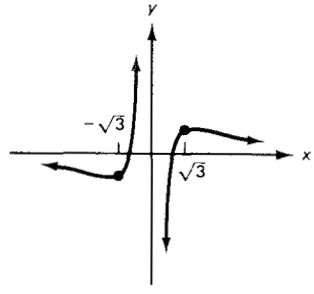
27. Intersecciones con los ejes (0, −1); crecient −1), (−1, 0); decreciente (0, 1) (1, ∞); rel. c hacia abajo $x = 0$; $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; cóncav abajo $(-1, 1)$; asíntotas $x = 1, x = -1, y =$ (tría con respecto al eje y.



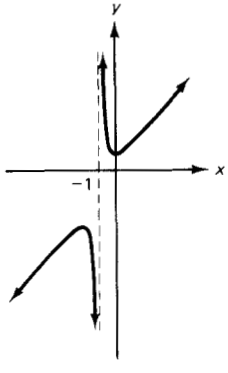
29. Intersecciones con los ejes $(-1, 0)$, $(0, 1)$; creciente $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$, cóncava hacia arriba $(-\infty, 1)$; cóncava hacia abajo $(1, \infty)$; asíntotas $x = 1$, $y = -1$.



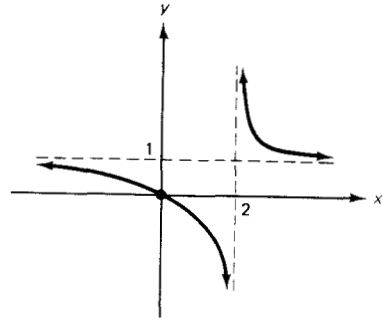
31. Intersecciones con los ejes $(-1, 0)$, $(1, 0)$; creciente $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$; decreciente $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 8)$; máximo relativo cuando $x = \sqrt{3}$; mínimo relativo cuando $x = -\sqrt{3}$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(0, \sqrt{6})$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{6}$; asíntotas $x = 0$, $y = 0$; simetría con respecto al origen.



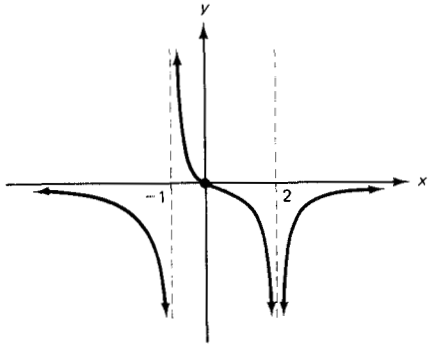
33. Intersecciones con los ejes $(0, 1)$; creciente $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$; decreciente $(-2, -1)$, $(-1, 0)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 0$, cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; asíntota $x = -1$.



35.



37.



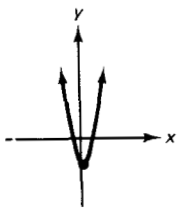
PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 13)

1. $y = 3, x = 4, x = -4$. **3.** $x = 0, 4$. **5.** Creciente en $(1, 3)$; decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$.

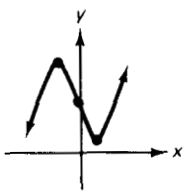
7. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(0, \frac{1}{2})$.

9. Mínimo relativo en $x = -1$. **11.** En $x = 3$. **13.** Máximo absoluto en $x = 2$; mínimo absoluto en $x = 1$.

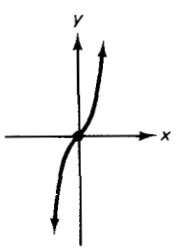
15. Intersecciones con los ejes $(-4, 0)$, $(6, 0)$, $(0, -24)$; creciente $(1, \infty)$; decreciente $(-\infty, 1)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



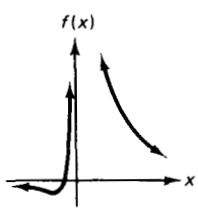
17. Intersecciones con los ejes $(0, 20)$; creciente $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; decreciente $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$.



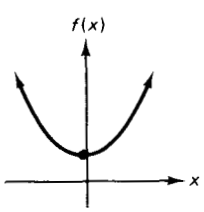
19. Intersecciones con los ejes $(0, 0)$; creciente $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



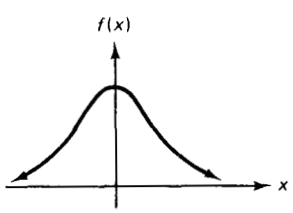
21. Intersecciones con los ejes $(-5, 0)$; creciente $(-10, 0)$; decreciente $(-\infty, -10)$, $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -10$; cóncava hacia arriba $(-15, 0)$, $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -15)$; puntos de inflexión cuando $x = -15$; asíntota horizontal $y = 0$, asíntota vertical $x = 0$.



23. Intersecciones con los ejes $(0, 1)$; creciente $(0, \infty)$; decreciente $(-\infty, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$; simétrica con respecto al eje y.



25. Máximo relativo cuando $x = 0$; puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.



EJERCICIOS 14.1

1. 100. **3.** \$15. **5.** **(a)** 110 g; **(b)** $51\frac{9}{11}$ g. **7.** 525, \$51, \$10,525. **9.** \$22. **11.** 625, \$4.
13. \$3, \$9000. **15.** 20 y 20. **17.** 300 pie por 250 pie. **19.** 4 pie por 4 pie por 2 pie.
21. 2 plg; 128 plg^3. **25.** 130, $p = 340$, $P = 36{,}980$; 125, $p = 350$, $P = 34{,}175$. **27.** 250 por lote (4 lotes).
29. 35. **31.** 60 mi/h. **33.** $5 - \sqrt{3}$ ton, $5 - \sqrt{3}$ ton.

EJERCICIOS 14.2

1. 0.25410. **3.** 1.32472. **5.** -2.38769. **7.** 0.33767. **9.** 1.90785.

EJERCICIOS 14.3

1. $3\,dx$. **3.** $\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+2}}\,dx$. **5.** $-\dfrac{2}{x^3}\,dx$. **7.** $\dfrac{2x}{x^2+7}\,dx$. **9.** $4e^{2x^2+3}(4x^2+3x+1)\,dx$.

11. $\Delta y = -0.14$, $dy = -0.14$. **13.** $\Delta y = 0.073$, $dy = \dfrac{3}{40} = 0.075$. **15.** 10.05. **17.** $3\frac{47}{48}$. **19.** -0.03.

21. 1.01. **23.** $\dfrac{1}{2}$. **25.** $\dfrac{1}{6p(p^2+5)^2}$. **27.** $-p^2$. **29.** $-\dfrac{4}{5}$. **31.** 44; 41.80. **33.** 2.04. **35.** 0.7.

37. $(1.69 \times 10^{-11})\pi$. **39.** $35\frac{8}{9}$.

EJERCICIOS 14.4

1. -3, elástica. **3.** **3.** -1, elasticidad unitaria. **5.** -1.02 elástica. **7.** $-(150e^{-t}-1)$, elástica.

9. -1, elasticidad unitaria. **11.** $-\dfrac{9}{32}$, inelástica. **13.** $-\dfrac{1}{2}$, inelástica. **15.** $|\eta| = \dfrac{10}{3}$ cuando $p = 10$, $|\eta| = \dfrac{3}{10}$ cuando $p = 3$, $|\eta| = 1$ cuando $p = 6.50$. **17.** Disminución de -1.2, 0.6%. **23.** 5, 30.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 13)

1. 20. **3.** 300. **5.** \$2800. **7.** 200 pie por 100 pie. **9.** 12; 105.

11. $\left[\dfrac{x^2}{x+5} + 2x\ln(x+5)\right]dx$. **13.** $\left(\dfrac{9}{10}\right)^\circ$. **15.** 0.99. **17.** Inelástica. $\dfrac{1}{8y+7}$ **19.** Elástica.

EJERCICIOS 15.1

1. $5x + C$. **3.** $\dfrac{x^9}{9} + C$. **5.** $-\dfrac{5}{6x^6} + C$. **7.** $-\dfrac{1}{9x^9} + C$. **9.** $-\dfrac{5}{6y^{6/5}} + C$. **11.** $8u + \dfrac{u^2}{2} + C$.

13. $\dfrac{y^6}{6} - \dfrac{5y^2}{2} + C$. **15.** $t^3 - 2t^2 + 5t + C$. **17.** $(7+e)x + C$. **19.** $\dfrac{x^2}{14} - \dfrac{3x^5}{20} + C$. **21.** $3e^x + C$.

23. $\dfrac{x^{9.3}}{9.3} - \dfrac{9x^7}{7} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{2x^2} + C$. **25.** $-\dfrac{4x^{3/2}}{9} + C$. **27.** $2\sqrt[8]{x} + C$. **29.** $\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{3}{2x^2} + C$.

31. $\dfrac{w^3}{2} + \dfrac{2}{3w} + C$. **33.** $\dfrac{1}{7}(z^2 - 5z) + C$. **35.** $\dfrac{e^u}{4} + u + C$. **37.** $\dfrac{4x^{5/2}}{3} - \dfrac{12x^{5/4}}{5} + C$.

39. $-\dfrac{3x^{5/3}}{25} - 7x^{1/2} + 3x^2 + C$. **41.** $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + \dfrac{5x^2}{2} - 15x + C$. **43.** $\dfrac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$.

45. $\dfrac{4u^3}{3} + 2u^2 + u + C$. **47.** $\dfrac{2v^3}{3} + 3v + \dfrac{1}{2v^4} + C$. **49.** $\dfrac{1}{2}(e^6x + e^x) + C$.

EJERCICIOS 15.2

1. $y = \dfrac{3x^2}{2} - 4x + 1$. **3.** 18. **5.** $y = -\dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4x}{3} + \dfrac{1}{12}$. **7.** $y = \dfrac{x^4}{12} + x^2 - 5x + 2$. **9.** $p = 0.7$.

11. $p = 275 - 0.5q - 0.1q^2$. **13.** $c = 1.35q + 200$. **15.** 7715. **17.** $G = -\dfrac{P^2}{50} + 2P + 20$.

21. \$80. ($dc/dq = 27.50$ cuando $q = 50$ no es relevante para el problema.)

EJERCICIOS 15.3

1. $\frac{(x+5)^8}{8}+C$. **3.** $\frac{(x^2+3)^6}{6}+C$. **5.** $\frac{3}{5}(y^3+3y^2+1)^{5/3}+C$. **7.** $-\frac{(3x-1)^{-2}}{2}+C$. **9.** $\frac{2(x+10)^{3/2}}{3}+C$.

11. $\frac{(7x-6)^5}{35}+C$. **13.** $\frac{(x^2+3)^{13}}{26}+C$. **15.** $\frac{3}{20}(27+x^5)^{4/3}+C$. **17.** $e^{3x}+C$. **19.** $e^{t^2+t}+C$.

21. $\frac{1}{10}e^{5x^2}+C$. **23.** $-3e^{-2x}+C$. **25.** $\ln|x+5|+C$. **27.** $\ln|x^3+x^4|+C$. **29.** $-\frac{3}{4}(z^2-6)^{-4}+C$.

31. $4\ln|x|+C$. **33.** $\frac{1}{3}\ln|s^3+5|+C$. **35.** $-\frac{7}{3}\ln|5-3x|+C$. **37.** $\frac{2}{15}(5x)^{3/2}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{5x}+C$.

39. $\sqrt{x^2-4}+C$. **41.** $\frac{1}{2}e^{x^4+1}+C$. **43.** $-\frac{1}{6}e^{-2x^3+1}+C$. **45.** $-\frac{1}{5}e^{-5x}+2e^x+C$.

47. $-\frac{1}{24}(3-3x^2-6x)^4+C$. **49.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+6x|+C$. **51.** $2\ln|3-2s+4s^2|+C$. **53.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)+C$.

55. $\frac{1}{27}(x^3-x^6)^{-9}+C$. **57.** $\frac{1}{4}(x^4+x^2)^2+C$. **59.** $\frac{1}{2}(4-9x-3x^2)^{-4}+C$. **61.** $\frac{1}{6}e^{4x^3+3x^2-4}+C$.

63. $-\frac{1}{25}(7-5x^2)^{5/2}+C$. **65.** $\sqrt{2x}+C$. **67.** $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+C$. **69.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{6(x^6+1)}+C$.

71. $\frac{1}{3}\ln|3x-5|+\frac{1}{27}(x^3-x^6)^{-9}+C$. **73.** $\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}-\ln\sqrt{x^2+3}+C$. **75.** $2e^{\sqrt{x}}+C$.

77. $y=-\frac{1}{6}(3-2x)^3+\frac{11}{2}$. **79.** $y=-\ln|x|=\ln|1/x|$. **81.** $\frac{Rr^2}{4K}+B_1\ln(r)+B_2$.

EJERCICIOS 15.4

1. $x^2+3x-\ln|x|+C$. **3.** $\frac{1}{3}(2x^3+4x+1)^{3/2}+C$. **5.** $-\frac{6}{5}\sqrt{4-5x}+C$. **7.** $\frac{4^{7x}}{7\ln 4}+C$.

9. $7x^2-4e^{x^2/4}+C$. **11.** $\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$. **13.** $-\frac{1}{7}e^{7/x}+C$. **15.** $\frac{2}{9}(\sqrt{x}+2)^3+C$. **17.** $\frac{1}{2}(\ln^2 x)+C$.

19. $\frac{1}{3}\ln^3(r+1)+C$. **21.** $e^{(x^2+3)/2}+C$. **23.** $\ln|\ln(x+3)|+C$. **25.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}-(\ln 4)x+C$.

27. $x^2-8x-6\ln|x|-\frac{2}{x^2}+C$. **29.** $x^2-3x+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$. **31.** $x+\ln|x-1|+C$.

33. $\sqrt{e^{x^2}+2}+C$. **35.** $-\frac{(e^{-x}+6)^3}{3}+C$. **37.** $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2}+3]^{3/2}+C$. **39.** $-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{s^3}}+C$.

41. $\frac{x^2}{2}+2x+C$. **43.** $p=\frac{100}{q+2}$. **45.** $c=20\ln|(q+5)/5|+2000$. **47.** $C=2(\sqrt{I}+1)$.

49. $C=\frac{3}{4}I-\frac{1}{3}\sqrt{I}+\frac{71}{12}$.

EJERCICIOS 15.5

1. 35. **3.** 0. **5.** 25. **7.** $-\frac{3}{16}$. **9.** $-\frac{7}{6}$. **11.** $\sum_{k=1}^{15}k$. **13.** $\sum_{k=1}^{4}(2k-1)$. **15.** $\sum_{k=1}^{12}k^2$.

17. 101,475. **19.** 84. **21.** 273. **23.** 8; \$850.

EJERCICIOS 15.6

1. $\frac{2}{3}$ unidad cuadrada. **3.** $\frac{14}{27}$ unidad cuadrada. **5.** $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada. **7.** $\frac{1}{3}$ unidad cuadrada.

9. $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas. **11.** 6. **13.** -18. **15.** $\frac{5}{6}$.

EJERCICIOS 15.7

1. 10. **3.** $\frac{21}{2}$. **5.** -20. **7.** $\frac{7}{3}$. **9.** $\frac{15}{2}$. **11.** $-\frac{7}{6}$. **13.** 0. **15.** $\frac{5}{3}$. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** $-\frac{1}{6}$.

21. $4 \ln 8$. **23.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$. **25.** $\frac{3}{4}$. **27.** $\frac{38}{9}$. **29.** $\frac{15}{28}$. **31.** $\frac{1}{2} \ln 3$. **33.** $e + \frac{1}{2e^2} - \frac{3}{2}$.

35. $\frac{3}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2}$. **37.** $\frac{e^3}{2}(e^{12} - 1)$. **39.** $\alpha^{5/2}T$. **41.** $\int_b^a -Ax^{-B}\,dx$. **43.** \$8639. **45.** 1,973,333.

47. \$160. **49.** \$2000. **51.** 696; 492. **53.** $2Ri$.

EJERCICIOS 15.8

En los Problemas **1-33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

1. 8. **3.** $\frac{19}{2}$. **5.** 8. **7.** $\frac{19}{3}$. **9.** 9. **11.** $\frac{50}{3}$. **13.** 36. **15.** 8. **17.** $\frac{32}{3}$.

19. 1. **21.** 18. **23.** $\frac{26}{3}$. **25.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. **27.** $e^2 - 1$. **29.** $\frac{3}{2} + 2 \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4$. **31.** 68.

33. 2. **35.** 19 unidades cuadradas. **37.** **(a)** $\frac{1}{16}$; **(b)** $\frac{3}{4}$; **(c)** $\frac{7}{16}$. **39.** **(a)** $\ln \frac{5}{3}$; **(b)** $\ln(4) - 1$; **(c)** $2 - \ln 3$.

EJERCICIOS 15.9

En los Problemas **1-21** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

1. $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{16}{3}$. **5.** $8\sqrt{6}$. **7.** 40. **9.** $\frac{125}{6}$. **11.** $\frac{9}{2}$. **13.** $\frac{125}{12}$. **15.** $\frac{32}{81}$. **17.** $\frac{44}{3}$.

19. $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. **21.** $\frac{1}{2}$. **23.** 12. **25.** $\frac{20}{63}$.

EJERCICIOS 15.10

1. $EC = 25.6$, $EF = 38.4$. **3.** $EC = 50 \ln(2) - 25$, $EF = 1.25$. **5.** $EC = 800$, $EF = 1000$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 15)

1. $\frac{x^4}{4} + x^2 - 7x + C$. **3.** $\frac{117}{2}$. **5.** $-(x + 5)^{-2} + C$. **7.** $2 \ln |x^3 - 6x + 1| + C$. **9.** $\frac{11\sqrt[3]{11}}{4} - 4$.

11. $\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$. **13.** $\frac{4z^{3/4}}{3} - \frac{6z^{5/6}}{5} + C$. **15.** $\frac{1}{3} \ln \frac{10}{3}$. **17.** $\frac{2}{27}(3x^3 + 2)^{3/2} + C$.

19. $\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C$. **21.** $\ln |x| - \frac{2}{x} + C$. **23.** 11.1. **25.** $\frac{7}{3}$. **27.** $4 - 3\sqrt[3]{2}$. **29.** $\frac{3}{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$.

31. $\frac{3}{2} - 5 \ln 2$. **33.** $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x - 1$.

En los Problemas **35–49**, *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

35. $\frac{4}{3}$. **37.** $\frac{16}{3}$. **39.** $\frac{125}{6}$. **41.** $6 + \ln 3$. **43.** $\frac{2}{3}$. **45.** 36. **47.** $\frac{125}{3}$. **49.** $e - 1$.

51. $p = 100 - \sqrt{2q}$. **53.** \$1900. **55.** 0.5507. **57.** 15 unidades cuadradas **59.** $CS = 166\frac{2}{3}$, $PS = 53\frac{1}{3}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 15)

1. 225, 125. **3.** **(a)** \$99,000; **(b)** 900; **(c)** \$110.

EJERCICIOS 16.1

1. $-e^{-x}(x+1)+C$. **3.** $\frac{y^4}{4}\left[\ln(y)-\frac{1}{4}\right]+C$. **5.** $x[\ln(4x)-1]+C$.

7. $\frac{2x}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{4}{15}(x+1)^{5/2}+C=\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)+C$. **9.** $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x)-\frac{4}{9}x^{3/2}+C$.

11. $\frac{1}{4}e^2(3e^2-1)$. **13.** $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$, las partes no se necesitan. **15.** $\frac{2}{3}(9\sqrt{3}-10\sqrt{2})$.

17. $e^x(x^2-2x+2)+C$. **19.** $\frac{x^3}{3}+2e^{-x}(x+1)-\frac{e^{-2x}}{2}+C$. **21.** $2e^3+1$ unidades cuadradas.

EJERCICIOS 16.2

1. $2\ln|x|+3\ln|x-1|+C=\ln|x^2(x-1)^3|+C$.

3. $-3\ln|x+1|+4\ln|x-2|+C=\ln|(x-2)^4/(x+1)^3|+C$.

5. $\frac{1}{4}\left[\frac{3x^2}{2}+2\ln|x-1|-2\ln|x+1|\right]+C=\frac{1}{4}\left(\frac{3x^2}{2}+\ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\right)+C$.

7. $\ln|x|+2\ln|x-4|-3\ln|x+3|+C=\ln|x(x-4)^2/(x+3)^3|+C$.

9. $\frac{1}{2}\ln|x^6+2x^4-x^2-2|+C$, no se requieren fracciones parciales.

11. $[4/(x-2)]-5\ln|x-1|+7\ln|x-2|+C.=[4/(x-2)]+\ln|(x-2)^7/(x-1)^5|+C$.

13. $2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x^4}{x^2+4}\right]+C$. **15.** $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{2}{x-3}+C$.

17. $5\ln(x^2+1)+2\ln(x^2+2)+C=\ln[(x^2+1)^5(x^2+2)^2]+C$. **19.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+C$.

21. $18\ln(4)-10\ln(5)-8\ln(3)$. **23.** $\frac{11}{6}+4\ln\frac{2}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIOS 16.3

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{6+7x}\right|+C$. **3.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|+C$. **5.** $\frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\ln|4+5x|-\frac{2}{3}\ln|2+3x|\right]+C$.

7. $\frac{1}{8}(2x-\ln[4+3e^{2x}])+C$. **9.** $2\left[\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|\right]+C$. **11.** $1+\ln\frac{4}{9}$.

13. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-3}-3\ln|x+\sqrt{x^2-3}|)+C$. **15.** $\frac{1}{144}$. **17.** $e^x(x^2-2x+2)+C$.

19. $2\left(-\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}+\ln|2x+\sqrt{4x^2+1}|\right)+C$. **21.** $\frac{1}{9}\left(\ln|1+3x|+\frac{1}{1+3x}\right)+C$.

23. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}\,x}{\sqrt{7}-\sqrt{5}\,x}\right|\right)+C$. **25.** $\frac{1}{3^6}\left[\frac{(3x)^6\ln(3x)}{6}-\frac{(3x)^6}{36}\right]+C=\frac{x^6}{36}[6\ln(3x)-1]+C$.

27. $\frac{4(9x-2)(1+3x)^{3/2}}{135}+C$. **29.** $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-13}|+C$. **31.** $\frac{1}{4}[2x^2\ln(2x)-x^2]+C$.

33. $-\frac{\sqrt{9-4x^2}}{9x}+C$. **35.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **37.** $\frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}+C$. **39.** $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

41. $\frac{x^4}{4}\left[\ln(x)-\frac{1}{4}\right]+C$. **43.** $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$. **45.** $x(\ln x)^2-2x\ln(x)+2x+C$.

47. $\frac{2}{3}(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2})$. **49.** $2(2\sqrt{2} - \sqrt{7})$. **51.** $\frac{7}{2}\ln(2) - \frac{3}{4}$. **53.** $\ln\left|\frac{q_n(1 - q_0)}{q_0(1 - q_n)}\right|$.
55. **(a)** \$37,599; **(b)** \$4924. **57.** **(a)** \$5481; **(b)** \$535.

EJERCICIOS 16.4

1. $\frac{16}{3}$. **3.** -1. **5.** 0. **7.** $\frac{13}{6}$. **9.** \$12,400. **11.** \$3321.

EJERCICIOS 16.5

1. 0.340; 0.333. **3.** 1.388; 1.386. **5.** 0.883. **7.** 2,361,375. **9.** 2.967. **11.** $\frac{8}{3}$. **13.** 0.771.

EJERCICIOS 16.6

1. $y = -\frac{1}{x^2 + C}$. **3.** $y = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$. **5.** $y = Ce^x$, $C > 0$. **7.** $y = Cx$, $C > 0$. **9.** $y = \sqrt{2x}$.
11. $y = \ln\frac{x^3 + 3}{3}$. **13.** $y = \frac{4x^2 + 3}{2(x^2 + 1)}$. **15.** $N = 20{,}000e^{0.018t}$; $N = 20{,}000(1.2)^{t/10}$; 28,800.
17. $2e^{0.946}$ millares de millones. **19.** 0.01204; 57.57 s. **21.** 2900 años. **23.** $N = N_0e^{k(t - t_0)}$, $t \geq t_0$.
25. 12.6 unidades. **27.** $A = 400(1 - e^{-t/2})$; 157 g.

EJERCICIOS 16.7

1. 29,400. **3.** 430,000. **5.** 1990. **7.** **(b)** 375. **9.** 1:06 A.M. **11.** \$62,500.
13. $N = M - (M - N_0)e^{-kt}$.

EJERCICIOS 16.8

1. $\frac{1}{3}$. **3.** Div. **5.** $\frac{1}{e}$. **7.** Div. **9.** $-\frac{1}{2}$. **11.** 0. **13.** **(a)** 800; **(b)** $\frac{2}{3}$. **15.** 4,000,000.
17. $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada. **19.** Aumento de 5000.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 16)

1. $\frac{x^2}{4}[2\ln(x) - 1] + C$. **3.** $5 + \frac{9}{4}\ln 3$. **5.** $\frac{1}{21}(9\ln|3 + x| - 2\ln|2 + 3x|) + C$.
7. $\frac{1}{2(x + 2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x + 2}\right| + C$. **9.** $-\frac{\sqrt{9 - 16x^2}}{9x} + C$. **11.** $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x - 3}{x + 3}\right| + C$.
13. $\frac{e^{7x}}{49}(7x - 1) + C$. **15.** $\frac{1}{2}\ln|\ln 2x| + C$. **17.** $x - \frac{3}{2}\ln|3 + 2x| + C$. **19.** 34.
21. **(a)** 1.405; **(b)** 1.388. **23.** $y = Ce^{x^3 + x^2}$, $C > 0$. **25.** $\frac{1}{18}$. **27.** Div. **29.** 144,000.
31. 0.0005; 90%. **33.** $N = \frac{450}{1 + 224e^{-1.02t}}$. **35.** 4:16 P.M.

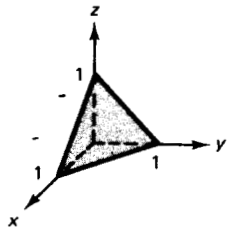
APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 16)

1. 114; 69.

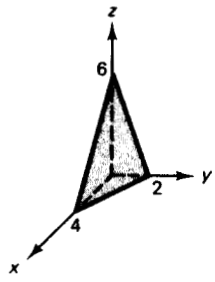
EJERCICIOS 17.1

1. 10. **3.** 4. **5.** -1. **7.** 88. **9.** 3. **11.** $2x_0 + 2h - 5y_0 + 4$. **13.** 2000. **15.** $y = -4$. **17.** $z = 6$.

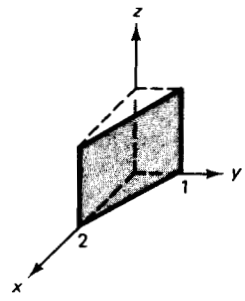
19.



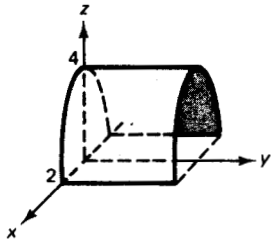
21.



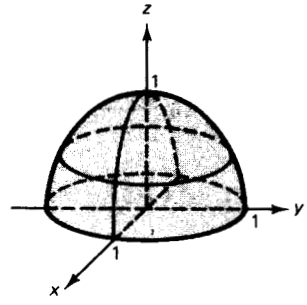
23.



25.



27. La superficie es una esfera (se muestra el hemisferio superior).



EJERCICIOS 17.2

1. $f_x(x, y) = 8x$; $f_y(x, y) = 6y$. **3.** $f_x(x, y) = 0$; $f_y(x, y) = 2$.

5. $g_x(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy - 3y$; $g_y(x, y) = 2x^3y + 2x^2 - 3x + 4$.

7. $g_p(p, q) = \dfrac{q}{2\sqrt{pq}}$; $g_q(p, q) = \dfrac{p}{2\sqrt{pq}}$. **9.** $h_s(s, t) = \dfrac{2s}{t - 3}$; $h_t(s, t) = -\dfrac{s^2 + 4}{(t - 3)^2}$.

11. $u_{q_1}(q_1, q_2) = \dfrac{3}{4q_1}$; $u_{q_2}(q_1, q_2) = \dfrac{1}{4q_2}$.

13. $h_x(x, y) = (x^3 + xy^2 + 3y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$; $h_y(x, y) = (3x^3 + x^2y + y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$.

15. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5ye^{5xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5xe^{5xy}$. **17.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5\left[\dfrac{2x^2}{x^2 + y} + \ln(x^2 + y)\right]$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{5x}{x^2 + y}$.

19. $f_r(r, s) = \sqrt{r + 2s}\,(3r^2 - 2s) + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{2\sqrt{r + 2s}}$; $f_s(r, s) = 2(s - r)\sqrt{r + 2s} + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{\sqrt{r + 2s}}$.

21. $f_r(r, s) = -e^{3-r}\ln(7 - s)$; $f_s(r, s) = \dfrac{e^{3-r}}{s - 7}$.

23. $g_x(x, y, z) = 6xy + 2y^2z$; $g_y(x, y, z) = 3x^2 + 4xyz$; $g_z(x, y, z) = 2xy^2 + 9z^2$.

25. $g_r(r, s, t) = 2re^{s+t}$; $g_s(r, s, t) = (7s^3 + 21s^2 + r^2)e^{s+t}$; $g_t(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$. **27.** 50.

29. $\dfrac{1}{3}$. **31.** 0. **35.** $-\dfrac{ra}{2\left[1 + a\dfrac{n - 1}{2}\right]^2}$.

EJERCICIOS 17.3

1. 20. **3.** 784.5. **5.** $\dfrac{\partial P}{\partial k} = 1.208648l^{0.192}k^{-0.236}$; $\dfrac{\partial P}{\partial l} = 0.303744l^{-0.808}k^{0.764}$

7. $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -50$; $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 2$; $\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 4$; $\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = -20$; competitivos

9. $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -\frac{100}{p_A^2 p_B^{1/2}}$; $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = -\frac{50}{p_A p_B^{3/2}}$; $\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = -\frac{500}{3p_B p_A^{4/3}}$; $\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = -\frac{500}{p_B^2 p_A^{1/3}}$; complementarios.

11. $\frac{\partial P}{\partial B} = 0.01A^{0.27}B^{-0.99}C^{0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$; $\frac{\partial P}{\partial C} = 0.01A^{0.27}B^{0.01}C^{-0.99}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$.

13. 1120; si un funcionario administrativo con maestría en administración de empresas tiene un año adicional de experiencia de trabajo antes de obtener el grado, recibiría \$1120 por año en compensación adicional.

15. **(a)** -1.015; -0.846. **(b)** aquel para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$.

17. **(a)** no; **(b)** 70%. **19.** $\eta_{p_A} = -1$, $\eta_{p_B} = -\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS 17.4

1. $-\frac{x}{z}$. **3.** $\frac{4y}{3z^2}$. **5.** $\frac{x(yz^2 + 1)}{z(1 - x^2y)}$. **7.** $-e^{y-z}$. **9.** $\frac{yz}{1 + z}$. **11.** $-\frac{xy}{z}$. **13.** $-\frac{9}{10}$. **15.** 1. **17.** $\frac{5}{2}$.

EJERCICIOS 17.5

1. $8xy$; $8x$. **3.** 3; 0; 0. **5.** $8xe^{2xy}$; $8e^{2xy}(2xy + 1)$; $32x(1 + xy)e^{2xy}$.

7. $3x^2y + 4xy^2 + y^3$; $3xy^2 + 4x^2y + x^3$; $6xy + 4y^2$; $6xy + 4x^2$. **9.** $x(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$.

11. 0. **13.** 1758. **15.** $2e$. **21.** $-\frac{y^2 + z^2}{z^3} = -\frac{3x^2}{z^3}$.

EJERCICIOS 17.6

1. $\frac{\partial z}{\partial r} = 13$; $\frac{\partial z}{\partial s} = 9$. **3.** $\left[2t + \frac{3\sqrt{t}}{2}\right]e^{t^2+y}$. **5.** $5(2xz^2 + yz) + 2(xz + z^2) - (2x^2z + xy + 2yz)$.

7. $3(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2 + 2xy)$. **9.** $-2s(2x^2 + yz) + r(xz + 3y^2z^2) - 5(xy + 2y^3z)$. **11.** $15s(2x - 7)$. **13.** 324.

15. -1. **17.** $\frac{\partial p}{\partial L} = a\frac{\partial P}{\partial l}g(h) - wh$; $\frac{\partial p}{\partial h} = a\frac{\partial P}{\partial l}Lg'(h) - wL$.

EJERCICIOS 17.7

1. $\left(\frac{14}{3}, -\frac{13}{3}\right)$ **3.** $(2, 5)$, $(2, -6)$, $(-1, 5)$, $(-1, -6)$. **5.** $(50, 150, 350)$. **7.** $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, mínimo relativo.

9. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, máximo relativo. **11.** $(1, 1)$, mínimo relativo.; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ninguno. **13.** $(0, 0)$, máximo relativo;

$\left(4, \frac{1}{2}\right)$, mínimo relativo; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(4, 0)$, ninguno. **15.** $(122, 127)$, máximo relativo. **17.** $(-1, -1)$, mínimo relativo

19. $l = 24$, $k = 14$. **21.** $p_A = 80$, $p_B = 85$. **23.** $q_A = 48$, $q_B = 40$, $p_A = 52$, $p_B = 44$, utilidad = 3304.

25. $q_A = 3$, $q_B = 2$. **27.** 1 pie por 2 pie por 3 pie. **29.** $\left(\frac{105}{37}, \frac{28}{37}\right)$, mínimo relativo.

EJERCICIOS 17.8

1. $(2, -2)$. **3.** $\left(3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **5.** $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. **7.** $(6, 3, 2)$. **9.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. **11.** $(3, 3, 6)$.

13. Planta 1, 40 unidades; planta 2, 60 unidades. **15.** 74 unidades (cuando $l = 8$, $k = 7$). **17.** $x = 12$, $y = 8$.

19. $x = 10$, $y = 20$, $z = 5$.

EJERCICIOS 17.9

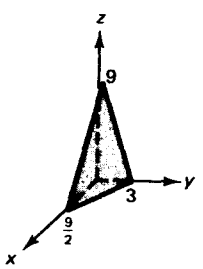
1. $\hat{y} = 0.98 + 0.61x$; 3.12. **3.** $\hat{y} = 0.057 + 1.67x$; 5.90. **5.** $\hat{q} = 82.6 - 0.641p$. **7.** $\hat{y} = 100 + 0.13x$; 105.2.
9. $\hat{y} = 8.5 + 2.5x$. **11.** **(a)** $\hat{y} = 35.9 - 2.5x$; **(b)** $\hat{y} = 28.4 - 2.5x$.

EJERCICIOS 17.11

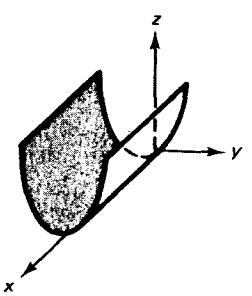
1. 18. **3.** $\frac{1}{4}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **7.** 3. **9.** 324. **11.** $-\frac{58}{35}$. **13.** $\frac{8}{3}$. **15.** $-\frac{1}{3}$. **17.** $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$.
19. $-\frac{27}{4}$. **21.** $\frac{1}{24}$. **23.** $e^{-4} - e^{-2} - e^{-3} + e^{-1}$. **25.** $\frac{3}{8}$.

PROBLEMAS DE REPASO (CAP. 17)

1.



3.



5. $4x + 3y$; $3x + 2y$. **7.** $\frac{y}{(x+y)^2}$; $-\frac{x}{(x+y)^2}$.

9. $\frac{y}{x^2 + y^2}$. **11.** $2xze^{x^2yz}(1 + x^2yz)$. **13.** $2(x + y)$. **15.** $xze^{yz} \ln z$; $\frac{e^{yz}}{z} + ye^{yz} \ln z = e^{yz}\left(\frac{1}{z} + y \ln z\right)$.
17. $2(x + y)e^r + 2\left(\frac{x + 3y}{r + s}\right)$; $2\left(\frac{x + 3y}{r + s}\right)$. **19.** $\frac{2x + 2y + z}{4z - x}$. **21.** $\frac{\partial P}{\partial l} = 14l^{-0.3}k^{0.3}$; $\frac{\partial P}{\partial k} = 6l^{0.7}k^{-0.7}$.
23. Competitivos. **25.** (2, 2) mínimo relativo. **27.** 4 pie por 4 pie por 2 pie.
29. (3, 2, 1). **31.** $\hat{y} = 12.87 + 3.23x$. **33.** 8. **35.** $\frac{1}{210}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA (CAP. 17)

1. $y = 9.50e^{-0.22399x} + 5$. **3.** $T = 79e^{-0.01113t} + 45$.

Índice

A

Abcisa, 97
Adición
  de expresiones algebraicas, 18
  de fracciones, 28-29
  de matrices, 247-248
  de números reales, 3
  eliminación por, 144
Adjunta, 299-303
Álgebra, repaso de, 1-31
  conjuntos, 1-2
  exponentes, 10-16
  factorización, 23-25
  números reales, 2-10
  radicales, 10-16
Contradominio (o ámbito) de funciones, 82,103
  exponenciales, 173
  logarítmicas, 182
Amortización
  de créditos. *Véase* Créditos, amortización de.
  fondo de, 224-225
  tabla de, 228
Análisis geométrico de la programación lineal. *Véase* Programación lineal, análisis geométrico.
Antiderivadas, 558-559, 596-597
Anualidades, 217-224
  anticipadas, 222-223
  valor actual (o presente) de, 220, 221, 644-645,
  valor futuro de, 222, 644
  vencidas, 219
Aprendizaje, ecuación de, 200
Aproximada, integración, 649-653
Áreas de rectángulos, sumatoria de, 587-594
Área, elemento vertical (o franja vertical) de, 605
Artificiales, variables, 351-361
  dual y, 370, 373-374
  problema de minimización y, 363-365
Asíntotas, 464, 515-524
  verticales, 516-524
Asociativas, propiedades, 3

B

Base, 10
Básicas, variables
  definición de, 334
    en problemas normales de programación lineal, 334-342
Básicas, variables (*Continuación*)
  soluciones factibles básicas degeneradas y, 345-346
  soluciones óptimas múltiples y, 349-350
  variables aritificiales y, 352-361
Binomios, 18, 20

C

Cadena, regla de la, 455-457; 708-711

Cálculo. *Véase* Derivadas; Diferenciación; Integración; Varias variables, cálculo de
Cambio de base, fórmula del, 193
Cancelación, 28
Capital, 208-209
Cero,
  matriz, 244, 250
  pendiente, 123
Chebyshev (o Tchebyscheff), desigualdad de, 76
Ciclos, 346
Circulante, razón de, 69
Cobb-Douglas, función de producción de, 737-738
Cociente, regla del, 449-450
Coeficiente,
  de desigualdad, 617
  de regresión lineal, 731
  en expresiones algebraicas, 17
  inicial, 89
  numérico, 17
Coeficientes, matriz de
  aumentada, 265-271
  el análisis de insumo-producción, 305-308
  inversas de la, 284-286
  reducida, 275-277
Cofactores, 289, 299-303
Columna, matriz, 212-243
Competitivos (o sustitutos), productos, 699
Complementarios, productos, 699
Composición de funciones, 94-95
Compuesta, función, 90, 104
Compuesto, interés, 208-211
  en forma continua, 398-400, 656-657
  tablas de, 688-701 Apéndice D, Apéndice P
Concavidad, 505-510
Conjuntos, 1,2
Conmutativas, propiedades, 3
Constante, 18, 33
  de integración, 559
  función, 88, 428
Consumidores, excedente de los, 617-618
Consumo, función de, 452-453, 581
Contable, precio, 370
Continua, anualidad, 644-645
Continuas, funciones, 402, 445-446
  en todas partes, 403
  en un intervalo, 403
Continuidad, 398-418
  aplicada a las desigualdades, 408-413
  diferenciabilidad y, 445-446
Coordenado(s)
  ejes, 97-98
  sistema, 97-105
Costo(s)
  fijos, 55, 158
  función de conjuntos, 696
  marginales, 439-696
  mínimos, 529-530, 533, 726-727
  promedio 440, 529-530
    mínimo, 529-530
  totales, 55, 158
  total, función de, 439
  variables, 55, 158
Cramer, regla de, 295-297
Creciente, función, 494-495
Créditos, amortización de, 227-231
Críticos
  puntos, 496
  valores, 496-498
Cuadrada, matriz, 244-245
  adjunta de, 299-303
  determinantes de la, 287-293, 295-298
Cuadrado(s), 23
  completar el, 135-136
Cuadrática
  ecuación, 43-47, 49-50
  fórmula, 46-47, 49-50
  función, 89, 135-140
Cubos, 23
Curva(s)
  área entre, 610-616
  de demanda, 107, 128-129, 153-157
  de Lorentz, 617
  de oferta, 106, 129, 153-157
  logísticas, 644-666
  parabólicas, 135-140
  pendientes de, 421-426
  rectas tangentes a, *Véase también* Derivadas, 420-426

D

Decrecientes, funciones, 494-495
Decrecimiento
  constante de, 659
  exponencial, 658
Definida, integral
  definición, 590
  determinación de área con, 586-594, 604-609, 610-616
Definida, integral (*Continuación*)
  evaluación de, 595-599
  frente a la integral indefinida, 597
  métodos numéricos para estimar una, 649-653
  múltiple, 738-742
  propiedades de la, 597-599
Degeneradas, soluciones factibles básicas, 342
Demanda
  curva de, 107, 128-129, 153-157
  ecuaciones de, 85, 123-129, 153-157
  elasticidad de, 550-554
  final, matriz de, 306-307
  funciones de, 85, 130, 140, 718-719
  lineal
    ecuación de, 153
  programa de, 106
Denominador
  mínimo común (MCD), 9, 29
  racionalizar el, 13, 28
Densidad, función, 608
  normal, 181, 475
Dependientes, variables, 82
Depreciación, 39, 134
  en línea recta, 39, 134
Derivadas 420-426. *Véase también.* Diferenciación.
  como tasa de variación o razón de cambio, 435-442
  de funciones exponenciales, 473-476
  de funciones logarítmicas, 468-472
  de orden superior (o sucesivas), 486-489, 705-707
  definición, 423
  parciales. *Véase* Parciales, derivadas.
Desigualdades
  aplicación de la continuidad a las, 408-413

aplicaciones de las, 68-70
Chebyshev (Tchebyscheff), de, 76
coeficientes de, 617
definición de, 53
equivalentes, 64-67
con dos variables, 315-320
en una variable, 62-67
símbolo de, 63
valor absoluto y, 72-74
Desplazamiento, 435
Determinante, función, 287-293, 265-298
Diagonal principal de la matriz, 244-245
Diferenciables, funciones, 423-424, 430-433, 445-446
Diferenciación, 420-465
aplicaciones de la,
diferenciabilidad y continuidad, 445-446
implícita, 478-482
lista de fórmulas de,
logarítmica,
parcial implícita, 702-704
Diferenciación (*Continuación*)
regla de la cadena en, 455-457
regla de la potencia en, 457-461
regla del conciente en, 449-453
regla del producto en, 447-449
reglas básicas en, 427-449
trazo de la curva y, 505-510, 513-514
y derivadas. *Véase* Derivadas.
Diferencial(es), 545-549
ecuaciones, 654-661, 663-669
solución general de las, 655
solución particular de las, 656
Discontinuas, funciones, 401-406
Dispersión, diagrama de, 729
Distancia unitaria, 2
Distribución normal, función densidad de la, 181
Distributivas, propiedades, 4-5, 19-20
Divergente, integral impropia, 671-674
Dividendo, 21
División
de expresiones algebraicas, 20-21
de fracciones, 27
de números reales, 5
Divisor, 21
Dominio
definición, 81-82
de funciones, 81-86
exponenciales, 173
logarítmicas, 183
gráfica del, 194
Dualidad, 368-375

E

e, número (de Euler)
definición, 176
tabla de exponenciales, 754-755
Ecuaciones, 33-50
aplicaciones de las, 55-58
conducta gráfica de, 141-149. *Véase también* Trazo de curvas.
cuadráticas, 43-47, 49-50
de aprendizaje, 200
de demanda, 553, 85, 128-129, 153-157
de movimiento, 435
de ofertas, 129, 153-157
de primer grado. *Véase* Lineales, ecuaciones.
de rectas, 123-126
de segundo grado, 43-47, 49-50
de valores, 214
definición de, 33
diferenciales, 654-661
equivalentes, 34-35
fraccionales, 40-41
lineales. *Véase*Lineales, ecuaciones.
Ecuaciones, lineales (*Continuación*)
sistema homogéneo de, 274-277
literales, 37-38
matriz de, 202-203
principios de las, 33-35
que conducen a ecuaciones lineales, 40-42
radicales, 41-42
sistemas de. *Véase* Sistemas de ecuaciones.
solución de, 34-35
y valor absoluto, 71-72
Efectivo, flujos de, 215
Ejes
coordenados, 97-98
de coordenadas, 2
de simetría, 135
de valores funcionales, 102
Elasticidad
de demanda, 550-555
del punto de demanda, 551-555
unitaria, 552
Elemental, matriz, 281-282
Elementos
de la matriz, 211-212
de un conjunto, 1
pivote, 337
Eliminación
por adición 144-146
por sustitución, 145
Enteros
conjunto de los, 1-2
negativos, 1
positivos, 1-2
Equilátera, hipérbola, 552
Equilibrio
cantidad de, 154-155, 159-161
ingresos de, 159
precio de, 154-156
punto de, 153-159, 617
Equivalentes
desigualdades, 64-66
ecuaciones, 34-35
matrices, 267
sistemas, 142-149
Escalar, multiplicación por un, 249-251
Escalón, función en, 406
Estructurales, variables
definición de, 333
problemas de minimización y, 363-365
solución óptima múltiple y, 348-350
soluciones factibles básicas degeneradas y, 345-346
soluciones no acotadas y, 347-348
variables artificiales y, 352-361
y dualidad, 371-375
Euler, teorema de, 738
Excedente de consumidores y fabricantes, 619

Exponencial(es)
decrecimiento, 658
Exponencial(es) (*Continuación*)
funciones, 172-174
derivadas de, 473-476
ley de crecimiento, 658, 663-668
Exponentes, 10-15
Expresiones algebraicas, 17-25
definición de, 18
factorización de, 23-25
operaciones con, 17-21
Extremos, 66
absolutos, 496 *Véase también* Máximo, absoluto; Mínimo absoluto.
relativos (o locales), 493-502, 510. *Véase también*, Máximo relativo.
prueba de la primera derivada para, 498-502
prueba de la segunda derivada para, 513-514; 715-718

F

Fabricantes, excedente de los, 619 -620
Factibles
básicas. *Véase* Solución factible básica.
puntos. *Véase* Factibles, soluciones
regiones, 322-328, 331
soluciones, 321
Factorial $r!$, 90
Factorización, 23-25
Factor(es), 17, 23-24
común, 23
lineales distintos, 634
Fijos, costos, 55, 158
Financiero, cargo, 228
Flujo continuo de ingresos, valor actual de un, 644
Fracciones, ecuaciones, 40-41
Fracciones
parciales, integración por, 629-633
principio fundamental de las, 9, 26
racionalización del denominador de, 13, 28
simplificación de, 26-30
Funcional, notación, 83-85
Función(es), 81-97
contradominio (o ámbito) de. *Véase* Contradominio de funciones.
Cobb-Douglas, 737-738
combinaciones de, 92-95
composición de, 94-95
compuestas, 90-104
constantes, 88-89, 428
continuas. *Véase* Continuas, funciones.
crecientes, 494-495
cuadráticas, 89, 135-140
de consumo, 452, 581
de costo total, 439
de costo de conjuntos, 696
Función(es) (*Continuación*)
de demanda, 505, 718-719
de distribución de Poisson, 179
de ingreso marginal, 451-452
de ingreso total, 441
de la tabla de vida, 603, 652-603
de oferta, 86
de producción, 697-698, 717-718, 737-738
de utilidad, 322, 729
de valor absoluto, 90, 102
de varias variables. *Véase* Varias variables, cálculo de
decrecientes, 494-495
definición de, 81
densidad. *Véase* Densidad, funciones de
determinantes, 287-293, 295-298
diferencia de, 93
diferenciables, 423-424, 430-433, 445-446
diferenciación de. *Véase* Diferenciación.
diferenciales de, 545-549
discontinuas, 401-406
dominio de. *Véase* Dominio de funciones.
e integración. *Véase* Integración.
en escalones, 406
exponenciales. *Véase* Exponenciales, funciones.
homogéneas, 737-738
límites de, 331-400
lineales, 89, 130-133
logarítmicas. *Véase* Logarítmicas, funciones.
logísticas, 664
notación para, 83-85
objetivo. *Véase* Objetivo función
polinominales, 88, 519
potencia, 172
racionales, 391-393, 404, 517-518
suma de, 633-639
valor promedio de, 647-648
variables en, 82

G

Grado
de la función, 89
de un polinomio, 18
Gráficas en coordenadas rectangulares, 97-105

H

Hipérbola, 101
equilatera, 552
Holgura, variables de
definición, 333
dualidad y, 368-371
y problemas de minimización, 363-366
y variables artificiales, 352-362
Homogéneas, funciones, 737-738
Horizontal(es)
asíntotas, 518-522
de área, elemento (o franja horizontal), 695

I

Identidad, matriz, 258-259
Igualdad, propiedad transitiva de la, 3
Iguales, matrices, 243-244
Implícita, diferenciación, 478-481
parcial, 702-704
Impropia(s)
convergente, integral, 671-674
integrales, 671-674
Incógnita, 34
Independientes, variables, 82
Indicadores
definición, 335

dualidad *e*, 374-375
y problema de la minimización, 364-366
y problema normal de programación lineal, 335-342
y soluciones óptimas múltiples, 348-350
y variables artificiales, 352-354
Índice(s)
de la sumatoria, 583
de radical, 11
números, 733
Inelástica, demanda, 552
Inflexión, punto de, 508-510
Ingresos
de punto de equilibrio, 159
marginales, 441-442, 537, 554
curva de, 537
función de, 451
máximos, 531-533
totales, 55, 140
función de, 441
utilidad marginal de los, 729
valor actual de un flujo de, 644
Inicial, coeficiente, 89
Instantánea
tasa de variación, 435-437
rapidez, 435
Insumo-producción (insumo-producto)
análisis de, 304-308
relaciones. *Véase* Funciones.
Integración, 559-678
aproximada, 649-653
de ecuaciones diferenciales, 653, 663-669, 654-660
definida. *Véase* Definida, integral.
determinación del área de, 586-594, 604-609, 610-616
fórmulas de, 560, 569-576
impropias, 671-674
Integración (*Continuación*)
indefinida, 558-563, 597
límites de la, 590-616
por fracciones parciales, 633-639
por medio de tablas, 640-645
por partes, 629-633
regla de la potencia para la, 569-576
técnicas de, 578-581
variables de, 559, 591, 615
y el teorema fundamental del cálculo, 595-602
y el valor promedio de una función, 647-649
y sumatoria, 583-584
Integral(es). *Véase también* Integración.
cálculo
teorema fundamental del, 595. *Véase también* Integración.
definida, determinación del área por, 586-594, 604-609, 610-616
doble, 738-741
impropias, 671-673
indefinida, 558-563, 597
múltiples, 758-742
símbolo de, 559
tabla de, 702-707
triple, 742
Integrando, 559, 562, 591
Interés
compuesto. *Véase* Compuesto, interés.
(o conversión), periodos de, 208-209
tasa efectiva de, 399-400
tasa nominal de, 208-210
Intermedias, variables, 708
Intersecciones, (o intercepciones) con los ejes, 434-439, 520-521, 522-523, 686
Intervalo, 66
abierto, 66
cerrado, 66
Inversa, matriz, 279-286, 299-303
Inversos
aditivos, 4
multiplicativos, 4
propiedades de los, 4
Invertibles, matrices, 280-286
Irracionales, números, 2
Irreductible, factor, 637-639
Isocosto (o de costo equivalente), línea de, 134, 327-324
Isoutilidad (o de utilidad equivalente), línea de, 134, 322-323

L

Lados (o miembros) de expresiones, 33
Lagrange, multiplicadores de, 722-728
Latencia, 477
Leontief, matriz de, 306-308
Límites, 381-400
Límites (*Continuación*)
de la integración, 590, 615
de la sumatoria, 583
inferiores, 590
superiores, 590
y rectas tangentes, 421
Lineal(es), ecuación(es), 33-38
de oferta, 153
definición, 33
ecuaciones que conducen a, 40-43
funciones de, 89, 127-133
en programación lineal. *Véase* Objetivo, funcón.
generales, 126, 147-149
general, 12, 126, 147-149
representación (de) utilizando la multiplicación de matrices, 259-262
solución de, 36-38
Literales, ecuaciones, 37-38
Logarítimica(s)
diferenciación,483-485
formal, 183
funciones, 181-187
derivadas de, 468-472
gráficas de, 182-185
propiedades de, 188-193
tabla de, 345-346
Logística
curva, 664-666
función, 664
Lorentz, curva de, 617

M

Marginal
costo, 439-440, 536-537, 696-698
curva de, 531
productividad, 698
Matemáticas financieras, 208-232
amortización de créditos, 227-231

anualidades, 217-225
interés compuesto, 208-211
valor actual (o presente), 212-216
Matriz(es), 240-310
adición de, 247-248
adjunta de, 300-303
cero, 244-250
columna, 212-213
cuadradas, 244-245
de coeficientes. *Véase* Coeficientes, matriz de.
aumentadas. *Véase también* simplex, método.
reducidas, 275-277
de Leontief, 306-308
definición, 212
determinantes de una, 287-293, 295-298
Matriz(es) (*Continuación*)
elementales, 281-282
elementos de una, 241-242
identidad, 258-259
iguales, 243-244
insumo-producción (o insumo-producto), 304-308
inversa de una, 286, 299-303
invertibles, 280-286
multiplicación de, 254-262
multiplicación por escalar, 249-250
orden de una, 242-244
reducción de, 264-271, 273-277
reducidas, 267-268
renglón, 212-213
sustracción de, 250-251
transpuesta de una, 299
triangular
inferior, 245
superior, 245
Máxima, utilidades, 534-535
Maximización de funciones objetivo
análisis geométrico de, 321-328
método simplex de. *Véase* Símplex, método.
Máximo
absoluto, 496, 514, 529-537
ingreso, 532-534
relativo (o mínimo relativo), 496
definición, 496
para funciones de dos variables, 712-720, 762-728
(*Véase también* Extremos relativos)
Menor de un elemento, 290
Miembros
de conjunto, 1
de expresiones, 33
Mínimo
absoluto, 496, 514, 529-537
común denominador (MCD), 9, 29
costo, 530, 531, 533, 726-727
relativo, 496
definición, 496
para funciones de dos variables, 712-720, 722-728
Mínimos cuadrados
línea de, 731
método de, 730-735
Mixtas, derivadas parciales, 706
Modelación, 55-59
matemática, 55-59
Monomios, 18-21
Monopolio, 534-535
Monto
acumulado (o compuesto), 208-210
de una anualidad continua, 644
definición, 208
de una anualidad, 644
Movimiento, ecuación de, 435
Multiplicación
de expresiones algebraicas, 20-21
de números reales, 3, 6
de una matriz por un escalar, 249-251
de matrices, 354-262
de fracciones, 26-28

N

Naturales
logaritmos, 185-193
números, 1-2
Newton, ley de enfriamiento de, 668-669
No acotada, región factible, 323, 326-327
No básicas variables
soluciones no acotadas y, 347-348
soluciones factibles básicas degeneradas y, 345-346
definición, 334
soluciones óptimas múltiples y, 348-350
variables artificiales y, 353-362
No homogéneo, sistema de ecuaciones lineales, 274
No lineales, sistemas de ecuaciones, 151-153
No negatividad, condiciones de, 322
No singular, matriz, 280-283
No vacía, renglón factible, 323, 325
Nulo, conjunto, 40

O

Objetiva artificial, función, 352
Objetivo, función
análisis geométrico de maximización de la, 321-328
artificial, 352
método simplex de maximización de la. *Véase* símplex, método.
minimización de la, 363-366
Oferta
curva de, 106-129, 153-157
ecuación de, 129, 153-157
funciones de, 86
programa de, 86
Óptimas soluciones, 321
múltiples, 330-331, 348-350
Orden superior, derivadas de, 486-489
parciales, 705-707
Ordenada, 97
Origen
de una recta de números reales, 2
del sistema coordenado, 97-98
simetría con respecto al, 436-439, 464
Original, problema, 370-372

P

Pago, período de, 219
Par ordenado, 98, 682
Parábolas, 135-140
Paralelas, rectas, 123-126

Parámetros, 271, 273-274
Parciales, derivadas, 689-711
  aplicaciones de las, 696-700
  de funciones homogéneas, 737-738
  de orden superior, 705-707
  de orden superior, 707-707
  definición, 691
  diferenciación parcial implícita, 702-704
  notaciones para, 692
  y la regla de la cadena, 708-711
Partes, integración por, 629-633
Pendiente
  de una curva, 421-426
  de una recta, 121
  indefinida, 123
  negativa, 123
  positiva, 123
Pendiente-intercepción, forma, 125
Periodo, base, 733
Pivote, elemento, 337
Plano coordenado, 97
  rectangular, 97
Poiseuille, ley de, 625
Poisson, función de distribución de, 179
Polinominal, función, 89, 519
Polinomios, 18, 21-23
Potencia
  función, 172
  regla de la, 457-460, 570-576
  tablas de, 751-753
Precio contable, 370
Primer grado, ecuaciones de. *Véase* Lineales, ecuaciones.
Primer orden, ecuación difernecial de, 655
Primera derivada para extremos relativos, prueba de la, 498-501
Producción
  función de, 697-698, 717, 737-738
  matriz de, 306-308
Producto, regla del, 447-449
Programación lineal, 315-375
  análisis geométrico, 321, 328
  desigualdades lineales con dos variables, 315-320
  método símplex (*Véase* Símplex, método)
  problemas de, 321
    normales de, 332-343, 351
  soluciones óptimas múltiples, 330-331
Propensión marginal
  al ahorro, 452
  al consumo, 452-453
Punto
Punto (*Continuación*)
  de equilibrio, 154-158, 617
  extremos del lado derecho, 591
Puntos, coordenadas de, 615, 2, 93-99, 684
Punto-pendiente, forma, 124-125

R

Racionalización de un denominador, 13-28
Racional(es)
  función, 517-518, 391-393, 404, 633-639
  números, 2
  propia, función, 633
Radicales, 11-15
  ecuaciones, 41-42
  signo de, 11
Radicando, 11
Raíz
  cuadrada, tablas de, 751-753
  cúbica, 11
  de la ecuación, 34
  de número, 11
  tablas de, 751-753
  n-ésima, 11
Razón, 5
  común, 217-219
  de precio a utilidad (o razón de P/U), 61
Reales, números, 1-9
  valor absoluto de, 71-75
Recíprocos, 4, 64
  tablas de, 751-753
Recta
  horizontal
    ecuación de la, 125
    pendiente de la, 122
  vertical
    ecuación de la, 125
    prueba de la, 104
Rectangulares (o cartesianas), coordenadas, 97
  gráficas en, 97-105
Rectas, 121-126
  de los números reales, 2, 62-63
Reducción, método de, 264-271, 273-277
Región
  factible
    acotada, 323, 325
    vacía, 323, 326
  matriz, 242-243
Regresión lineal
  coeficientes de, 731
  línea de, 731
Regresión, líneas de, 729-735
Relación insumo-producción, *Véase* Funciones.
renglones, operaciones elementales sobre, 266
Recordación, intervalo de, 477
Residuo, 21

S

Secante recta, 421
Segunda variada, 486
  para extremos relativos, prueba de la, 513-514, 715-717
Segundo grado, ecuaciones de, 43-47, 49-50
Segundo orden, derivadas parciales de, 705-707
Semivida (o "vida media"), 659-661
Separación de variables, 655
Serie geométrica, 219-220
Severidad, índice de, 603
Sigma, notación con, 583-585
Signo, número con, 2
Silla, punto de, 716
Simetría, 464, 501-502, 509-510, 510-521
Símplex, método, 332-375
  degeneración en, 345-346
  dualidad en, 368-375
  minimización de funciones objetivo en, 363-366, 368-375
  naturaleza del, 332
  soluciones no acotadas del, 347-348

soluciones óptimas múltiples del, 348-350
variables artificiales en, 351-362, 363-366
y problemas de programación lineal, 332-343, 351
Símplex, tabla, 334. *Véase también* Símplex, método.
Simpson, regla de, 649, 651
Sistema de desigualdad, soluciones de un, 318-320
Sistema(s) de ecuaciones
aplicaciones de un, 153-161
homogéneos, 274-277
lineales, 141-149. *Véase* Lineales, ecuaciones.
no homogéneos, 274
no lineales, 151-153
solución con matrices de, 264-271, 274-277, 279-286, 295-298
Solución, conjunto, 34, 40
Solución factible básica
definición, 334
degenerada, 342-345-346
problema normal de programación lineal y, 334-343, 351
soluciones óptimas múltiples y, 348-350
variable artificial y, 351-362
Soluciones, 34
de ecuaciones cuadráticas, 43-47
de ecuaciones en general, 34-35
de ecuaciones lineales, 36-38
de ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales, 42-44
del sistema, 141-142
factible 321. *Véase también* Solución factible básica.
no acotadas, 347-348
óptimas múltiples, 330-331, 348-350
Soluciones (*Continuación*)
óptimas. *Véase* Óptimas, soluciones
Subconjuntos, 1
Sucesión (o progresión), 217
geométrica, 217-219
Sumatoria, integración y, 583-594
Sustitución, eliminación por, 145
Sustracción
de expresiones algebraicas, 18-19
de fracciones, 27-29
de matrices, 250-251
de números reales, 4-5

T

Tabla de vida, función de, 603, 652-654
Tablas, integración por medio de, 640-645
Tamaño económico del lote (cantidad económica de pedido), 531-532
Tangente recta, 420-426, 546. *Véase también* Derivadas.
Tasa
de variación relativa, 442
efectiva de interés, 210-211, 399
nominal de interés, 210-211
(o razón) media de cambio o variación, la derivada como, 435-442
(o razón) media de cambio o variación, 435-436
periodica,
porcentual anual
porcentual de cambio, 442
Tchebyscheff, desigualdad de. *Véase* Chebyshev, desigualdad de.
Teorema fundamental del cálculo integral, 595-602
Tercer grado, ecuación de, 44-45
Tercer orden, derivada parcial de, 705
Tercera derivada, 486
Términos
de anualidades, 219
de expresiones algebraicas, 17-18
de una sucesión, 217-219
semejantes, 18
Tiempo, series de, 733
Total(es)
costo, 55, 140
ingresos, 55, 140
Transitiva, propiedad, 3
Transposición, 36
Transpuesta de una matriz, 300
Trapecial, regla, 649-653
Trazas, 687
Trazo de curvas, 493-526
asíntotas en, 462, 464, 515-523
concavidad en, 505-510
extremos relativos en. *Véase* Máximo relativo; Mínimo relativo.
Trazo de curvas (*Continuación*)
intersecciones en, 520-523, 569
simetría en, 464, 520-521
Triada ordenada, 684
Tridimensional, sistema coordenado, 684
Trinomios, 23-24
Trivial, solución, 276

U

Unilaterales, límites, 383
Uno a uno, correspondencia, 96
Utilidad, 55
función de, 322, 729
margen de, 62
marginal, 729
de los ingresos, 729
máxima, 534-537

V

Vacío (o nulo), conjunto, 40
Valor
absoluto, 71-75
función, 90, 102
actual (o presente), 212-216, 400
de anualidades anticipadas, 219-222
de un flujo continuo de ingreso, 644
de una anualidad continua, 644-645
neto, 215
ecuación de, 214
funcional, 83, 90
futuro de una anualidad, 222-223
promedio de una función, 647-649
Variable entrante (o de entrada)
definición, 335
soluciones factibles básicas degeneradas y, 345
soluciones no acotadas y, 347-348
variables artificiales y, 352-354
Variable saliente (o de salida)
definición, 336
soluciones factibles básicas degeneradas y, 345
soluciones no acotadas y, 347-348

variables artificiales y, 352, 352-354
Variables
costos, 55, 158
de integración, 559, 591, 615
definición, 53
dependientes, 82
en programación lineal. *Véase* variables artificiales;
independientes, 82
intermedias, 708-711
relacionadas linealmente, 126
separación de, 655
Varias variables, cálculo de, 682-745
derivadas parciales en. *Véase* Parciales, derivadas.
funciones en, 682-688
funciones homogéneas en, 737-738
integrales múltiples en, 738-742
líneas de regresión en, 729-735
máximos y mínimos para funciones de dos variables en, 712-720, 722
Velocidad, 435-438
media, 380
Verhulst-Pearl, función logística, 664
Vértice, 135-137, 323-328, 330-331

X

x
coordenada, 97, 99
eje, 97, 98
simetría con respecto al, 436-438, 520
intercepción, 434-439, 100, 136-137, 520-521, 509-510
x, y, plano, 685

Y

y
coordenada, 97, 99
eje, 97-98
simetría con respecto al, 435-439, 520
intercepción, 434-439, 100, 136, 461-464, 520-521, 509-510
y, z, plano, 685

Índice de Aplicaciones

ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

Adquisición de maquinaria, 226
Amortización de acciones, 401
Amortización de bonos, 57, 59
Amortización de créditos, 229, 232, 234
Anualidad, 220-222, 223, 225-227, 234, 644, 646, 679
Anualidad continua, 401
Arrendamiento de camiones, 367
Arrendamiento de oficinas, 226
Arte, obra de, como cobertura contra inflación, 212
Artículos (o bien) de inferior calidad, 181, 512
Bono de cupón cero, 212, 217
Café, marca de (producto comercial), 150
Cargo por financiamiento en tarjetas de crédito, 212
Cartera de inversión, 60
Cartuchos de videojuegos, 60
Certificado de depósito, 180, 211
Combinación de insumo de costo mínimo, 226
Compensación de graduados en maestría en administración de empresas (MBA), 701
Compensación para el vendedor, 150
Compras de gobierno para bienes y servicios, 734
Consumo de un producto, 679
Contrato sindical, 376
Control de calidad
Contubernio (o conclusión), 721
Corrida de producción, 477
Costo marginal, 440, 443, 454, 463, 466, 473, 476, 490, 502, 568-569, 582, 601, 603, 625
Costo mínimo (o costo promedio), 530, 533, 537, 549, 552, 728
Costo total, 92, 150, 223
Costo promedio, 398, 502, 511, 649
Costo de activo, 586
Costo de la operación de camiones, 539
Costo de producto, 77, 133
Costo de transporte, 367, 378
Costos de almacenamiento y embarque, 503
Costos de vivienda, 260, 260-261, 263-264
Crecimiento logístico de la producción, 669
Crecimiento real de una inversión, 52-54
Cuota de licencia o concesión para fabricante, 539
Déficit presupuestal, 418-419
Depreciación, 87

Depreciación en línea recta, 39, 134, 444
Difusión del proceso hacia el mercado, 477
Distribución de ingresos, 603, 610
Discriminación de precios, 719-720
Economía agraria, 435, 503
Economía hipotética, 252, 260-261, 264
Ecuación de tendencia, 116
Embarques de baterías eléctricas, 367
Emisiones de la Bolsa de Valores de Nueva York
Entrada de una empresa a la industria, 675
Envíos o remesas (fletes), 344
Envío de computadoras al extranjero, 736
Elasticidad de demanda, 525, 555, 557
Elasticidad parcial de la demanda, 702
Equilibrio de mercado, 61
Excedentes de los consumidores y de los fabricantes, 617-621, 625
Flujos de efectivo, 215-216, 234
Flujo de ingresos continuo, 603
Fijación del precio de unos productos, 75
Fijación de precios al servicio telefónico, 503
Función (o ecuación) de costos, 187, 444, 463, 746
Función (o ecuación) de demanda, 85, 130, 133, 181, 197-198, 200, 439, 463, 466, 476, 483, 511, 548
Función (o ecuación) de la oferta, 133, 187
Función de consumo, 581, 582
para EUA (1929-41), 454
Función de costos conjuntos, 696, 700
Función de costos de una planta de energía eléctrica, 444, 466
Función de costo en una fábrica de calcetines y calcetas, 444
Función de producción, 697-698, 700, 712, 746
para Canadá, 700
para granjas lecheras, 700
Función de utilidad (o servicio útil), 729
Fondo de amortización, 224, 227-228, 234
Fondo de inversión, 213, 216, 400
Fondo/club de inversiones, 60, 363
Gastos en equipo, 747
Gastos en empresas o negocios, 625
Gompertz, ecuación de, 200
Hipoteca, 232
Horas de trabajo, 68
Impuesto sobre la renta, 117-120
Impuesto para el fabricante, 155, 539
Impuesto para el proveedor, 162
Índice de la producción industrial, 736
Índice de precios al consumidor para la atención médica, 736
Inflación, 212
Ingreso(s), 60, 203, 444, 503, 549
Ingreso máximo, 140-141, 165, 529, 537, 539, 557
Ingreso marginal, 441, 443, 451, 454, 466, 473, 490, 503, 567-560, 582, 603, 625
Ingreso(s) Total(es), 70, 96, 162
Ingresos por ventas, 59-60, 71, 413
Interés capitalizado continuamente, 398-399, 416, 477, 649
Interés compuesto, 175-176, 179-180, 203, 208-216, 214, 216, 217, 232
Interés simple, 38, 60, 92
Invención de juguetes, 60
Inventario, 107, 408, 625
Inversión en edificio de oficinas, 540
Inversión en terrenos, 62
Liberación de la tasa de interés, 427, 695-696
Línea de ensamble,
Línea de isoutilidad (isolíneas de utilidad), 134
Línea de isocostos (isolínea de costo), 134
Lorentz, curva de, 617
Matriz de insumo-producto, 246, 306-308, 311
Matriz de precios, 254, 260
Matriz de ventas, 246
Margen de utilidad, 62
Mezcla de empleados, 151
Modelo o patrón de tiempo para las compras, 524
Nivel de producción, 128, 151
Pagaré, 217
País unidimensional, 604
Pedido a producción, 329, 345, 378
Penetración de mercado por nuevos productos, 141, 200, 528
Pérdida por recorte en rollos de papel, 367-368
Plan de incentivos, 62
Plan de pensiones, 227
Precio de cámaras, tasa de variación, 709
Precio de un artículo entregado, 49, 604, 626-629
Precios de acción en un ciclo de dividendos, 695
Prestaciones de seguridad social, 454
Producción máxima, 557, 717
Producción de automóviles, 287
Producción de materiales químicos, 149, 540
Producción de relojes, 70
Producto nacional bruto (PNB) (GNP), 200
Producto del ingreso marginal, 460, 462, 466
Productos competitivos (complementarios), 669, 700, 746
Programa de abastecimiento, 86, 106-107
Programa de demanda, 88, 106
Programa de expansión, 59
Propensión marginal al consumo (o al ahorro), 452, 454, 466
Publicidad y redituabilidad, 695
Publicidad, (ganancia) respuesta a, 181

Publicidad en los medios masivos de información, 376
Punto de equilibrio (precio, cantidad), 157, 162-163, 165-166
Razón de circulante, 69-71
Razón de precio a utilidad, 61
Regla de los, 78, 235-239
Relación entre precio y cantidad, 122,
Renta de apartamentos, 58, 538
Rendimiento sobre la inversión, 57, 59, 70-71, 151, 200, 215-216
Requerimientos de productos, 344-345, 351, 362-363
Restricción de producto, 320
Restricción presupuestal, 319-320
Resultado máximo, 721, 729
Saldo compensatorio, 62
Salario o sueldo, 71
Seguros, 222, 226
Substitución en un proceso establecido, 746
Sueldo (o salario de empleados o trabajadores), 669
Suites para oficinas de servicios de, 60
Suscriptores de transmisiones por cable, 532, 538
Tamaño económico de lote, 531, 538-539
Tamaño del motor, 539
Teoría de los inventarios, 695
Utilidad (ganancia o rédito), 55, 59, 68-69, 87, 150, 162, 273, 549, 646, 649
Utilidad marginal del ingreso, 729
Utulidad máxima, 534, 537, 538, 557, 718, 721
Utilidades (ganancias), 68
Utilidades comparativas, 150-151
Utilidades futuras, 674
Utilidades obtenidas continuamente, 401
Valor del negocio, 87
Ventas, 59, 525
Ventas de acciones, 246, 263

CIENCIAS DE LA SALUD Y BIOLOGÍA

Admisiones a salas de emergencia en hospitales, 181
Agente antibacteriano, 557
Aguas contemporáneas de mares someros o poco profundos, 444
Anticoncepción y tasa de natalidad, 527
Bacteria, 92, 467
Basura natural en bosques, 622
Calambres (por descomprensión), 503
Célula:
población, 187
volumen, 443, 463
Chirrido de grillos, 134-135
Color de los ojos de crías, 92, 689
Consumo de oxígeno, 195-196
Contracción muscular, 463, 483, 550
Conversión de enzimas, 530-531, 670
Cría de conejillos para laboratorio, 91
Desarrollo de organismos, 670, 679
Densidad biológica de presas, 43
Dieta y aumento de peso:
para gallinas, 132
para cerdos, 134
para ratas, 48-49, 141, 537, 569
Dieta de carbohidratos y proteínas, 330
Dieta o régimen dietario, 680-681
Difusión entre compartimentos, 603
Difusión de oxígeno desde los capilares, 578
Dispersión de insectos, 512
Dosis de medicamentos, 40, 205-206, 537

Emisiones de polvo de cemento, 365
Enfriamiento corporal, 204
Epidemia de influenza o gripe, 670
Estatura de personas, 700, 706
Experimentos con paramecios, 670
Flujo sanguíneo, 569, 649
Frecuencia de genes, 646
Hemacitómetro, 179
Homicidio, momento de un, 670, 679
Hora de un homocidio, 670
Índice de severidad de accidentes, 603
Implantes radiactivos, 662
Inyección bacteriana en peces, 746
Inyección de tinte en el flujo sanguíneo, 649
Inyección viral, 735
Inyección de rastreadores o trazadores, 477
Isótopos radiactivos, 662
Marcha de animales, 540
Muestra de sangre, 200
Muestreo ecológico, 689
Mutación de genes, 603, 625
Nacimientos, 463
Penicilina, 678
Pérdida de calor, 697
Peso de ramas de árboles, 444
Plantas arraigadas, 200, 511-512, 550
Poiseuille, ley de, 625
Polilla de invierno en Nueva Escocia, 444, 466-467, 569
Presión en el tejido corporal, 463
Privación del alimento, 512
Relación entre anfitrión y parásito, 398, 416, 454, 467

Relación entre depredador y presa, 40, 198, 416, 455, 477
Requerimiento de insulina, 312-314
Riego y rendimiento de un cultivo, 735
Ritmo respiratorio en ovejas, 134
Tasa de natalidad por persona, 670-671
Temperatura de la piel, 443
Temperatura y ritmo cardiaco en gatos, 165
Terapias con fármacos y con radiación, 379-380
Tratamiento del cáncer, 133
Vibraciones en un cable tenso, 701

CIENCIAS SOCIALES Y DEMOGRAFÍA

Alistamiento militar, 194
Aprendizaje con asociación en pares, 88, 180-181
Calificaciones en pruebas de aprovechamiento, 700
Coeficiente de inteligencia (IQ) de niños, 700
Crecimiento de población, 657, 658, 611, 622, 668, 678
Curva logística (para EUA, 1790-1910), 670
Detección de señales, 675
Difusión de un rumor, 667, 669
Ecuación de aprendizaje, 200
Educación de niños en edad preescolar, 439
Elecciones de congreso en 1974, 701-702
Espécimen arqueológico, 662
Estímulo y presión sanguínea, 735-736
Experimento de información visual, 107
Fechado con radiocarbono, 662
Función de densidad de distribución normal, 475
Función de tabla de vida, 603, 652, 654
Grupo de personas hospitalizadas, 87, 463, 478, 492, 604, 625, 679
Ingreso de grupos urbanos, 566
Ley de la concentración urbana, 444
Membrecía en club campestre, 665
Memoria semántica, 166
Miembros de categoría, 527-528
Moda en el campus universitario, 669-670
Obtención de información, 134
Pergamino egipcio, 662
Población mundial, 661
Programa de atención a la salud, 532-533
Relaciones entre estatus social, educación e ingreso, 96-97, 443, 463, 550, 701
Repetición y memoria, 134
Respuesta a choque eléctrico, 87-88, 445
Respuesta condicionada, 512
Respuesta al sabor, 203-204
Retención a corto plazo, 477
Sustitución tecnológica, 483
Tasa de criminalidad, 604

INTERÉS GENERAL

Administración de bosques, 413
Adquisición o renta de automóvil, 70
Adquisición o arrendamiento de máquinas excavadoras, 68
Altura de una pelota, 141
Área máxima, 538, 557
Asistencia a un taller, 413
Bombeo de disolventes, 151
Calificación para facilidad de lectura, 701
Campaña para obtención de fondos, 670
Cantidad mínima de material, 413, 539, 746
Chebyshev, desigualdad de, 76
Concierto universitario, 71
Conjunta,
Consumo de mineral, 603
Contaminación térmica, 503
Costo de operación de automóvil, 537
Costo mínimo de material, 721
Cuestionario político, 226
Cuidado de la vista, 60
De crecimiento radiactivo, 178, 181, 186, 188, 200, 203, 662, 628
Dimensión promedio de un artículo, 76
Diseño de envase, 538
Diseño de empaques de productos, 61
Dormitorio universitario, 60
Duración de un componente electrónico, 674
Eficiencia de una planta generadora de energía eléctrica, 387
Elemento de seguridad, 61
Encuesta para evaluación de productos, 60, 150
Enfriamiento, 748-750
Estacionamiento, 60
Extracción de mineral, 330
Función de servicio postal, 405
Función de densidad, 673
  conjunto, 743
  uniformes, 743
Haz de radar, 39
Huelga de conductores en la industria del cemento, 60
Impuesto sobre ventas, 77, 165
Impuestos estatales y federales, 150, 273
Índice de temperatura y humedad, 683-684
Inflación y costo de la educación universitaria, 211
Ingestión de vitaminas, 273
Inscripción en universidad, 679
Intensidad de la luz, 201, 204
Intensidad de tránsito, 540, 701
Lotería, 227
Llegada a una sala médica de emergencias

Magnitud de un terremoto, 187, 194-195, 477, 483, 492
Modifiación de escala de calificaciones de pruebas 134
Necesidades de nutrimentos, 327, 330

Operación de videograbadoras (VCR), 78-80
Patinado o derrape de automóviles, 43
Pintado por hora o a destajo, 71
Población, 177, 180, 200, 398, 477
Programación de juegos de tenis, 167-171
Rechazo de dulces o caramelos, 60
Recepción de llamadas telefónicas, 180
Salario de un subalguacil (o subcomisario de policía), 60
Semivida (o "vida media") del radón, 662
Tamaño mínimo de una cerca, 535
Tanques de almacenamiento de petróleo, 77
Tarifas telefónicas de larga distancia, 408
Temperaturas Fahrenheit y Celsius, 166, 557
Tiempo de reverberación, 455
Uniforme
Velocidad, 437, 443
Volumen máximo, 538-539, 557

Impreso en:
Impresora y Editora Latinoamericana, S.A. de C.V.
Calle 4 No. 216
Col. Granjas de San Antonio
México D.F.

Enero 1996

3,000 ejemplares más sobrantes